Übungsblatt # 5
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

SS 2015 Dozent: Ingo Runkel

Kurze Fragen (4 P)

Bitte beantworten Sie die folgenden Fragen mit kurzer Begründung (1-2 Sätze). Seien im Folgenden $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$.

1. Wenn λ ein Eigenwert von A ist und μ ein Eigenwert von B, ist dann $\lambda\mu$ ein Eigenwert von AB?

2. Wenn A und B ähnlich sind, sind dann auch A^t und B^t ähnlich?

3. Sei $\mathrm{char} K = 0$. Wenn A und B ähnlich sind, also $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert mit $TAT^{-1} = B$, ist dann T eindeutig bestimmt?

4. Sei $p \in \mathbb{Q}[X]$ gegeben, so dass $p = fg$ mit $f, g \in \mathbb{R}[X]$. Gilt dann schon, dass $f, g \in \mathbb{Q}[X]$?

Aufgabe 23 (7 P) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -5 & -7 \\ -2 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ und geben Sie eine Matrix S an, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. (Sie brauchen S^{-1} nicht zu berechnen.)

Aufgabe 24 (3 P) Sei $P(X) = (-1)^r(X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \ldots + a_0)$. Zeigen Sie, dass die Begleitmatrix M von P die Eigenschaft hat, dass $P_M = P$ ist (4.3, Lemma 14).

Aufgabe 25 (5 P) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ und sei $\Phi \colon \mathrm{Mat}(n \times n, K) \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ die Abbildung, welche eine Matrix B auf die Matrix AB schickt, d.h. Φ ist die Linksmultiplikation mit A. Zeigen Sie, dass für die charakteristischen Polynome gilt: $P_\Phi = (P_A)^n$. Berechnen Sie $\mathrm{tr}(\Phi)$.

Aufgabe 26 (2 P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{GL}(V)$. Drücken Sie f^{-1} durch Potenzen von f und durch die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von f aus.

Aufgabe 27 (3 P) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ so, dass das charakteristische Polynom von f in Linearfaktoren zerfällt. Drücken Sie die Eigenwerte von f^k, $k \in \mathbb{N}$, durch die Eigenwerte von f aus. Nehmen Sie weiter an, dass f invertierbar ist, und berechnen Sie in diesem Fall die Eigenwerte von f^k für $k \in \mathbb{Z}$.