Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 6

Matrizen

Aufgabe 1 *Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für die quadratischen Matrizen*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \textit{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schließen Sie daraus, dass die Multiplikation von Matrizen nicht kommutativ ist.

Aufgabe 2 *A und B seien Matrizen, sodass $A \cdot B$ definiert ist.*

1. *Macht es Sinn auch von $B \cdot A$ zu sprechen?*
2. *Jetzt sei $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Wie wird die Matrix A durch die Multiplikation mit B von rechts verändert?*
3. *Was bewirkt die Multiplikation von links mit der gleichen Matrix?*

Aufgabe 3 (Nicht so schwer, aber lang) *Zeigen Sie, dass $(\mathcal{M}\mathrm{at}_{n,m}(\mathbb{R}), +)$ die gleichen Eigenschaften hat wie $(\mathbb{R}, +)$ (Assoziativ- und Kommutativgesetz, Existenz eines neutralen und von inversen Elementen). Geben Sie um Zeit zu sparen zunächst nur das neutrale Element an und wie inverse Elemente aussehen. Wenn sie alle Matrizen ausschreiben wollen (man muss nicht, siehe Aufgabe 4), dauert es relativ lange. Bemerkung: Eine mathematische* Struktur *ist eine Menge M zusammen mit einer Verknüpfung (z.B. „+“) $M \times M \to M$ auf dieser Menge. Eine Struktur mit obigen Eigenschaften nennt man eine Gruppe. Ein weiteres Beispiel: Auch $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine Gruppe.*

Aufgabe 4 (Sehr kurz aber womöglich auch so schwierig) *Zeigen Sie, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Tipp: Beschreiben Sie $((A \cdot B) \cdot C)_{ij}$ (also den Eintrag von $(A \cdot B) \cdot C$ an Position (i, j) unter (mehrfacher) Verwendung des Summenzeichens. Machen Sie das gleiche mit $(A \cdot (B \cdot C))_{ij}$.*

Aufgabe 5 *Schreiben Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Matrizen und lösen Sie es:*

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & -4x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \\ -5x_1 & + & x_2 & - & 7x_3 & = & -21 \end{array}$$

Aufgabe 6 *Beweisen oder widerlegen Sie:*

1. *Es gibt zwei Geraden in der Ebene (im* $\mathbb{R}^2$*), die sich in einem Punkt schneiden.*

2. *Je zwei Geraden in der Ebene schneiden sich in einem Punkt.*

3. *Je zwei nicht parallele Geraden in der Ebene schneiden sich in einem Punkt.*

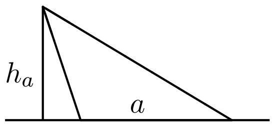
4. *Es gibt zwei echt parallele Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.*

Dreiecksgeometrie, Sinus und Kosinus

Aufgabe 7 *Zeigen Sie, dass die Flächenformel*

$$F_{\Delta} = \frac{1}{2} \textit{Grundlinie} \cdot \textit{zugehörige Höhe}$$

auch in stumpfwinkligen Dreiecken für jede *Seite gilt, also auch, wenn die zugehörige Höhe „ausserhalb“ des Dreiecks liegt. Tipp: Ergänzen Sie dazu das Dreieck zunächst zu einem Parallelogramm. Verschieben Sie einen Teil so, dass Sie ein Rechteck erhalten und lesen Sie dann die Formel ab.*



Aufgabe 8 *Betrachten Sie den Winkel* α *am Einheitskreis für die Werte* $\alpha = 45°, 135°, 225°, 315°$*, das sind die Winkel zwischen den Diagonalen und der* x*-Achse. Der Satz von Pythagoras (genauer der „trigonometrische Pythagoras“) erlaubt es Ihnen in diesen Fällen, die Werte* $\sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)$ *zu berechnen. Geometrisch können Sie schon sehen, dass Sie bis auf das Vorzeichen immer das gleiche Ergebnis erhalten sollten. Erstellen Sie eine Tabelle und tragen Sie die Ergebnisse ein.*

Aufgabe 9 *Es hilft oft, die Werte von* $\sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)$ *für die Winkel* $\alpha = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, ...$ *zu kennen.*

1. *Berechnen Sie* $\sin(30°)$ *und* $\cos(30°)$*. Tipp: Ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von* $30°$ *lässt sich zu einem gleichseitigen Dreieck ergänzen. Berechnen Sie dazu die Höhe im gleichseitigen Dreieck in Abhängigkeit von der Seitenlänge.*

2. *Rechnen Sie die oben gegebenen Werte für* α *ins Bogenmass um (*$360° \hat{=} 2\pi$*) und erstellen Sie sich eine Tabelle mit den Werten* $sin(\alpha)$ *und* $\cos(\alpha)$*.*

Aufgabe 10 *In der Vorlesung hatten wir den Satz* $<\vec{x},\vec{y}>=||\vec{x}||\cdot||\vec{y}||\cdot\cos(\alpha)$*, wobei* α *den Winkel zwischen den Vektoren* $\vec{x}$ *und* $\vec{y}$ *bezeichnet. In dieser Aufgabe wollen wir daraus den Satz von Pythagoras ableiten. Dazu braucht man die folgenden Rechenregeln für das Skalarprodukt:*

1. $<\vec{x},\vec{y}>=<\vec{y},\vec{x}>$ *(Symmetrie)*
2. $<\vec{x}+\vec{z},\vec{y}>=<\vec{x},\vec{y}>+<\vec{z},\vec{y}>$
3. $<a\cdot\vec{x},\vec{y}>=a\cdot<\vec{x},\vec{y}>$

(Linearität im ersten Argument)

Zeigen Sie jetzt:

- *Es gelten auch analoge Regeln 2' und 3' (welche wohl genau?), die man als „Linearität im zweiten Argument“ bezeichnet. Tipp: Verwenden Sie dazu Regel 1.*
- *Leiten Sie jetzt aus obigem Satz den Satz von Pythagoras ab. Tipp: Betrachten Sie ein rechtwinkliges Dreieck und berechnen Sie* $<\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}>$ *(natürlich erst nachdem Sie gesagt haben, was* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *sein soll; Denken Sie auch daran, dass* $<\vec{x},\vec{x}>=||\vec{x}||^2$*).*