

# Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 3

Fridolin Roth

Department Mathematik der Universität Hamburg

## Gleichungen und Ungleichungen

**Aufgabe 1** Finden Sie die Lösung(en) der folgenden Gleichungen.

1.

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+4}{x^2-1}$$

2.

$$|x-3| = 2x$$

3.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

**Aufgabe 2 (Spezialfälle)** Geben Sie in Abhängigkeit der Parameter  $a, b, c \in \mathbb{R}$  die Lösungen der folgenden Gleichungen an:

1.  $ax^2 + c = 0$

2.  $ax^2 + bx = 0$

**Aufgabe 3** Finden Sie die reellen Lösungen von

1.

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

2.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

3.

$$-x^2 - 196 = 0$$

und zeichnen Sie die Parabeln.

**Aufgabe 4** Finden Sie die reellen Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+7}{4x-2} = \frac{x-10}{4x-5}$$

**Aufgabe 5** Haben die folgenden Ungleichungssysteme eine Lösung? Zeichnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge.

1.

$$y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y \leq -|x-3| + 2$$

2.

$$y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y < -|x-3|$$

**Aufgabe 6** Es seien  $a, b, c$  und  $r$  positive reelle Zahlen. Welche geometrischen Objekte werden durch die folgenden Mengen beschrieben?

1.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \quad \wedge \quad |y| \leq 1\}$

2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 = r^2\}$

3.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 \leq r^2\}$

4.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{y}{a})^2 + (\frac{x}{b})^2 = c^2\}$

Finden Sie die Gleichung, die die Kreisscheibe um den Punkt  $(3, 5)$  mit Radius 2 beschreibt.

**Aufgabe 7** *Beweisen Sie direkt*

$$a + \frac{1}{a} = b \quad \Rightarrow \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$$

**Aufgabe 8** *Beweisen Sie indirekt*

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \quad (c > 0, d > 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$