

Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 1

Aufgaben zur Mengenlehre

Aufgabe 1 *Es sei*

$$M_1 := \{4, 8, 12\}$$

$$M_2 := \{3, 6, 9\}$$

$$M_3 := \{0, 2, 4, 6\}$$

$$M_4 := \{6, 12, 18\}$$

Bilden Sie $M = ((M_1 \cup M_2) \cap M_3) \setminus M_4$.

Aufgabe 2 *Es gelte $A \subset B$ und $B \subset C$. Zeigen Sie: Dann gilt auch $A \subset C$.*

Aufgabe 3 *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Funktion, $A, B \subset Y$ Teilmengen von Y . Zeigen Sie*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

Schnitt und Vereinigung verhalten sich also gut beim Übergang zum Urbild („gut“ heisst hier: die Operationen vertauschen). Verhalten sich Schnitt und Vereinigung auch gut beim Übergang zum Bild?

Aufgabe 4 *M habe $n \in \mathbb{N}$ Elemente. Wieviele Elemente hat die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$? Bemerkung: Ihr Ergebnis zeigt, dass $\mathcal{P}(M)$ immer größer ist, als M (solange $M \neq \emptyset$). Man kann zeigen, dass dies auch gilt, wenn M bereits unendlich viele Elemente besitzt. Deshalb muss es mehrere (sogar unendlich viele) verschiedene Arten von „unendlich“ geben.*

Aufgaben zur Aussagenlogik

Aufgabe 5 Schreiben Sie die folgenden Aussagen mithilfe von Quantoren in möglichst einfacher Form, verneinen Sie die Aussagen und übersetzen Sie sie wieder in vollständige deutsche Sätze.

1. Jedes Haus hat einen Aufzug.
2. Jedes Haus hat eine Wohnung mit Balkon.
3. Jedes Haus hat eine Wohnung ohne Balkon.
4. Es gibt ein Haus mit einer Wohnung mit Balkon.
5. Es gibt ein Haus in dem alle Wohnungen einen Balkon haben.

Aufgabe 6 Beweisen Sie das Gesetz der doppelten Verneinung:
Für jede Aussage A gilt: $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

Aufgabe 7 Beweisen Sie eines der aussagenlogischen Distributivgesetze durch Ausfüllen der entsprechenden Wahrheitstafeln. Erklären Sie, wie Sie das Distributivgesetz ablesen können.

Beweisen Sie ein weiteres Distributivgesetz mit weniger Aufwand. Die Kommutativgesetze dürfen Sie dabei auch verwenden. Was brauchen Sie wirklich?

Aufgabe 8 Handelt es sich bei den folgenden Gleichungsumformungen um Äquivalenzumformungen oder Implikationen?

$$\begin{aligned}x &= 7 \\x + 1 &= 8 \\(x + 1)^2 &= 64 \\x^2 + 2x + 1 &= 64 \\2x^2 + 4x + 2 &= 128 \\2bx^2 + 4bx + 2b &= 128b\end{aligned}$$

Aufgabe 9 Formulieren Sie die folgenden Aussagen als normalen Satz, ohne Verwendung von Symbolen oder Formeln.

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \text{ lässt bei Division durch } 4 \text{ den Rest } 3\} = \emptyset$$

Meinen Sie diese Aussage ist wahr oder falsch?

Aufgabe 10 Schreiben Sie die folgende Aussage als Formel.
Es gibt keine größte natürliche Zahl.