Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 4

Aufgabe 1 *Die Abbildungen*

$$f : A \to B \quad \textit{und} \quad g : B \to C$$

seien beide injektiv/sujektiv/bijekiv. Zeigen Sie, dass dann auch

$$g \circ f : A \to C$$

injektiv/surjektiv/bijekiv ist.

Aufgabe 2 *Zeigen Sie* $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$, *indem Sie eine Bijektion* $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ *angeben.*

Aufgabe 3 *Für die durch* $b_n := n + 1$ *definierte Folge* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und die Abbildung*

$$t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \mapsto 2s$$

ist die Folge $(t(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *gesucht. Geben Sie*

1. *die ersten sechs Folgenglieder an.*
2. *eine allgemeingültige Definition der Folge an.*

Aufgabe 4 *Versuchen Sie für die durch*

$$3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, \ldots \quad \textit{bzw.} \quad \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \frac{1}{35}, \ldots$$

angedeuteten Folgen formale Definitionen anzugeben.
Konvergieren die Folgen?

Aufgabe 5 *Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass die Folge* $\left(\frac{3k+4}{2k+2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *gegen* $\frac{3}{2}$ *konvergiert.*
$\left(\textit{Ansatz:} \left|\frac{3k+4}{2k+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{\ldots}{2k+2}\right| = \ldots\right)$

Aufgabe 6 *Überprüfen Sie für eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *die folgenden Vorschläge zur Beschreibung der Folgenkonvergenz (gegen* x*) auf ihre Korrektheit (entsprechen sie der Definition?):*

1. *Für alle* $\alpha > 0\ \exists\ n_\alpha$, *so dass* $\quad |x - x_n| < \alpha \quad \forall n \geq n_\alpha$.

2. *Für ein* $\varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon$, *so dass* $\quad |x - x_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

3. *Für alle* $\varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon$, *so dass* $\quad |x - x_n| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$.

4. *Für alle* $\varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon$, *so dass* $\quad |x - x_n| < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

5. *Für alle* $\varepsilon > 0 \; \exists \; n_\varepsilon$, *so dass* $\quad |x - x_n| < 2 \cdot \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

Aufgabe 7 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine konvergente reelle Folge mit* $a_n > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ *und Grenzwert* a.
Welche Werte kommen für a *in Frage? Welche der drei Fälle* $a > 0, a < 0$ *bzw.* $a = 0$ *sind möglich?*
Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Aufgabe 8 *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge die gegen* a *konvergiert und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine gegen* b *konvergente reelle Folge.*
Beweisen Sie allgemein, dass die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen* $a+b$ *konvergiert.*
(Hinweis: Benutzen Sie u.a. die Dreiecksungleichung (für reelle Beträge) aus der Vorlesung.)

Aufgabe 9 *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\frac{4}{n} + 2)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (1 - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. *Konvergieren* (a_n) *und/oder* (b_n) *und falls ja, gegen welchen Wert?*

2. *Konvergiert die Folge* $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und falls ja, gegen welchen Wert?*

Aufgabe 10 *Überprüfen Sie die Reihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} 1^i$ *auf Konvergenz. Betrachten Sie dazu die zugehörige Partialsummenfolge.*