Vorkurs Mathematik

Universität Hamburg WS 06/07

Fridolin Roth
roth@math.uni-hamburg.de

9. Oktober 2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Aussagenlogik

Die Logik beschäftigt sich mit dem Schlussfolgern. Während wir bei einfachen Sachverhalten meist automatisch (unbewusst) richtig schlussfolgern, wird uns das in komplizierteren Situationen nicht mehr möglich sein: Dann lohnt es, Regeln zu kennen, nach denen wir schlussfolgern können. Diese Regeln sollen möglichst einfach (elementar) sein. Ist unser Problem zu kompliziert, so wollen wir es durch wiederholte Anwendung unserer Regeln lösen. Wir Zerlegen das Problem gewissermaßen in kleinere, verständliche Teile.

1.1.1 Aussagen und Aussageformen

Das intuitive richtige Folgern in einfachen Situationen wollen wir jetzt bewusst durchführen und betrachten folgende Beispielsätze:

1. Die Erde ist ein Planet.
2. Hamburg liegt am Rhein.
3. Jede ganze Zahl ≥ 4 ist die Summe zweier Quadratzahlen.
4. „Das Parfüm“ ist ein Buch des Autors Patrick Süskind.
5. Guten Morgen!
6. Dieser Saal ist schön.
7. Dieser Satz ist falsch.
8. „Das Parfüm“ ist ein Buch des Autors X.
9. Y kann lesen.
10. p ist eine Primzahl.

Unter den obigen Beispielen sind einige, denen wir einen eindeutigen Wahrheitswert wahr (w) oder falsch (f) zuordnen können (Beispiele 1-4). Dabei kommt es nicht darauf an, ob wir diesen kennen oder nicht, sondern nur, ob die Zuordnung prinzipiell eindeutig möglich ist. Bei den letzten sechs Sätzen geht das nicht: Es macht keinen Sinn, die Antwort ist subjektiv, führt zu einem Widerspruch oder hängt davon ab, was mit gewissen Satzbausteinen wirklich gemeint ist. Es motiviert die folgende

Definition 1 *Wir nennen einen Satz eine Aussage, wenn wir ihm eindeutig einen der Wahrheitwerte „wahr“ oder „falsch“ zuordnen können.*
Eine Aussageform ist ein Satz, der eine Variable enthält und nach geeigneter Ersetzung dieser Variable in eine (wahre oder falsche) Aussage übergeht.

1.1.2 Ausagenlogische Junktoren

Wir können Ausagen und Aussageformen zu neuen Aussagen oder Aussageformen verknüpfen:

1. Affen sind klüger als Menschen und die Erde ist eine Scheibe.
2. Peter studiert Mathematik oder (Peter studiert) Physik.
3. Hamburg liegt nicht am Rhein.
4. Wenn Hamburg am Rhein liegt, dann sind Affen klüger als Menschen.
5. Wenn p eine Primzahl ist, dann ist p^2 gleich 4 oder ungerade.
6. Wenn „Das Parfüm“ ein Buch des Autoren X ist, dann ist „Das Parfüm“ ein Buch des Autoren X.

Der zweite Satz ist nur eines von vielen Beispielen, in dem deutlich wird, dass umgangssprachliche Formulierungen häufig unpräzise sind (Hier, weil die Bedeutung der Bindewörter nicht immer eindeutig festgelegt ist. Häufig ergibt sie sich jedoch aus dem Zusammenhang). In der Mathematik können wir uns das nicht erlauben. Wir führen deshalb Symbole ein, um Aussagen und Aussageformen zu verknüpfen, sagen aber präzise, was damit gemeint ist. Natürlich lehnen wir uns an die umgangssprachlichen Verknüpfungen an.

Wir schreiben

$\neg A$	für	„nicht A“
$A \wedge B$	für	„A und B“
$A \vee B$	für	„A oder B (oder beide)“
$A \rightarrow B$	für	„A subjungiert B“ oder „aus A folgt B“
$A \leftrightarrow B$	für	„A bisubjungiert B“ oder „A und B sind äquivalent“

Die umgangssprachlichen Ungenauigkeiten wollen wir mit der folgenden Definition beseitigen:

Definition 2 *Wir definieren die Wahrheitswerte der verknüpften Aussagen (Aussageformen) in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von A und B über die folgende Wahrheitstabelle:*

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f		f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f		f	f	w	w

Somit hängt der Wahrheitswert einer verknüpften Aussage nur von den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagen, den sogenannten Elementaraussagen ab. Die Abhängigkeit ist durch die zugehörige sogenannte Wahrheitsfunktion gegeben.

Wir können diese Verknüpfungen iterieren (mehrmals hintereinander ausführen) und können somit aus alten Aussagen viele neue erzeugen (Bsp.: $B \wedge (\neg A)$, $(A \wedge B) \wedge C$, $A \wedge (B \wedge C)$ $A \wedge (B \vee C)$, $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$).
Iterativ folgt auch, dass man jeder aussagenlogischen Verknüpfung mit obigen Symbolen eine eindeutige Wahrheitsfunktion zuordnen kann.

Es kann vorkommen, dass der Wahrheitswert einer verknüpften Aussageform stets wahr ist, unabhänging von den Wahrheitswerten der Elementaraussagen. Die Aussageform $A \vee \neg A$ ist hierfür ein Beispiel. Stellen Sie die zugehörige Wahrheitstafel auf. Solche Aussageformen nennt man eine allgemeingültige Aussage, Wahrform oder Tautologie.

Definition 3 (Logische Implikation, logische Äquivalenz) *Es seien U und V Aussageformen (oder Aussagen) die Aus den Aussageformen $A, B, C, \dots$ zusammengesetzt sind.*
Wir sagen „U impliziert V“, in Zeichen $U \Rightarrow V$, falls $U \rightarrow V$ eine Tautologie ist.
Wir sagen „U ist äquivalent zu V“, in Zeichen $U \Leftrightarrow V$, falls $U \leftrightarrow V$ eine Tautologie ist.

Beispiel 1 $A \wedge B \Rightarrow A \vee B$ *ist eine logische Implikation und*
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$ *ist eine logische Äquivalenz.*

Beweis:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \leftrightarrow (A \vee B)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	w

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

$\square$

Beachten Sie den Unterschied zwischen $\leftrightarrow$ und $\Leftrightarrow$. Das Symbol $\leftrightarrow$ ist ein aussagenlogisches Zeichen, das zwei Aussageformen zu einer neuen verknüpft. Im Gegensatz dazu ist $\Leftrightarrow$ ist ein metasprachliches Zeichen, mit dem wir über Aussagen sprechen:
$A \leftrightarrow B$ ist eine Aussageform. Es wird nichts über den Wahrheitswert dieser Aussageform gesagt.
$A \Leftrightarrow B$ ist eine Aussage über zwei Aussageformen. Wir können sie lesen als: A und B sind logisch äquivalent/haben die gleichen Wahrheitsfunktionen. $A \leftrightarrow B$ ist eine Tautologie/Wahrform. A genau dann, wenn B.
Analog verhält es sich mit $\rightarrow$ und $\Rightarrow$.

Mit diesen Vorbereitungen können wir zurück zum richtigen Schlussfolgern kommen. Im Ende wollen wir bei so einer Aufgabe stets wissen, ob eine Aussage wahr oder falsch ist. Da sich der Wahrheitswert beim Übergang zu logisch äquivalenten Aussagen (per Definition) nicht ändert, ist es vorteilhaft, grundlegende logische Äquivalenzen zu kennen und ihre Gültigkeit zu beweisen. Wir geben ein paar Beispiele (es gibt viele weitere). Wir nennen sie Gesetze der Aussagenlogik.

Satz 1 *Es gilt*

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$
$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$
$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$
$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Das sind (die) Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetze der Aussagenlogik. Es gibt weitere Distributivgesetze aber diese gelten nicht für die reellen Zahlen.

Das Assoziativgesetz erlaubt es uns, dass wir Klammern weglassen dürfen (und wirklich nur deshalb dürfen wir es!!!).
Beweis des zweiten Assoziativgesetzes: Durch Ausfüllen der Wahrheitstafel:

A	B	C	$A \vee B$	$B \vee C$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C)$
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

□

Diese Gesetze kennen Sie vermutlich schon, zumindest in anderem Zusammenhang: Sie gelten auch für die Addition und Multiplikation reeller Zahlen. (Was entspricht der Multiplikation, was der Addition? Die weiteren Distributivgesetze tun es aber nicht!). Sie gelten aber auch für die mengentheoretischen Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$. Hier können wir die Analogie noch weiter ausbauen, indem wir auch Komplementbildung betrachten. Zunächst wollen wir aber noch bei der Aussagenlogik bleiben und an die folgenden Gesetze erinnern:

Satz 2 (De Morgan'sche Gesetze) *Es gilt:*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Sie wissen schon, wie man sie jetzt beweisen müsste. Versuche Sie es! Wir zeigen später die analogen Aussagen für Mengen, (zumindest teilweise), werden beim Beweis aber auf den letzten Satz zurückgreifen.

1.1.3 Allaussagen, Existenzaussagen, Quantoren

Wir betrachten die folgenden Aussagen:

Es gibt einen Autor, der „das Parfüm“ geschrieben hat.
Jeder Autor kann lesen.

Solche Aussagen nennt man All- bzw Existenzaussagen. Wir erhalten Sie aus den Aussageformen

„Das Parfüm“ ist ein Buch des Autors X.
Y kann lesen.

indem wir die Halbsätze

Es gibt einen Autor X, sodass gilt:
Für jeden Autor Y gilt:

voranstellen. Dafür führen wir Symbole ein:

Definition 4 *Die Symbole $\exists$ („Es gibt“) und $\forall$ („Für alle“) heißen Existenz- und Allquantor.*

Ist A eine Aussageform die nur die Variable X enthält, so wird sie durch voranstellen von $\forall X$ oder $\exists X$ zu einer Aussage. Die (zuvor freie) Variable wird zu einer sogenannten gebundenen Variablen.
ACHTEN SIE AUF DIE RICHTIGE VERWENDUNG VON QUANTOREN!!! (Die Falsche Verwendung von Quantoren ist einer der häufigsten Fehler). Insbesondere ist

$$p \in \mathbb{N} : p \text{ prim}$$

keine Aussage. Sie wird erst durch einen Quantor zu einer Aussage. Vergessen sie ihn nicht! Er ist wichtig:

$$\exists p \in \mathbb{N} : p \text{ prim}$$

ist eine wahre Aussage (Beweis: 2 ist eine Primzahl). Die Aussage

$$\forall p \in \mathbb{N} : p \text{ prim}$$

ist hingegen falsch ($4 = 2 \cdot 2$ ist keine Primzahl).

1.1.4 Verneinung von All- und Existenzaussagen

Behauptungen:

Eine Allaussage wird verneint, indem man den Existenzquantor vor die verneinte Aussageform stellt.
Eine Existenzaussage wird verneint, indem man den Allquantor vor die verneinte Aussageform stellt.

Welche der Behauptung ist Ihrem Gefühl nach richtig (vrgl. Einleitung)? Jedenfalls besagen sie das selbe wie der folgende Satz:

Satz 3 *Es sei A eine Aussageform, die die Variable X enthält (und sonst keine). Dann gilt:*

$$\neg\forall X\ A \quad\Leftrightarrow\quad \exists X \neg A$$

$$\neg\exists X\ A \quad\Leftrightarrow\quad \forall X \neg A$$

Jetzt müssen Sie sich nicht mehr auf Ihr Gefühl verlassen sondern können die Behauptungen richtig beweisen:

Beweis: Durch das Binden der einzigen Variablen X wird die Aussageform A zu einer Aussage $\forall X\ A$ oder $\exists X\ A$. Es macht also Sinn, zu fragen, ob logische Äquivalenzen vorliegen. Wir beweisen die erste. Zu zeigen ist:

$\neg\forall X\ A \leftrightarrow \exists X\ \neg A$ ist eine Tautologie.

Wir müssen also die folgende Wahrheitstafel ausfüllen:

$\forall X \quad A$	$\exists X \neg A$	$\neg\forall X \quad A$	$\neg\forall X \quad A \leftrightarrow \exists X \quad \neg A$
w	f	f	w
f	w	w	w

Semantisch offensichtlich ist $\exists X \neg\ A$ die Negation von $\forall X\ A$. Die Wahrheitstafel zeigt die erste logische Äquivalenz. Die zweite folgt analog oder aus der ersten, mit dem Gesetz der doppelten Verneinung $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ (En Detail: $\neg\exists X A \Leftrightarrow \neg\neg\forall X \neg A \Leftrightarrow \forall X \neg A$. Machen Sie sich klar, dass dies reicht; Transitivität der logischen Äquivalenz!). $\square$

1.2 Mengen

!!!Leider derzeit noch ohne Bilder!!!

Definition 5 (Cantor) *Eine Menge ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten zu einem Ganzen.*

Wir wollen mit dieser naiven Definition arbeiten, obwohl sie sich als äußerst problematisch erwiesen hat. Grundlegend in der Mengenlehre ist die Elementbeziehung: Ist A eine Menge, so heißt $a \in A$, dass a ein Element der Menge A ist. Beachten Sie die Verwendung von Groß-und Kleinbuchstaben, siehe Abschnitt 1.5. Mengen beschreibt man oft dadurch, dass man ihre Elemente angibt und zwar zwischen geschweiften (Mengen-)Klammern (aufzählend; Beispiel: {Fridolin ,Torben} ist die Menge der Dozenten). Oft stellt man Mengen auch grafisch dar: (z.B. mit Venn-Diagrammen)

Wir führen gleich auch noch die Termschreibweise ein: Oft betrachten wir die Menge M, die alle Elemente mit einer gewissen Eigenschaft E besitzt. Hierfür schreiben wir

$$M := \{x | x \text{ erfüllt } E\}$$

Beispiel 2 $M_{ger} := \{x | x = 2 \cdot y \text{ für eine ganze Zahl } y\}$ *ist die Menge der geraden Zahlen.*
$M_{unger} := \{x | x = 2 \cdot y + 1 \text{ für eine ganze Zahl } y\}$ *ist die Menge der ungeraden Zahlen.*
$\mathbb{Z} := \{x | x \in M_{ger} \vee x \in M_{unger}\}$ *ist die Menge der ganzen Zahlen.*
Stets gilt $M = \{x | x \in M\}$.

Besondere Mengen bezeichnen wir mit besonderen Symbolen, häufig mit einem Doppelstrich: $\emptyset = \{\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

Sie kennen sicher bereits die folgenden Mengenrelationen (Zum Begriff Relation, siehe **??**).

Definition 6 *Seien A und B Mengen. Wir schreiben $A \subset B$ („A ist Teilmenge von B“), falls jedes Element von A auch Element von B ist. A und B heißen gleich, falls $A \subset B$ und $B \subset A$ gilt.*
Weiter definieren wir

$$A \cup B := \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B := \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Beispiel 3 $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M.

Beispiel 4 $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

Insbesondere gilt stets $M \in \mathcal{P}(M)$, die Begriffe „Element“ und „Menge“ sind also relativ. (Warum verwenden wir wohl geschwungene Buchstaben für die Potenzmenge?)

Die Definition von Vereinigung und Schnitt erlaubt es uns, Gesetze der Aussagenlogik fast direkt auf die Mengenlehre zu übertragen:

Satz 4 *Es seien A und B Mengen. Dann gilt*

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Grafische Plausibilitätserklärung:

Beweis: Das erste Distributivgesetz:

$\square$

Bemerkung: Auch in der Mengenlehre gelten (anders also für reelle Zahlen) weitere Distributivgesetze. Für die De Morgan'schen Gesetze der Mengenlehre benötigen wir noch den Begriff der Differenzmenge:

Definition 7 *Für zwei Mengen A und B definieren wir die Differenzmenge*

$$A \backslash B := \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

grafisch:

Satz 5 (De Morgan'sche Gesetze der Mengenlehre) *Es seien A, B und C Mengen. Dann gilt:*

$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

$$A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$$

Mit anderen Worten: Komplementbildung macht Schnitt zu Vereinigung und umgekehrt.

1.3 Beweismethoden

Ein mathematischer Satz hat die Form $V \Rightarrow A$. Wir besprechen verschiedene Möglichkeiten, einen Beweis zu führen.

1.3.1 Direkter Beweis

Wir zeigen die Gültigkeit der Aussage A unter Verwendung der Voraussetzung(en) V direkt.

Beispiel 5

$$X \subset Y \wedge Y \subset Z \quad \Rightarrow \quad X \subset Z$$

Beispiel 6

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Im letzten Beispiel sind wir von der Gültigkeit der Voraussetzungen so überzeugt, dass wir sie im Satz nicht nennen. Es gibt trotzdem welche.

Aussagenlogische Begründung für dieses Beweisprinzip: $V \wedge (V \rightarrow A) \Rightarrow A$ ist eine logische Implikation.

Aufgabe 1 *Beweisen Sie direkt*

$$a + \frac{1}{a} = b \quad \Rightarrow \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$$

1.3.2 Indirekter Beweis/Widerspruchsbeweis

Anstatt

$$V \Rightarrow A$$

kann man auch

$$\neg A \Rightarrow \neg V$$

zeigen, denn $V \rightarrow A$ ist logisch äquivalent zu $\neg A \rightarrow \neg V$.

Beispiel 7 *Beweisen Sie indirekt*

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \, (c > 0, d > 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$

Beweis: Anfang gezeigt. Rest: Übungsaufgabe. □

$\neg A$ und V führen also zu einem Widerspruch. Es ist egal, wo der Widerspruch auftritt („Jeder Widerspruch ist gleich gut“). Hier ist ein weiterer typischer Widerspruchsbeweis:

Satz 6 *$\sqrt{2}$ ist nicht rational.*

Beweis: gezeigt aber nicht getippt... □

1.3.3 Induktionsbeweis

Dient zum Beweis von Aussagen der Art $\forall n \in \mathbb{N} A$. (das hat Torben schon gemacht).

1.3.4 Beispiel und Gegenbeispiel

Existenzaussagen kann man natürlich durch die Angabe (Konstruktion) eines Beispiels beweisen.
Allaussagen lassen sich durch die Angabe eines Gegenbeispiels widerlegen. Aber Achtung: Umgekehrt gilt das nicht!!!
Das schien den Zuhörern gar nicht so klar zu sein. Deshalb hab ich folgende Beispiele genannt:

Satz 7 *Es gibt zwei Geraden in der Ebene (im $\mathbb{R}^2$), die sich in einem Punkt schneiden.*

Nichtsatz 1 *Je zwei Geraden in der Ebene schneiden sich in einem Punkt.*

Satz 8 *Je zwei nicht parallele Geraden in der Ebene schneiden sich in einem Punkt.*

Nichtsatz 2 *Es gibt zwei echt parallele Geraden in der Ebene, die sich in einem Punkt schneiden.*

Weil das Interesse so gross war, haben wir dann alles aus diesem Abschitt auch wirklich bewiesen (inklusive der Irrationalität von $\sqrt{2}$ und den Aufgaben), die letzten vier (Nicht-)sätze dann in der Übung.