

Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 5

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

Aufgabe 1 Gegeben seien die Punkte $P := (-3, 2)$ und $Q := (1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

1. Geben Sie die Gerade durch P und Q in Parameterform an.
2. Geben Sie eine Normalenform $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ für diese Gerade an. Tipp: Finden Sie zuerst einen (beliebigen) Vektor, der auf der Gerade senkrecht steht. Seine Komponenten/Einträge geben Ihnen Werte für die zu bestimmenden Koeffizienten a_1, a_2 . Setzen Sie dann P oder Q ein, um auch die Konstante b zu bestimmen.

Aufgabe 2 Es sei $a_1, a_2 \neq 0$. Zeichnen Sie die durch $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ bestimmte Gerade im \mathbb{R}^2 , indem Sie die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen bestimmen.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Länge der Strecke

$$\left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \leq \lambda \leq 2 \right\}$$

Aufgabe 4 Es sei $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$. Zeigen Sie, dass der Vektor (a_1, a_2, a_3) auf der durch $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ beschriebenen Ebene im \mathbb{R}^3 senkrecht steht.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 := (1, 0, 0)$, $v_2 := (1, 1, 0)$ und $v_3 := (1, 1, 1)$ ($v_i \in \mathbb{R}^3$) linear unabhängig sind.

Bilden sie ein Erzeugendensystem? Haben alle Vektoren v_i die Länge 1? Stehen je zwei der Vektoren aufeinander senkrecht?

Aufgabe 6 Bestimmen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

Integralrechnung

Aufgabe 7 Zu berechnen ist die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse auf dem Intervall $[2, 3]$, wobei f folgende Funktion sei:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x.$$

1. Zerlegen Sie dazu das Intervall in zehn gleichlange Teilintervalle, also $[2, 2.1], [2.1, 2.2]$ usw., und berechnen Sie die entsprechende Ober- und Untersumme.
2. Berechnen Sie das entsprechende Integral $\int_2^3 f(t)dt$.

Wie interpretieren Sie die drei errechneten Werte?

Aufgabe 8 Berechnen Sie mit partieller Integration $\int_{\pi/2}^{\pi} x \cdot \cos(x)dx$.

Aufgabe 9 Beweisen Sie mit Hilfe der Substitutionsregel folgende Behauptung für $c \neq 0$ und eine auf $[a, b]$ integrierbare Funktion f :

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{ca}^{cb} f(x)dx.$$