

Vorkurs Mathematik: Übungsblatt 3

Gleichungen und Ungleichungen

Aufgabe 1 Finden Sie die Lösung(en) der folgenden Gleichungen.

1.

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2+4}{x^2-1}$$

2.

$$|x-3| = 2x$$

3.

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Aufgabe 2 (Spezialfälle) Geben Sie in Abhängigkeit der Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ die Lösungen der folgenden Gleichungen an:

1. $ax^2 + c = 0$

2. $ax^2 + bx = 0$

Aufgabe 3 Finden Sie die reellen Lösungen von

1.

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

2.

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

3.

$$-x^2 - 196 = 0$$

und zeichnen Sie die Parabeln.

Aufgabe 4 Finden Sie die reellen Lösungen der Gleichung

$$\frac{2x+7}{4x-2} = \frac{x-10}{4x-5}$$

Aufgabe 5 Haben die folgenden Ungleichungssysteme eine Lösung? Zeichnen Sie gegebenenfalls die Lösungsmenge.

1.

$$y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y \leq -|x-3| + 2$$

2.

$$y \geq |x-3| \quad \wedge \quad y < -|x-3|$$

Aufgabe 6 Es seien a, b, c und r positive reelle Zahlen. Welche geometrischen Objekte werden durch die folgenden Mengen beschrieben?

1. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \quad \wedge \quad |y| \leq 1\}$

2. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 = r^2\}$

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^2 \leq r^2\}$

4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\frac{y}{a})^2 + (\frac{x}{b})^2 = c^2\}$

Finden Sie die Gleichung, die die Kreisscheibe um den Punkt $(3, 5)$ mit Radius 2 beschreibt.

Aufgabe 7 *Beweisen Sie direkt*

$$a + \frac{1}{a} = b \quad \Rightarrow \quad a^3 + \frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$$

Aufgabe 8 *Beweisen Sie indirekt*

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d} \quad (c > 0, d > 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c} < \frac{a+b}{c+d} < \frac{b}{d}$$