Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 12**

1) Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge und

$$K := \{ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in (1 - x_0)\, B \,,\ 0 \leq x_0 \leq 1 \}$$

der *Kegel* mit *Basis* B und der *Höhe* 1. Man berechne $\mathrm{Vol}_{n+1}(K)$ mit Hilfe von $\mathrm{Vol}_n(B)$ (Cavalierisches Prinzip).

2) Es sei r eine auf dem Intervall $[\,a,\, b\,]$ stetige nichtnegative reelle Funktion und

$$A := \{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2(z) \,,\ z \in [\,a,\, b\,] \} \,.$$

Man zeige: $\mathrm{Vol}_3(A) = \pi \displaystyle\int_a^b r^2(z)\, dz \,.$

3) Es sei A in $\mathbb{R}^3$ der *Rotationskörper*, der mittels der stetigen Funktionen $0 \leq r_1 \leq r_2$ durch Rotation um die z–Achse entsteht:

$$A := \{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 : r_1^2(z) \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2(z) \,,\ z \in [\,a,\, b\,] \} \,;$$

ferner sei F die Fläche

$$F := \{ (x,\, z) \in \mathbb{R}^2 : r_1(z) \leq x \leq r_2(z) \,,\ z \in [\,a,\, b\,] \} \,.$$

Man beweise in Abhängigkeit von dem Schwerpunkt $(\xi,\, \zeta)$ von F die Guldinsche *Regel*:

$$\mathrm{Vol}_3(A) = 2\,\pi\,\xi\,\mathrm{Vol}_2(F) \,.$$

Hinweis: Als *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit positivem Volumen V bezeichnet man den Punkt $S = (s_1, \ldots, s_n)$ mit

$$s_j := \frac{1}{V} \int_K x_j\, d^n x \,, \quad j = 1, \ldots, n \,.$$

4) Man beweise, daß der Raum $\mathcal{C}^0[\,-1,\, 1\,]$ mit der L^1–Norm unvollständig ist. Dazu zeige man, daß die Funktionen $f_n : [\,-1,\, 1\,] \to \mathbb{R}\,,\ n \geq 1\,,$ mit

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x \in [\,-1,\, -1/n\,] \\ nx & \text{für} \quad x \in [\,-1/n,\, 1/n\,] \\ 1 & \text{für} \quad x \in [\,1/n,\, 1\,] \end{cases}$$

eine L^1–Cauchyfolge bilden, welche in $\mathcal{C}\,[\,-1,\, 1\,]$ keinen Grenzwert besitzt. Man gebe einen L^1–Grenzwert in $\mathcal{L}^1[\,-1,\, 1\,]$ an.

Abgabetermin: 29. 1. 2004

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 11**

1) Man zeige: Die Zuordnung $x \longmapsto \omega_x$, $x \in \mathbb{R}^n$, wobei

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_{n-1}) := \det(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) , \quad v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n ,$$

definiert eine $(n-1)$–Form ω auf $\mathbb{R}^n$ mit der Darstellung

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x_k \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_n .$$

2) Sei $a \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor der Länge 1. Wir bezeichnen mit M die Ebene senkrecht zu v durch a, d. h.

$$M := \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - a, v \rangle = 0 \} ,$$

und orientieren M so, daß v ein positiv orientierter Normalenvektor wird. Für $\varepsilon > 0$ sei

$$A_\varepsilon := \{ x \in M : \| x - a \|_2 \le \varepsilon \} ,$$

und $F : U \to \mathbb{R}^3$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld in einer Umgebung U von a. Man zeige:

$$\langle \operatorname{rot} F(a), v \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{\partial A_\varepsilon} \langle F, ds \rangle .$$

3) Man zeige (natürlich ohne Verwendung der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale): Sind $s_1, \ldots, s_n$ Elemente in $\mathbb{R}^*$ und ist S die zugeordnete Streckung

$$S(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{x_1}{s_1}, \ldots, \frac{x_n}{s_n} \right) ,$$

so ist für jede Lebesgue–integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auch die Komposition $f \circ S$ integrierbar, und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ S)(x) \, d^n x = | s_1 \cdot \ldots \cdot s_n | \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d^n x .$$

Man schließe hieraus: Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ meßbar, so auch $S^{-1}(A)$, und es gilt

$$\mathrm{Vol}_n(S^{-1}(A)) = | s_1 \cdot \ldots \cdot s_n | \, \mathrm{Vol}_n(A) .$$

4) Man zeige, daß man in der Königsbergerschen Definition der *Hüllreihen* $\sum c_k \chi_{Q_k}$ die *offenen* Quader Q_k auch durch *kompakte* Quader ersetzen kann, ohne dadurch die Definition der L^1–Halbnorm zu verändern.

Abgabetermin: 22. 1. 2004

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 10**

1) Es sei $D_r = \overline{B}_r(0) \subset \mathbb{R}^2$ die kompakte Kreisscheibe mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt 0. Man zeige, daß D_r glatt berandet ist, und begründe mit Hilfe des (zweidimensionalen) Satzes von Stokes, daß für eine geschlossene 1–Form ψ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ die Integrale

$$\int_{\partial D_r} \psi$$

unabhängig von $r > 0$ sind. Man benutze dieses Ergebnis zur Berechung der Integrale $\displaystyle\int_{\partial D_r} \omega$ für die spezielle 1–Form

$$\omega := \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy .$$

2) Man berechne das Integral $\displaystyle\int_B x_2\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$, wobei

$$B = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \} .$$

3) Auf $\mathbb{R}^4$ sei die Differentialform

$$\omega = x_2\, dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1\, dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_4\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + x_3\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

gegeben. Man zeige $\int_A \omega = 0$ für jede kompakte Teilmenge A der 3–Sphäre S^3.

4) Es sei ω auf $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ wie in Aufgabe 1 gegeben. Man zeige: Zu jeder geschlossenen 1–Form ψ auf G gibt es genau eine reelle Zahl a, s. d. $\psi - a\,\omega$ eine Stammfunktion auf G besitzt. M. a. W. : Der Vektorraum

$$H^1_{DRh}(G) := \{ \text{geschlossene } 1-\text{Formen auf } G \} / \{ \text{exakte } 1-\text{Formen auf } G \}$$

ist 1–dimensional und besitzt die Restklasse von ω als Basis.

Hinweis. Man zeige: Ist ψ geschlossen auf G und gilt

$$\int_{S^1} \psi = 0 ,$$

so besitzt ψ eine Stammfunktion. Man beachte, daß G nicht sternförmig, aber Vereinigung zweier sternförmiger Gebiete ist.

Abgabetermin: 15. 1. 2004

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 9**

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches neues Jahr
wünscht das gesamte Übungsteam

1) Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung der beiden Mengen

$$\{ (x, y) : x \leq 0 \, , \; y = 0 \} \, , \quad \{ (x, y) : x \geq 0 \, , \; y = x^2 \} \, .$$

Man zeige:
a) M ist eine $\mathcal{C}^1$–Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$;
b) jeder Punkt $(x, y) \in M$ mit $x \neq 0$ ist ein $\mathcal{C}^\infty$–Mannigfaltigkeitspunkt von M;
c) der Punkt $(0, 0) \in M$ ist kein $\mathcal{C}^\ell$–Mannigfaltigkeitspunkt, $\ell \geq 2$.

2) **a)** Es seien die 1–Formen

$$\omega_1 = (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy - xy\, dz \, , \quad \omega_2 = \omega_1 + 2xy\, dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$ gegeben. Man gebe ein Potential für ω_1 an und entscheide, ob die Form ω_2 geschlossen ist. Ferner berechne man die Integrale von ω_1 und ω_2 längs der *Schraubenlinie*

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, ct) \, , \quad t \in [0, 2\pi] \, , \quad c > 0 \text{ fest} \, .$$

b) ω sei die 2–Form $2xz\, dy \wedge dz + dz \wedge dx - (z^2 + e^x)\, dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^3$. Man zeige $d\omega = 0$ und bestimme eine 1–Form η mit $d\eta = \omega$.

3) Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \longmapsto (x, y, z) = (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r \cos\vartheta) \, .$$

Man berechne für beliebige 1–, 2– und 3–Formen auf einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ (mit den Koordinaten x, y, z) die Liftungen nach $U := \Phi^{-1}(V)$.

4) Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Man zeige unter Verwendung der Jordanschen Normalform:

$$\det \exp A = e^{\operatorname{spur} A} \, .$$

Abgabetermin: 8. 1. 2004

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 8**

1) M_1 und M_2 seien $(n-1)$–dimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Man zeige: Ist $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$ und $T_x M_1 \neq T_x M_2$ für alle $x \in M_1 \cap M_2$, so ist $M_1 \cap M_2$ eine $(n-2)$–dimensionale Untermannigfaltigkeit.

2) Es sei M eine Untermannigfaltigkeit des euklidischen $\mathbb{R}^n$ und x_0 ein Punkt außerhalb von M. Weiter sei $a \in M$ ein Punkt minimalen Abstandes von x_0. Man zeige: Die Gerade durch x_0 und a steht senkrecht auf dem affinen Tangentialraum von M im Punkte a.

3) Es sei $\mathrm{O}(p, q)$ die Menge der quadratischen Matrizen $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit ${}^t A\, I\, A = I$, wobei

$$I = I_{pq} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} .$$

Man zeige: $\mathrm{O}(p, q)$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $n = p + q$, und als Teilmenge von $M(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n(n-1)/2$. Man bestimme ferner den Tangentialraum von $\mathrm{O}(p, q)$ im Einselement E_n.

4) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ werde definiert durch

$$f(x, y, z) := (x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy) .$$

Man zeige (z. B. mit Hilfe der Charakterisierung durch Graphen): Das Bild $M := f(S^2)$ ist eine 2–dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^6$. Es gilt für $a, b \in S^2$ genau dann $f(a) = f(b)$, wenn $b = \pm a$.

Abgabetermin: 18. 12. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 7**

1) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $Q \subset \mathbb{R}^n$ die Quadrik $\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t x\, A\, x = 0 \}$. Man bestimme den Tangentialkegel $T_0 Q$. Wann ist dieser ein Vektorraum? Wann ist 0 ein Mannigfaltigkeitspunkt von Q?
Hinweis: Man darf annehmen (warum ?), daß die Matrix A Diagonalgestalt

$$\mathrm{diag}\,(\ \underbrace{1, \ldots, 1}_{r},\ \underbrace{-1, \ldots, -1}_{s},\ \underbrace{0, \ldots\ldots, 0}_{n-(r+s)}\ )$$

besitzt.

2) Es sei M eine „glatte Hyperfläche" im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, also eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $n-1$, und E sei eine (affine) Hyperebene, die M in genau einem Punkt a schneidet. Man zeige: E ist der (affine) Tangentialraum von M an der Stelle a, d. h. $E = a + T_a M$. Ist diese Aussage auch für $n = 2$ richtig? Wie läßt sich die Aussage auf Untermannigfaltigkeiten beliebiger Dimension in $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern?

3) Es sei $\tau : M\,(m \times n, \mathbb{R}) \longrightarrow M\,(n \times m, \mathbb{R})$ die Abbildung $M \longmapsto {}^t M$. Man bestimme $(D\tau\,(M))\,(H)$ für alle Matrizen $M, H \in M\,(m \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$. Ebenso bestimme man $(D\sigma\,(M))\,(H)$ für die Abbildung $\sigma\,(M) = S\,M$ mit einer festen Matrix $S \in M\,(r \times m, \mathbb{R})$.

4) Es sei det die Determinantenabbildung $\mathbb{R}^{n \times n} \cong M\,(n \times n, \mathbb{R}) \ni M \longmapsto \det M \in \mathbb{R}$. Man bestimme den Gradienten $\mathrm{grad}\det$ dieser Funktion als Abbildung von $M\,(n \times n, \mathbb{R})$ in sich und ihre regulären Werte. Man folgere aus diesem Ergebnis, daß die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}\,(n, \mathbb{R})$ eine glatte Hyperfläche in $M\,(n \times n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ ist, und bestimme deren Tangentialraum an der Stelle E_n.

Abgabetermin: 11. 12. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 6**

1) Man zeige auf mindestens zwei verschiedene Weisen: Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ und N eine solche von $\mathbb{R}^n$, so ist $M \times N$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+n}$ mit $\dim_{(a,b)} M \times N = \dim_a M + \dim_b N$, $(a, b) \in M \times N$.

2) Man identifiziere den Konfigurationsraum eines starren Dreiecks im $\mathbb{R}^3$ mit unterscheidbaren Ecken mit einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^9$.

3) Es sei $M = f^{-1}(0)$ eine 1–dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$, wobei f eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ bezeichnet (mit 0 als regulärem Wert). Man zeige: Die „Rotationsfläche“

$$R := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0 \}$$

ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

4) Die drei Funktionen $f_j : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, seien definiert durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_3 - x_2^2 , \\ f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 x_4 - x_3^2 , \\ f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_4 - x_2 x_3 . \end{aligned}$$

Man zeige, daß

$$M := \{ x \in \mathbb{R}^4 : f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = 0 \}$$

an jeder Stelle $a \in M \cap (\mathbb{R}^4 \setminus \{0\})$ eine *zweidimensionale* Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist. Kann man eine dieser Gleichungen (folglich?) zur Beschreibung von M fortlassen ? Man zeige ferner, daß der Nullpunkt <u>kein</u> Mannigfaltigkeitspunkt von M ist.

Abgabetermin: 4. 12. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 5**

1) Man diskutiere die Höhenlinien der Funktion

$$F := \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x\ ,\ y) \longmapsto xye^{-x-y} \end{cases}$$

und untersuche insbesondere, in welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ sich die Mengen $\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$ in der Form $\{(x, y) \in I \times J : y = \varphi(x)\}$ bzw. $\{(x, y) \in I \times J : x = \psi(y)\}$ mit differenzierbaren Funktionen $\varphi : I \to J$ bzw. $\psi : J \to I$ darstellen lassen.

2) Man bestimme die Maxima und Minima der Funktion

$$f(x, y) := 4x^2 - 3xy$$

auf der Kreisscheibe $D := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \}$.
Hinweis: Man berechne zunächst die lokalen Extrema von f im Inneren von D und dann auf dem Rand von D, d. h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

3) Die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ hat für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $g(x, y)$. Man zeige, daß $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechne $Dg(1, 1)$. Man untersuche g auf Extrema.

4) **a)** Sei V ein endlich–dimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Skalarprodukt. Man zeige, daß die durch

$$f : B = \{x \in V : \langle x, x \rangle < 1\} \longrightarrow V\ , \quad f(x) := \frac{x}{\sqrt{1 - \langle x, x \rangle}}\ ,$$

gegebene Abbildung von der Einheitskugel $B \subset V$ nach V ein Diffeomorphismus ist, und berechne ihr Differential.

b) Im Fall $V = \mathbb{R}^n$ konstruiere man einen Diffeomorphismus der Kugel B auf den Würfel $W = (-1, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$.

Abgabetermin: 27. 11. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 4**

1) Es sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor der Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Man zeige: Für die inhomogene Differentialgleichung

$$Y' = AY + e^{\omega x} v$$

erhält man eine spezielle (komplexwertige) Lösung durch den Ansatz

$$Y = \beta e^{\omega x} v \, , \quad \omega \neq \lambda \, , \quad \text{bzw.} \quad Y = \beta x e^{\omega x} v \, , \quad \omega = \lambda \, .$$

Man bestimme jeweils die Konstante β und ermittle mit diesem Resultat die allgemeine Lösung des Systems

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} Y + e^{2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2) Man zeige: Jedes Anfangswert–Problem der Differentialgleichung

$$y' = x \, | \sin xy \, |$$

besitzt genau eine (auf ganz $\mathbb{R}$ definierte) Lösung. Die Lösungen $y = \varphi(x)$ mit $\varphi(0) \neq 0$ verschwinden nirgends.

3) Der durch einen Transportmechanismus bedingte Austausch zwischen zwei Behältern mit Salzen in homogener Lösung läß sich durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= -k_1 m_1 + k_2 m_2 \, , \\ \dot{m}_2 &= k_1 m_1 - k_2 m_2 \, , \end{aligned}$$

beschreiben. Dabei bezeichnen m_1, m_2 die zur Zeit t in den beiden Behältern befindlichen Salzmengen, und die positiven Zahlen k_1, k_2 sind konstante Übergangsraten. Man berechne die Lösungen dieses Systems unter den Anfangsbedingungen $m_1(0) = M_1$, $m_2(0) = M_2$ und untersuche ihr Langzeitverhalten.

4) Für die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten auf einem Intervall I zeige man:

a) Jede von Null verschiedene Lösung hat nur einfache Nullstellen, und die Menge ihrer Nullstellen besitzt keinen Häufungspunkt in I.

b) Ist φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem von Lösungen, so liegt zwischen je zwei Nullstellen von φ_1 eine Nullstelle von φ_2.

Abgabetermin: 20. 11. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 3**

1) Es sei $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ ein nichtleeres offenes Intervall, und die stetigen Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$ seien ungerade bzw. gerade, d. h. $a(-x) = -a(x)$, $b(-x) = b(x)$ für alle $x \in I$. Dann besitzt die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' = a(x)\, y' + b(x)\, y$ ein *Fundamentalsystem*, d. h. eine Basis des Lösungsraumes, das aus einer geraden und einer ungeraden Funktion besteht.

2) Man bestimme ein Lösungs–Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{a}{x}\, y' + \frac{b}{x^2}\, y = 0\,, \quad x > 0\,,$$

für feste $a, b \in \mathbb{R}$. Hinweis: Man ordne einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ die für alle $\xi \in \mathbb{R}$ erklärte Funktion $\psi(\xi) := \varphi(e^{\xi})$ zu.

3) Man bestimme die Lösung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ der Differentialgleichung

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

mit $\Phi(0) = 0$.

4) Es sei A eine reelle $n \times n$–Matrix. Man zeige: A ist genau dann *schiefsymmetrisch*, d. h. ${}^tA = -A$, wenn für jede Lösung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der Differentialgleichung $Y' = A\,Y$ die euklidische Norm $\| \Phi(x) \| =$ konstant ist.

Abgabetermin: 13. 11. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 2**

1) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{2\,x}{1 + x^2}\,y = \frac{2\,x^2}{1 + x^2}$$

und verifiziere die in der Vorlesung notierten, aber nicht bewiesenen generellen Aussagen über allgemeine Lösungen an diesem Beispiel.

2) Man löse die sogenannte „allgemeine“ Differentialgleichung

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

für den Fall, daß die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

3) Man zeige, daß die lineare Differentialgleichung $y' = a\,(x)\,y + b\,(x)$ stets einen Eulerschen Multiplikator besitzt und berechne damit die Lösung der Gleichung mit vorgegebenem Anfangswert.

4) Man zeige: Ist die Funktion $f : I_\varepsilon(a) \times I_c(r) \to \mathbb{R}$ stetig und genügt sie der Bedingung

$$|\,x - a\,| \cdot |\,f\,(x,\,y_1) - f\,(x,\,y_2)\,| \le |\,y_1 - y_2\,| \quad \text{für alle} \quad (x,\,y_1)\,,\ (x,\,y_2) \in I_\varepsilon(a) \times I_c(r)\ ,$$

so besitzt die Differentialgleichung $y' = f\,(x,\,y)$ höchstens eine Lösung φ lokal um a mit $\varphi\,(a) = c$. Man folgere hieraus erneut den Eindeutigkeitssatz für Lösungen für den Fall, daß die Funktion f auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ lokal einer Lipschitz–Bedingung genügt.

Zusatzfrage: Darf man auf der rechten Seite der vorausgesetzten Ungleichung noch einen Faktor $M > 1$ hinzufügen ?

Abgabetermin: 6. 11. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 1**

1) Man bestimme die *allgemeine* Lösung der folgenden Differentialgleichungen, d. h. die (eindeutig bestimmte) Lösung durch einen beliebigen Punkt (x_0, y_0) des Definitionsbereichs.

$$y' = e^y \cos x \,, \qquad y' = \sqrt{1 - y^2} \,, \quad |\, y \,| < 1$$

$$y' = \frac{1}{y} \sqrt{1 - y^2} \,, \quad 0 < y < 1 \,, \quad y' = \frac{x + y}{x + 2y} \,, \quad (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \,.$$

2) Die Gesamtheit der Lösungen einer (inhomogenen) linearen Differentialgleichung $y' = a(x)\, y + b(x)$, $a, b : I := (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ stetig, läßt sich schreiben in der Form $c\varphi + \varphi_0$, $c \in \mathbb{R}$, mit differenzierbaren Funktionen φ, $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$. Man zeige umgekehrt: Sind φ, $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ vorgegebene stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(x) \neq 0$, $x \in I$, so bilden die Funktionen $c\varphi + \varphi_0$, $c \in \mathbb{R}$, genau die Lösungen einer geeigneten (inhomogenen) linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

3) Man bestimme die *Hundekurve* für den (realistischeren) Fall, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses nicht konstant gleich $c_0 > 0$, sondern gleich

$$c(x) = 4\, c_0 \, \frac{x\,(a - x)}{a^2} \,, \quad 0 \le x \le a \,,$$

ist. (Siehe Analysis II, Blatt 13, Aufgabe 4).

4) An einen Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand $W > 0$ und dem Selbstinduktionskoeffizienten $L > 0$ sei eine mit der Zeit veränderliche Spannung

$$U(t) = U_0 \sin \omega t \,, \quad \omega > 0 \,,$$

angelegt. Aus der Physik ist bekannt, daß die Stromstärke $I = I(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{dI}{dt} + \frac{W}{L}\, I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$$

genügt. Man zeige

$$I(t) = C_0 \exp\left(-\frac{W}{L}\, t \right) + C_1 \sin(\omega t - \gamma)$$

und bestimme C_0, C_1 und γ in Abhängigkeit von $I_0 := I(0)$.

Abgabetermin: 30. 10. 2003

Übungen zur Vorlesung
Analysis III

O. Riemenschneider

Wintersemester 2003 / 04 **Blatt 0**

Beginn der Übungen: 23. 10. 2003

Eintrag in die Listen für die beiden Übungsgruppen: ab 13. 10. 2003

(Die Listen hängen am schwarzen Brett neben meinem Dienstzimmer 221 aus)

Die Scheinvergabe - Kriterien werden zu Beginn des Semesters in der Vorlesung und in den Übungen erläutert

Ich wünsche Ihnen weiterhin Spaß am und Erfolg im Mathematik - Studium,

Ihr Oswald Riemenschneider