Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 13**

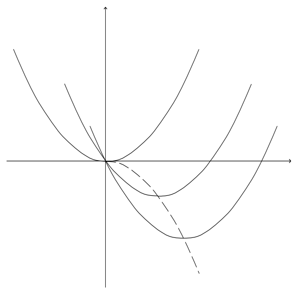
Lösungen (ohne Gewähr)

1. Die Gesamtheit *aller* verschobenen Parabeln wird beschrieben durch

$$y - b = (x - a)^2 \,, \quad (a,\, b) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

Damit der Nullpunkt auf einer dieser Parabeln liegt, ist notwendig und hinreichend, daß $a^2 = -b$. Die zu betrachtende „Schar“ von Parabeln ist daher gegeben durch $P_a \,:\, y = x\,(x - 2\,a)\,,\ a \in \mathbb{R}$. Durch einen vorgegebenen Punkt $(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Kurve dieser Schar, wenn $x_0 \neq 0$, und zwar

$$P_a \quad \text{mit} \quad a = \frac{x_0^2 - y_0}{2\,x_0} \,.$$



Wir werden uns daher im folgenden auf die Betrachtung der Menge $G := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} = \{\,(x_0,\, y_0) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \neq 0\,\}$ beschränken (müssen). Da die Ableitung von P_a nach x an der Stelle x_0 gleich $2(x_0 - a) = x_0 + y_0/x_0$ ist, bestimmt die Schar von Parabeln auf G das „Richtungsfeld“ $P\,(x,\, y) = x + y/x$. Man sieht sofort, daß P einer lokalen Lipschitz–Bedingung genügt (oder schließt dies daraus, daß die Funktion P nach y stetig partiell differenzierbar ist). Also gibt es durch jeden Punkt $(x_0,\, y_0) \in G$ genau eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = P\,(x,\, y) = \frac{x^2 + y}{x} \,,$$

und da die betrachteten Parabeln tatsächlich Lösungen sind, können wir festhalten:

Die Schar der (Graphen der) P_a *(durchschnitten mit* G*) ist identisch mit der Gesamtheit der Lösungsgraphen der Differentialgleichung* $y' = P\,(x,\, y)$.

Die Aufgabe erfordert nun die Aufstellung des zu P *orthogonalen* Richtungsfeldes. Nun ist aber $(-\beta,\, \alpha)$ orthogonal zu $(\alpha,\, \beta)$ im euklidischen $\mathbb{R}^2$. Somit wird die Differentialgleichung für die „Orthogonalschar“:

$$y' = Q\,(x,\, y) := \frac{-x}{x^2 + y}$$

auf der Menge $G' := \{\,(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\,,\ x^2 + y \neq 0\,\}$. Ist nun $\varphi\,(x)$ eine (lokale) Lösung dieser Differentialgleichung, also $(x^2 + \varphi\,(x)))\,\varphi'(x) = -x$, so ist, wie man sofort nachrechnet,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2\varphi(x)}\left(\varphi\,(x) + x^2 - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \,.$$

Also ist notwendig

$$\varphi(x) + x^2 - \frac{1}{2} = C\, e^{-2\varphi(x)} ,$$

woraus man durch Elimination leicht eine Gleichung für die Umkehrfunktionen $x = \psi(y)$ der Lösungen findet:

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - y + C\, e^{-2y}} .$$

Bemerkung Betrachtet man von vornherein die Differentialgleichung für die Umkehrfunktionen, also $x'(y) + x + y/x$, so ist diese vom BERNOULLI–Typ. In der Literatur findet man hierzu reiches Material; insbesondere liefert die Theorie dieses Typs ebenfalls die eben angegebenen Lösungen.

2. Die gegebene Schar ist die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung $y\,y' = x$. Setzt man $a := \tan\alpha$, so berechnet man ähnlich wie in Aufgabe 1 die Differentialgleichung der gesuchten Kurvenschar zu

$$x + a\,y + (-y + a\,x)\,y' = 0 .$$

Hier ist es ganz offensichtlich, daß mit $F(x, y) = y^2 - x^2 - 2\,a\,x\,y$ gilt:

$$\frac{d}{dx} F(x, \varphi(x)) \equiv 0 .$$

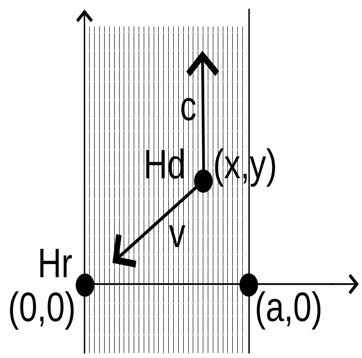
Also ist notwendig $F(x, \varphi(x)) = \text{const.}$.

3. Die Differentialgleichungen sind alle vom gleichen einfachen Typ (getrennte Variable). Die Aufgabe wird im kommenden Wintersemester noch einmal gestellt.

4. In geeigneten Koordinaten (siehe Zeichnung) ist die Eigengeschwindigkeit des Hundes wegen der Bedingung, daß seine Schwimmrichtung stets zu seinem Herrchen, der sich im Ursprung befindet, zeigt, gleich

$$v = \frac{v_0}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,(-x, -y) \quad \text{mit} \quad v_0 := \|\, v \,\| .$$

Die Strömungsgeschwindigkeit ist dann in der Form $(0, c)$ anzusetzen.



Die Bewegungsgleichungen des Hundes sind somit:

$$\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt} = -\frac{v_0\, x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \dot{y}(t) := \frac{dy}{dt} = c - \frac{v_0\, y}{\sqrt{x^2 + y^2}} .$$

Offensichtlich ist gerade der Standort $(0, 0)$ des Herrchens eine Stelle, wo die rechte Seite nicht definiert ist. Unsere Aufgabe besteht also darin, Lösungen zu finden, die in endlicher Zeit gegen den Ursprung konvergieren.

Aus den Bewegungsgleichungen folgt sofort, daß die zeitliche Ableitung der x–Koordinate überall negativ ist und somit $x = x\,(t)$ streng monoton fällt. Also ist auch die verstrichene Zeit t eine (eindeutig bestimmte) Funktion des Ortes: $t = t\,(x)$, und durch Einsetzen erhalten wir die Gleichung der Bahnkurve des Hundes als $y\,(t\,(x))$, die wegen der Kettenregel der Differentialgleichung.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0\,y - c\,\sqrt{x^2 + y^2}}{v_0\,x} = \frac{y}{x} - \frac{c}{v_0}\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

genügt. Dies ist eine *homogene Differentialgleichung*, die man bekanntlich mit dem Ansatz $z = y/x$, $x > 0$, löst. Mit $y' = z'x + z$ gewinnt man die Differentialgleichung

$$\frac{z'}{\sqrt{1 + z^2}} = -\,\lambda \cdot \frac{1}{x}\,, \quad \lambda := \frac{c}{v_0}\,,$$

die man sofort integriert: $\operatorname{Arsinh} z = -\lambda \ln \frac{x}{C}$. Die Anfangsbedingung $z = 0$ für $x = a$ liefert weiter $C = a$ und folglich die Bahngleichung

$$y = x\,z = x\,\sinh\left(\lambda\,\frac{a}{x}\right) = \frac{x}{2}\left(\left(\frac{a}{x}\right)^{\lambda} - \left(\frac{x}{a}\right)^{\lambda}\right)\,.$$

Diese Lösungen konvergieren mit $x \searrow 0$ gegen Null für $\lambda < 1$, gegen $a/2$ für $\lambda = 1$ und gegen ∞ für $\lambda > 1$. Der arme Hund hat also höchstens dann eine Chance, sein unbewegtes Herrchen wiederzutreffen, wenn $\lambda < 1$. Um nachzuprüfen, ob er ihn tatsächlich schwanzwedelnd wieder begrüßen kann, müssen wir noch die Zeit ausrechnen, die er benötigt, um am anderen Ufer anzukommen. Diese können wir ohne Schwierigkeiten aus der ersten Bewegungsgleichung bestimmen. Wegen $\cosh^2 - \sinh^2 \equiv 1$ erhält man aus dieser nämlich

$$\dot{x}\,(t) = \frac{-v_0}{\cosh\,(\lambda\,\ln\,(a/x))}\,,$$

woraus man durch leichte Integration für die benötigte Gesamtzeit T die Formel

$$2\,v_0\,T = \int_0^a \left(\frac{a^{\lambda}}{x^{\lambda}} + \frac{x^{\lambda}}{a^{\lambda}}\right) dx$$

gewinnt. Bei $\lambda \neq 1$ ist der Wert dieses uneigentlichen Integrals gleich

$$\lim_{x \searrow 0} \left(\frac{x^{1-\lambda}}{(1 - \lambda)a^{-\lambda}} + \frac{x^{1+\lambda}}{(1 + \lambda)a^{\lambda}}\right)\Bigg|_x^a\,,$$

also ∞ für $\lambda > 1$ und

$$2\,v_0\,T = \frac{2\,a}{1 - \lambda^2} \quad \text{für} \quad \lambda < 1\,.$$

Hieran sieht man, daß auch für $\lambda < 1$, aber nahe bei 1, der Hund eine sehr lange Zeit braucht, sein Herrchen zu erreichen. Für $\lambda = 1$ ist die Bahn zwar endlich, nämlich ein Stück der Parabel $y = (a^2 - x^2)/2a$, aber dennoch kommt der Hund niemals an dem Uferpunkt $(0,\, a/2)$ an.

Nachtrag (Blatt 9, Aufgabe 12). Es ist einigen Übungsteilnehmern mit nicht allzu großer Mühe gelungen, die in der früheren Musterlösung angegebene Abschätzung von $1,11/1600$ auf $1/1600$ zu verbessern. Man rechnet leicht die zweite und dritte Ableitung der Umkehrfunktion g von f in dem zu untersuchenden Bereich aus und stellt damit fest, daß g'' dort streng monoton wächst und negativ ist. Dies impliziert

$$|\, g''(\xi)\, | \;\leq\; |\, g''(1)\, | \;=\; 1/8 \quad \text{für} \quad \xi \in [\,1,\, 11/10\,]$$

und damit die behauptete Abschätzung.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 12**

Lösungen (ohne Gewähr)

1.
$$\sum_{n=kq}^{kp-1} \frac{1}{n} = \frac{p-q}{k\,(p-q)} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q+(1/k)} + \cdots + \frac{1}{p-(1/k)} \right)$$
ist eine Riemannsche Summe der Funktion $f(x) := 1/x$ auf dem Intervall $[\,q,\,p\,]$ bzgl. der äquidistanten Zerlegung mit $k\,(p-q)$ „Teilintervallen" mit dem jeweiligen linken Endpunkt als Stützstelle. (Da f monoton fällt, ist dies sogar eine Riemannsche „Obersumme"). Folglich ist der gesuchte Grenzwert bei $k \to \infty$ gleich
$$\int_q^p \frac{dx}{x} = \ln x \,\Big|_{x=q}^{p} = \ln p - \ln q = \ln \frac{p}{q} \,.$$

2. Ist F eine Stammfunktion von f, so schreibt sich Φ als
$$\Phi(x) = F(h(x)) - F(g(x)) \,.$$
Diese Funktion ist wegen der Kettenregel differenzierbar mit
$$\Phi'(x) = F'(h(x))\,h'(x) - F'(g(x))\,g'(x) = f(h(x))\,h'(x) - f(g(x))\,g'(x) \,.$$

3. Wie im Aufgabentext vorgeschlagen, zeigen wir als erstes, daß eine auf $[\,a,\,b\,]$ Riemann–integrierbare Funktion f notwendig beschränkt sein muß. Nehmen wir also an, daß f z. B. nicht nach oben beschränkt ist, also $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = \infty$ gilt. Wir wählen dann eine Folge $x_j \in [\,a,\,b\,]$ mit $\lim_{j\to\infty} f(x_j) = \infty$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir nach Investition des Satzes von Bolzano–Weierstraß annehmen, daß die Folge (x_j) gegen einen Wert $\xi \in [\,a,\,b\,]$ konvergiert. Wir können des Weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\xi > a$ und daß die Folge der x_j *streng monoton aufsteigend* gegen ∞ geht. Wir betrachten nun die Folge $\mathcal{Z}_n$ der n–fachen äquidistanten Zerlegungen von $[\,a,\,b\,]$. Für $\mathcal{Z}_n$ bezeichne J_n dasjenige eindeutig bestimmte Teilintervall, in dem ξ liegt, aber nicht als linker Endpunkt. Wir wählen dann zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ eine beliebige Riemann–Summe S_n' für alle Teilintervalle außer für das Teilintervall J_n. Nach Konstruktion von ξ gibt es dann ein $x_j \in J_n$, so daß
$$f(x_j)\,\frac{b-a}{n} \ge n - S_n' \,.$$
Dann ist
$$S_n := f(x_j)\,\frac{b-a}{n} + S_n' \ge n$$
eine Folge Riemannscher Summen von f auf dem Intervall $[\,a,\,b\,]$, die nach oben unbeschränkt ist. Dies widerspricht aber der Riemann–Integrierbarkeit von f.

Für den Rest betrachten wir wieder die äquidistante Zerlegung $\mathcal{Z}_n$. Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ können wir n so groß wählen und für die weiteren Betrachtungen einfrieren, daß sich das Integral von einer beliebigen Riemannschen Summe zur Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ höchstens um $\varepsilon/4$ unterscheidet. Nach dem ersten Teil ist f beschränkt, so daß für die n abgeschlossenen Teilintervalle $I_1, \ldots, I_n$ von $[\,a,\,b\,]$ die Suprema $M_j := \sup_{x\in I_j} f(x)$ und entsprechend die Minima m_j existieren. Es sei dann ψ die Treppenfunktion mit dem Wert M_j im *Inneren* des Intervalls I_j und dem Wert von f an den Endpunkten. Diese erfüllt die Ungleichung $f \le \psi$. Wir können nun zu jedem Teilintervall ein ξ_j so bestimmen, daß

$$M_j - f(\xi_j) \le \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

und damit für die entsprechende Riemannsche Summe S_n

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - S_n \le \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Da weiter

$$S_n - \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{4}$$

ist, folgt

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ganz entsprechend erhält man $\varphi \le f$ und

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}$$

und insgesamt

$$\int_a^b \psi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx \le \varepsilon\,,$$

was zu beweisen war.

4. Die Aussage folgt offensichtlich für Treppenfunktionen auf I wegen der Linearität des Integrals aus der Substitutionsregel für stetige Funktionen. Ist nun f Darboux–integrierbar, so ist für alle $a, b \in J$ mit $a < b$ das Intervall $[\alpha(a), \alpha(b)]$ (nach Voraussetzung ist α monoton steigend) enthalten in dem kompakten Intervall $K := \alpha([a, b])$. Nach Voraussetzung gibt es Folgen von Treppenfunktionen φ_j, ψ_j mit $\varphi_j \le f \le \psi_j$ auf K und $\int_K (\psi_j - \varphi_j)\,dx \to 0$. Dies gilt dann aber auch erst recht auf dem Intervall $[\alpha(a), \alpha(b)]$, so daß

$$\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi_j(x)\,dx\,.$$

Nun sind die Funktionen $(\varphi_j \circ \alpha)\cdot\alpha'$, $(\psi_j \circ \alpha)\cdot\alpha'$ auf jeden Fall Regelfunktionen und damit Riemann–integrierbar auf $[a, b]$. Ferner ist dort $\varphi_j \circ \alpha \le f \circ \alpha \le \psi_j \circ \alpha$ und folglich aufgrund der Voraussetzung $\alpha' \ge 0$ auch $(\varphi_j \circ \alpha)\cdot\alpha' \le (f \circ \alpha)\cdot\alpha' \le (\psi_j \circ \alpha)\cdot\alpha'$. Wegen

$$\int_a^b ((\psi_j \circ \alpha)\cdot\alpha' - (\varphi_j \circ \alpha)\cdot\alpha')\,dx = \int_a^b (((\psi_j - \varphi_j)\circ\alpha)\cdot\alpha')\,dx = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} (\psi_j - \varphi_j)\,dx \longrightarrow 0$$

ist dann f Riemann–integrierbar auf $[a, b]$, und es folgt

$$\int_a^b (f\circ\alpha)(x)\cdot\alpha'(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_a^b (\varphi_j\circ\alpha)(x)\cdot\alpha'(x)\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \varphi_j(x)\,dx = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(x)\,dx\,.$$

Zum zweiten Teil: Man braucht nur eine Richtung zu zeigen: Mit f ist auch $f\circ\alpha$ Riemann–integrierbar; denn die Umkehrung folgt hieraus durch Anwendung auf die Umkehrabbildung von α. Ist nun α, wie vorausgesetzt, ein *Diffeomorphismus*, so ist an allen Stellen $\alpha' \ne 0$ und folglich α' überall positiv oder überall negativ. Insbesondere ist $1/\alpha'$ eine wohldefinierte stetige Funktion auf J, also insbesondere Riemann–integrierbar. Nach dem ersten Teil ist, wenn wir ohne Einschränkung $\alpha' > 0$ annehmen, $(f\circ\alpha)\cdot\alpha'$ auf J Riemann–integrierbar. Da das Produkt von Riemann–integrierbaren Funktionen wieder Riemann–integrierbar ist, folgt hieraus durch Multiplikation mit $1/\alpha'$ die Behauptung.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 11**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Man unterteile das Intervall $[\,1,\,a\,]$ in *geometrischer* Progression: $x_0 = 1 = \alpha_n^0$, $x_1 = \alpha_n$, $x_2 = \alpha_n^2, \ldots, x_n = \alpha_n^n = a$ mit $\alpha_n := \sqrt[n]{a} > 1$. Dann ist $x_{j+1} - x_j = \alpha_n^j\,(\alpha_n - 1) \le x_n - x_{n-1}$, also die Feinheit der Zerlegung gleich $\alpha_n^{n-1}\,(\alpha_n - 1)$, und diese geht mit $n \to \infty$ gegen Null. Wählt man jeweils den linken Endpunkt der Teilintervalle als „Stützstellen", so findet man die folgenden Riemannschen Summen:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\alpha_n^j\,(\alpha_n - 1)}{\alpha_n^j} = n\,(\sqrt[n]{a} - 1)\ .$$

Nun ist (bekanntlich)

$$\lim_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{a} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \frac{d}{dx}\, e^{x \ln a}\Big|_{x=0} = \ln a\ .$$

Da die Folge der Feinheiten der Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ gegen Null geht und der Integrand $1/x$ in dem betrachteten Bereich (definiert und) stetig, also insbesondere Riemann–integrierbar ist, ist dieser Grenzwert der Folge (S_n) gleich dem gesuchten Integral:

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = \ln a\ .$$

2. Wir definieren für $z \in \mathbb{C}$ die Funktion F durch

$$F\,(z) := \sum_{k=0}^{n} \cos kz + i \sum_{k=0}^{n} \sin kz = \sum_{k=0}^{n} e^{ikz}\ .$$

Die rechte Seite ist als Partialsumme der geometrischen Reihe in $q := \exp(iz)$ für $q \ne 1$, also $z \notin 2\pi\mathbb{Z}$, gleich

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{(n+1)/2}\,(q^{(n+1)/2} - q^{-(n+1)/2})}{q^{1/2}\,(q^{1/2} - q^{-1/2})} &= e^{inz/2}\,\frac{\sin\,(n+1)z/2}{\sin\,z/2} \\ &= \Big(\cos\frac{nz}{2} + i\,\sin\frac{nz}{2}\Big)\,\frac{\sin\,(n+1)z/2}{\sin\,z/2}\ . \end{aligned}$$

Daraus folgen unmittelbar die gewünschten Identitäten:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \cos kz &= \frac{F\,(z) + F\,(-z)}{2} = \cos\frac{nz}{2} \cdot \frac{\sin\,(n+1)z/2}{\sin\,z/2}\ , \\ \sum_{k=0}^{n} \sin kz &= \frac{F\,(z) - F\,(-z)}{2i} = \sin\frac{nz}{2} \cdot \frac{\sin\,(n+1)z/2}{\sin\,z/2}\ . \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Integrals über den Cosinus mittels Riemannscher Summen nehmen wir die Folge der äquidistanten Zerlegungen $\mathcal{Z}_n$ des Intervalls $[\,0,\,a\,]$ in n Abschnitte und als Folge der Stützstellen jeweils den linken Endpunkt. Die entsprechende Riemannsche Summe $S_n = S(\cos, \mathcal{Z}_n, (z_j)_{j=0,\ldots,n-1})$ ist dann gleich

$$S_n = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \cos k\frac{a}{n} \Big) \cdot \frac{a}{n} = 2 \cos \frac{(n-1)a}{2n} \cdot \sin a/2 \cdot \frac{a/2n}{\sin a/2n} \; .$$

Wegen $\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1$ konvergiert die rechte Seite gegen $2 \cos a/2 \sin a/2 = \sin a$.

Im Falle des Sinus als Integranden nehme man die gleiche Zerlegungsfolge, aber die rechten Endpunkte als Stützstellen. Hierdurch kommt man zu der Folge

$$S_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} \sin k\frac{a}{n} \Big) \cdot \frac{a}{n} = 2 \sin \frac{(n+1)a}{2n} \cdot \sin a/2 \cdot \frac{a/2n}{\sin a/2n} \; .$$

mit dem Grenzwert $2 \sin^2 a/2 = 1 - \cos a$.

3. Es genügt sogar, daß die Funktion f nur nahe bei b beschränkt ist: Es gibt eine positive reelle Zahl M und ein $\beta < b$, so daß $|f(x)| < M$ für alle x mit $\beta \le x \le b$. Wähle dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ohne Einschränkung β so nahe an b, daß $2M(b-\beta) < \varepsilon/2$. Nach Voraussetzung ist f auf dem Intervall $[a, \beta]$ Riemann–integrierbar. Folglich gibt es Treppenfunktionen φ, ψ auf diesem Intervall, so daß dort $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^\beta (\psi - \varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Man setze nun diese beiden Treppenfunktionen auf $(\beta, b]$ durch $-M$ bzw. M fort. Dies liefert Treppenfunktionen auf dem ganzen Intervall $[a, b]$, die die Funktion f „einhüllen“ und deren Integraldifferenz kleiner als ε ist. Nach dem Darbouxschen Integrationskriterium ist die Funktion f Riemann–integrierbar. Die letzte Behauptung ist wegen der Standardabschätzung für Integrale trivial: Liegt β so nahe bei b, daß f auf $[\beta, b]$ dem Betrage nach durch M beschränkt ist, so folgt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^\beta f(x)\,dx \right| = \left| \int_\beta^b f(x)\,dx \right| \le (b-\beta)\,M \; .$$

Folgerung *Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und nur an endlich vielen Stellen unstetig, so ist f Riemann–integrierbar.*

4.a) Wir beweisen zuerst mit dem Cauchy–Kriterium, daß die Folge $I_j := \int_a^{b-} f_j(x)\,dx$ der uneigentlichen Integrale konvergiert. Denn es existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $j, k \ge N$ und alle $x \in [a, b)$ die Abschätzung

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

besteht. Für diese j, k und alle $\beta < b$ hat man dann weiter die Abschätzung

$$\left| \int_a^\beta f_j(x)\,dx - \int_a^\beta f_k(x)\,dx \right| \le \int_a^\beta |f_j(x) - f_k(x)|\,dx \le \varepsilon \; ,$$

woraus sich unmittelbar

$$|I_j - I_k| = \left| \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^\beta (f_j(x) - f_k(x))\,dx \right| = \lim_{\beta \nearrow b} \left| \int_a^\beta (f_j(x) - f_k(x))\,dx \right| \le \varepsilon$$

ergibt. Also existiert

$$A := \lim_{j\to\infty} \int_a^{b-} f_j(x)\,dx \; .$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge (f_j) auf $[\,a,\, b\,)$ ist die Grenzfunktion f auf jedem kompakten Intervall $[\,a,\, \beta\,] \subset [\,a,\, b\,)$ integrierbar. Es ist noch zu zeigen, daß

$$\int_a^{b-} f\,(x)\,dx \;=\; \lim_{\beta \nearrow b} \int_a^{\beta} f\,(x)\,dx \;=\; A\,.$$

Nun gibt es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int_a^{b-} f_N(x)\,dx \,-\, A \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{und} \quad |\, f_N(x) \,-\, f\,(x)\,| \,<\, \frac{\varepsilon}{3\,(b\,-\,a)} \quad \text{für alle } x \in [\,a,\, b\,)\,,$$

da die Folge der f_j gleichmäßig auf $[\,a,\, b\,)$ gegen f konvergiert. Ferner gibt es ein $\beta_0 < b$, so daß

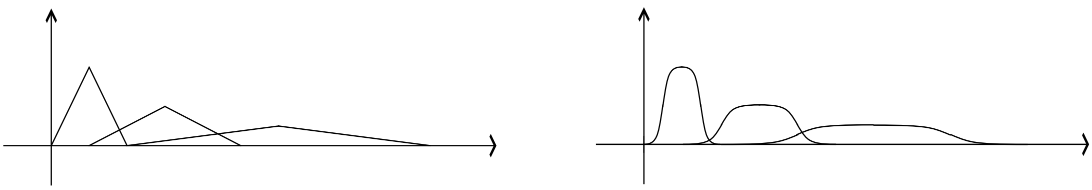
$$\left| \int_a^{\beta} f_N(x)\,dx \,-\, \int_a^{b-} f_N(x)\,dx \right| \,\le\, \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle} \quad \beta_0 \le \beta < b\,.$$

Dann gilt für alle diese β:

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^{\beta} f\,(x)\,dx \,-\, A \right| \;&\le\; \left| \int_a^{\beta} f\,(x)\,dx \,-\, \int_a^{\beta} f_N(x)\,dx \right| + \left| \int_a^{\beta} f_N(x)\,dx \,-\, \int_a^{b-} f_N(x)\,dx \right| \\
&\qquad + \left| \int_a^{b-} f_N(x)\,dx \,-\, A \right| \\
&\le\; \int_a^{\beta} |\, f_N(x)\,dx \,-\, f\,(x)\,|\,dx \,+\, \frac{2}{3}\,\varepsilon \,\le\, \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

b) Es gibt stetige und sogar $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen $g\,:\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die außerhalb des Intervalls $(\,-1,\, 1\,)$ verschwinden, auf diesem positiv sind und (damit) ein positives Integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} g\,(x)\,dx \,=:\, A \,>\, 0$ besitzen. Eine solche stetige Funktion ist $g\,(x) \,=\, 1 \,-\, |\,x\,|\,,\ |\,x\,| \,<\, 1\,,\ g\,(x) \,=\, 0$ sonst, oder im differenzierbaren Fall die durch Null fortgesetzte Funktion $g\,(x) \,:=\, \exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right)\,,\ |\,x\,| \,<\, 1$. Betrachte nun die Funktionenfolge $f_0(x) \,:=\, g\,(x-1)\,,\ f_n(x) \,:=\, 2^{-n}\, f_0(2^{-n}\,(x \,-\, n))$. Damit ist $f_n(x) = 0$ für $x < n$, so daß die Folge (f_n) auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen 0 konvergiert. Die Konvergenz ist sogar gleichmäßig, da $\sup\, f_n = 2^{-n} \sup\, f_0$. Mit der Substitution $t := 2^{-n}\,(x \,-\, n)$ rechnet man aber sofort nach, daß

$$\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \;=\; A \quad \text{und damit} \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \;=\; A \,>\, 0 \;=\; \int_0^{\infty} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\,.$$



(Die Skizzen sind überhöht)

Bemerkung. Man kann auch auf $(\,0,\, \infty\,)$ z. B. die (bei $n > 0$ nirgends verschwindenden) Funktionen $f_n(x) := n\, e^{-n/(2x^2)}/x^3$ betrachten. Mit dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung findet man sehr leicht

$$\int_0^{\infty} f_n(x)\,dx \;=\; e^{-n/(2x^2)}\Big|_{x=0}^{\infty} \;=\; 1\,.$$

Andererseits besitzt die Funktion f_n den maximalen Wert $3\sqrt{3}e^{-3/2}/\sqrt{n}$, und dieser geht gegen Null. Also ist die Funktionenfolge gleichmäßig auf $(\,0,\, \infty\,)$ gegen Null konvergent.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 10**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Wir geben nur die Ergebnisse der Integration der Partialbruch–Zerlegung an. Es ist

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1} = x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x - 1} + \frac{5}{4}\ln|x - 1| - \frac{1}{4}\ln|x + 1|\,,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\,,$$

$$\int \frac{x^7\,dx}{x^4 + 2} = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\ln(x^4 + 2)\,.$$

Das vierte Integral wird durch die Substitution $t = \sqrt{x}$ übergeführt in ein Integral über eine rationale Funktion, dessen Auswertung zu dem Ergebnis

$$x - 4\sqrt{x} + 4\ln(\sqrt{x} + 1)$$

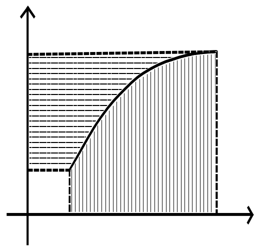
führt.

2. Es ist verlockend, vielversprechend und in der Tat erfolgreich, auf das zweite Integral die Substitutionsregel mit $y = f(x)$ anzuwenden. Damit erledigt sich die Formel mit einem Schlag:

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy = \int_a^b (f(x) + x\,f'(x))\,dx = \int_a^b (x\,f(x))'\,dx$$

$$= x\,f(x)\,\Big|_a^b = b\,f(b) - a\,f(a)\,.$$

Ihren geometrischen Inhalt kann man sich ganz einfach an einer Zeichnung klar machen.



Die Anwendungen der Formel sind „straightforward“: Es ist

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx + \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2\,dy = b\sqrt{b} - a\sqrt{a}$$

und

$$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} y^2\,dy = \frac{1}{3}\,y^3\,\Big|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}$$

und damit insgesamt

$$\int_a^b \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\left(b\sqrt{b} - a\sqrt{a}\right) .$$

Ebenso einfach findet man $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,dx = \pi/2 - 1$.

Bemerkung. Die Aussage der Aufgabe bleibt auch richtig, wenn die Funktion f nur integrierbar im Riemannschen Sinne ist. Der Beweis ist dann zwar aufwendiger, bietet aber auch keine allzu großen Schwierigkeiten.

3. Man kann die Konvergenz des Integrals, das natürlich nur bei Annäherung an ∞, nicht aber in 0 uneigentlich ist, aus Aufgabe 4 ableiten. Dort wird aber partielle Integration verwendet, die man hier auch direkt nutzbringend anwenden könnte. Wir überlassen die Einzelheiten dem Leser. Daß das Integral

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$$

divergiert, kann man z. B. mit dem *Monotonie–Kriterium* nachweisen. (Beide Aussagen werden bewiesen bei KÖ auf Seite 220).

4. a) Auch diese Aufgabe findet man bei KÖ (Aufgabe 11.12, Lösung auf Seite 387): Für beliebige $[\alpha, \beta] \subset [a, b)$ findet man vermöge partieller Integration

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx = F\,g\,\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)\,g'(x)\,dx .$$

Aufgrund der Voraussetzungen geht der „ausintegrierte“ Anteil gegen Null für $\beta \to b$. Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß das uneigentliche Integral über $F\,g'$ existiert. Hierzu benutzen wir das Cauchy–Kriterium, wobei wir noch annehmen dürfen, daß g monoton wächst und damit wegen der Stetigkeit von g' überall $g' \geq 0$ gilt. Ist nun M eine Schranke zu F, so gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\beta_0 < \beta$, so daß für alle $x \in [\beta_0, b)$ gilt: $g(x) < \varepsilon/2M$. Dann ist für alle Intervalle $[\alpha, \beta] \subset [\beta_0, b)$

$$\left|\int_\alpha^\beta F(x)\,g'(x)\,dx\right| \leq \int_\alpha^\beta |F(x)|\,g'(x)\,dx \leq M\,g\,\Big|_\alpha^\beta \leq \varepsilon .$$

b) Wegen der Grenzwertaussage für die Ableitung von f ist f' ab einer geeigneten Stelle positiv und damit f von da ab streng monoton wachsend. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, daß dies schon auf dem Definitionsintervall $[a, \infty)$ der Fall ist. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ besitzt f eine (streng monotone) Umkehrfunktion $g : [f(a), \infty)$. Wir substituieren $x = f(t)$, also $t = g(x)$ und $dt = \dfrac{dx}{f'(g(x))}$ und gewinnen daraus

$$\int_0^\infty \sin f(t)\,dt = \int_{f(a)}^\infty \frac{\sin x}{f'(g(x))}\,dx .$$

Das umgeformte Integral ist nach dem vorher bewiesenen Kriterium konvergent.

Bemerkungen. 1. Die Existenz der sogenannten FRESNEL–Integrale kann man fast unmittelbar aus dem Dirichletschen Konvergenzkriterium ableiten. Man substituiert $t := x^2$ und erhält mit $dt = 2\,x\,dx = 2\sqrt{t}\,dx$ die Beziehung

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt .$$

Das rechts stehende Integral existiert aber nach dem Dirichletschen Kriterium: Der Integrand ist bei 0 durch 0 stetig ergänzbar, das Integral also nur an der oberen Grenze uneigentlich. Die Funktion $t \mapsto$

$1/\sqrt{t}$ strebt aber in dem Intervall $[1, \infty)$ monoton fallend gegen Null, und die Integrale $\displaystyle\int_1^\infty \sin t \, dt = \cos 1 - \cos x$ sind in diesem Intervall beschränkt.
2. Man zeigt in der Funktionentheorie, daß

$$\int_0^\infty \sin x^2 \, dx = \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

3. Man beachte die formale Ähnlichkeit zu dem Dirichlet–Kriterium für die Konvergenz von Reihen. Diese ist selbstverständlich <u>nicht</u> zufällig, wenn man beachtet, daß die auftretenden Integrale durch Riemannsche Summen approximiert werden können.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 9**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung nur eine Übung im systematischen Differenzieren: Es ist zu zeigen, daß jeweils die Ableitung der rechten Seite gleich dem Integranden unter dem Integralzeichen auf der linken Seite ist. Hier eine Auswahl:

$$(x \ln x - x)' = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x \, ,$$

$$\left(x \arctan x - \frac{1}{2} \ln (1 + x^2)\right)' = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1 + x^2} = \arctan x \, ,$$

$$\left(\sinh x + \frac{1}{3} \sinh^3 x\right)' = \cosh x + \sinh^2 x \cosh x = \cosh x \, (1 + \sinh^2 x) = \cosh^3 x \, .$$

2. f ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und wegen $f'(x) = 1 + e^x > 0$ streng monoton wachsend, besitzt also eine differenzierbare Umkehrfunktion g auf dem Bildbereich, der wegen $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ gleich $\mathbb{R}$ ist. Überdies ist g überall differenzierbar, und per vollständiger Induktion schließt man, daß g sogar beliebig oft differenzierbar ist. Mit $f(0) = 1$ folgt $g(1) = 0$ und

$$g'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2} \, , \quad g''(1) = -\frac{1}{[\, f'(f^{-1}(1))\,]^3} \, f''(f^{-1}(1)) = -\frac{1}{8} \, .$$

Somit ist das zweite Taylor–Polynom von g an der Stelle $b = 1$ gegeben durch

$$g(b) + g'(b)(y - b) + \frac{g''(1)}{2}(y - b)^2 = \frac{y - 1}{2} - \frac{(y - 1)^2}{16} \, .$$

Nach Lagrange ist das Restglied von der Form $g''(\eta)(y - 1)^2/2$ für ein $\eta \in (1, 11/10)$. Nun ist

$$g''(\eta) = -\frac{1}{[\, f'(g(\eta))\,]^3} \, f''(g(\eta)) \, ,$$

und f, f', f'', g sind monoton wachsend auf dem fraglichen Intervall. Wegen $f(1/10) = 1/10 + e^{1/10} > 11/10$ ist $g(\eta) \le g(11/10) \le 1/10$ für $\eta \in (1, 11/10)$. Damit erhalten wir die Fehlerabschätzung

$$|\, R_2(y) \,| \le \frac{1}{2} \frac{f''(g(11/10))}{[\, f'(g(1))\,]^3} \frac{1}{10^2} \le \frac{f''(1/10)}{16 \cdot 100} \le \frac{1,11}{1600} \le 0,0007 \, .$$

3. i) Man substituiere $t = \cos x$, $dt = -\sin x \, dx$. Dann kommt sofort wegen $\arccos \pi/4 = \sqrt{2}/2$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin 2x}{\cos x + \cos^2 x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x + \cos^2 x} \, dx = \int_{\arccos \pi/4}^{1} \frac{2\, t \, dt}{t + t^2} = 2 \ln (1 + t) \, \Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} \, .$$

ii) Man substituiere $t = \sqrt{1 + x}$, $dx = 2t \, dt$. Damit ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{1 + x}} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t \, dt}{1 + t} = 2 \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) dt = 2 \left[\sqrt{2} - 1 + \ln \frac{2}{1 + \sqrt{2}}\right] .$$

iii) Hier führt $x = \sin t\,,\ dx = \cos t\,,\ \sqrt{1 - x^2} = |\cos t|$ zum Ziel. Das gesuchte Integral wird dann gleich

$$\int_0^{\pi/6} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) dt = [\tan t - t]\,\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\,.$$

4. Diese Formel ist als RIEMANNsches *Lemma* bekannt und spielt in der Theorie der Fourier–Reihen eine prominente Rolle. Da f stetig differenzierbar ist, können wir wie folgt partiell integrieren:

$$\int_a^b f(t) \sin Rt\, dt = \frac{-f(t) \cos Rt}{R}\Bigg|_a^b + \int_a^b \frac{f'(t) \cos Rt}{R}\, dt\,.$$

Der „ausintegrierte“ Anteil geht offensichtlich gegen Null wegen der Beschränktheit des Cosinus. Dies gilt aus dem gleichen Grunde und wegen $|f'(t)| \le M < \infty$ für $t \in [a, b]$ auch für den Integral–Anteil: Die Standard–Abschätzung liefert

$$\left| \int_a^b \frac{f'(t) \cos Rt}{R}\, dt \right| \le \frac{M\,|b - a|}{R} \longrightarrow 0\,.$$

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 8**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. i) Zähler und Nenner gehen gegen Null. Deshalb kann man die De L'Hospitalschen Regeln anwenden (wie auch in den nächsten 3 Beispielen). Es ist

$$\lim_{x\to 1-} \frac{\dfrac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1 - x}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1 - x}}} = 2 \lim_{x\to 1-} \frac{1}{\sqrt{1 + x}} = \sqrt{2} \, .$$

ii) $\displaystyle \lim_{x\to 1-} \sin(\pi x) \ln(1 - x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\ln(1 - x)}{\dfrac{1}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x\to 1-} \frac{\sin^2(\pi x)}{(1 - x)\,\pi \cos(\pi x)} = \frac{-1}{\pi} \lim_{x\to 1-} \frac{\sin^2(\pi x)}{1 - x} =$

$$\frac{-1}{\pi} \lim_{x\to 1-} \frac{2\pi \sin(\pi x) \cos(\pi x)}{-1} = 0 \, .$$

iii) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{b \sin bx}{\sqrt{\cos bx}} - \dfrac{a \sin ax}{\sqrt{\cos ax}}}{4\,x} = \frac{b^2 - a^2}{4} \, .$

iv) Wir haben zunächst die Funktion $f(x) := \dfrac{3}{x^2} \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ zu betrachten, da $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = e^{f(x)}$. Es ergibt sich durch mehrfache Anwendung der Formeln

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 3\, \frac{\dfrac{x}{\sin x}\, \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2\,x} = \lim_{x\to 1} 3\, \frac{x \cos x - \sin x}{2\,x^2 \sin x} =$$

$$= 3 \lim_{x\to 1} \frac{- \sin x}{2\,(x \cos x + 2 \sin x)} = 3 \lim_{x\to 1} \frac{- \cos x}{6 \cos x - 2\,x \sin x} = -\frac{1}{2} \, .$$

Der gesuchte Grenzwert ist daher gleich $e^{-1/2}$.

v) Hier führen die L'Hospitalschen Regeln ins Leere (genauer: in eine unendliche Schleife). Aber offensichtlich führt eine kleine Umformumg zu

$$\frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^0 - e^{-2x}}{e^0 + e^{-2x}} \, ,$$

und der gesuchte Grenzwert ist daher gleich 1.

vi) Der gesuchte Grenzwert ist vom „Typ“ ∞/∞; die Regeln sind daher prinzipiell anwendbar. Es ergibt sich

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \sin x}{\ln(\sinh x^3)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x \cos x + \sin x}{3\,x^2\, \dfrac{\cosh x^3}{\sinh x^3}} \, ,$$

sofern der rechts stehende Grenzwert existiert. Wegen Teil v) und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x\,\cos x\,+\,\sin x}{3\,x^2} = 0$ existiert der gesuchte Grenzwert und ist gleich Null.

2. a) Die Differenz $h := g - f$ ist Null an der Stelle a und aufgrund der Voraussetzung streng monoton wachsend und damit insbesondere größer als Null für $x > a$.

2. b) Durch Division mit $|\,x_1 - x_2\,|$ sieht man bei festgehaltenem x_2 mit $x_1 \to x_2$, daß die Funktion f auf dem abgeschlossenen Intervall $[\,a,\,b\,]$ differenzierbar ist mit $f' = 0$. Also muß f konstant sein.

3. Man beweist die Formeln durch vollständige Induktion nach $n \geq 1$. Für $n = 1$ ist einerseits

$$y' \;=\; \frac{1}{1\,+\,x^2} \;=\; \frac{1}{1\,+\,\tan^2 y} \;=\; \cos^2 y$$

und andererseits

$$\sin\,(y + \pi/2) \;=\; \cos\,y\;,$$

womit der Induktionsanfang erledigt ist. Ist die Formel

$$y^{(n)} \;=\; (n-1)!\,\sin\left(n\left(y\,+\,\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos^n y$$

nun für ein $n \geq 1$ schon gezeigt, so erhält man durch eine weitere Differentiation

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} \;&=\; n!\,y'\,\cos^{n-1} y\;[\cos\,(n(y+\pi/2))\,\cos\,y\;-\;\sin\,y\,\sin\,(n(y+\pi/2))\,] \\ &=\; n!\,\cos^2 y\,\cos^{n-1} y\,\cos\,((n+1)y + n(\pi/2)) \\ &=\; n!\,\cos^{n+1} y\,\sin\,((n+1)(y+\pi/2))\;. \end{aligned}$$

Aus den Eulerschen Formeln folgt speziell mit $x_0 = 0$ auch $y_0 = 0$ und damit

$$f^{(n)}(0) \;=\; (n-1)!\,\sin\,(n\pi/2) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}\,, \\ (-1)^{(n-1)/2}(n-1)! & \text{falls } n \text{ ungerade}\,. \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Taylor–Reihe des $\arctan$ die Gestalt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n\,+\,1}\,x^{2n+1}\;.$$

Um zu zeigen, daß diese Reihe für $|\,x\,| \leq 1$ gegen den Arcustangens konvergiert, müssen wir noch das Restglied R_{n+1} für diese Werte von x abschätzen. Nach den Eulerschen Formeln ist aber offensichtlich $|\,f^{(n+1)}\,|_\infty \leq n!$. Das Restglied in der Form von Lagrange kann dann für alle $x \in \mathbb{R}$ abgeschätzt werden durch

$$|\,R_{n+1}(x)\,| \;\leq\; \frac{n!}{(n+1)!}\,|\,x\,|^{n+1} \;=\; \frac{|\,x\,|^{n+1}}{n+1}\;.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

4. Man zeigt leicht durch vollständige Induktion nach $n \geq 0$, daß es Polynome P_n (vom Grad $3n$) gibt mit

$$f^{(n)}(x) \;=\; P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}\;,\quad x \neq 0\;.$$

Also ist die Funktion f an allen Stellen $x \neq 0$ beliebig oft differenzierbar. Noch einmal durch Induktion zeigt man dann, daß auch alle Ableitungen im Nullpunkt existieren und gleich Null sind. Ist nämlich $f^{(n)}(0) = 0$ schon gezeigt, so ist auch

$$f^{(n+1)}(0) \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f^{(n)}(x)\,-\,0}{x\,-\,0} \;=\; \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1}{x}\,P_n\left(\frac{1}{x}\right)\,e^{-1/x^2} \;=\; 0\;.$$

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 7**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Mit $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ erhält man, wie gewünscht,

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x \left(1 - 2 \sin^2 x\right) \\ &= 2 \sin x \left(1 - \sin^2 x\right) + \sin x \left(1 - 2 \sin^2 x\right) \\ &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x \, .\end{aligned}$$

Anderer Beweis: Man benutze die Eulerschen Formeln.
Setzt man in diese Beziehung $x = \pi/3$ ein, so kann man leicht $\sin \pi/3$ und daraus $\cos \pi/3$ berechnen und daraus wiederum mit den Verdoppelungsformeln auch die Werte an den Stellen $\pi/6$ und $\pi/12$. Aus reiner Freude am Rechnen machen wir es etwas anders: Wir setzen $S := \sin \pi/6$ und erhalten mit der vorigen Gleichung mit $x = \pi/6$ wegen $\sin \pi/2 = 1$ die Beziehung

$$4\,S^3 - 3\,S + 1 = 0 \, .$$

Eine offensichtliche Lösung dieser Gleichung ist $S = 1/2$. Nun ist

$$4\,S^3 - 3\,S + 1 = (S - 1/2)\,(4\,S^2 + 2\,S - 2) \, ,$$

und das rechts stehenden quadratische Polynom hat die Nullstellen $1/2$ und -1. Da aber $-1 = \sin \pi$ nicht für S in Frage kommt, ist notwendig $\sin \pi/6 = S = 1/2$ und folglich $\cos \pi/6 = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Weiter ist

$$\sin(x + \pi/4) = \sin((x - \pi/4) + \pi/2) = \cos(x - \pi/4) \, ,$$

und folglich wegen $1/4 + 1/12 = 1/3$, $1/4 - 1/12 = 1/6$ auch $\sin \pi/3 = \cos \pi/6 = \sqrt{3}/2$ und $\cos \pi/3 = 1/2$. Schließlich erhält man mit einer der Verdoppelungsformeln die Gleichung

$$1 - 2 \sin^2 \pi/12 = \cos \pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2} \, ,$$

aus der unmittelbar

$$\sin \pi/12 = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \, , \quad \cos \pi/12 = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

kommt.

2. Aus $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$ folgt $f(1) = 0$ und $0 = f(1) = f\left(x \, \dfrac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, also $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$. Hieraus ergibt sich

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + f(1/x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(\dfrac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(1 + \dfrac{h}{x}\right)}{h} \, .$$

Setzt man $h = tx$ bei festem $x > 0$, so erhält man

$$f'(x) \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{f\,(1+t)}{tx} \;=\; \frac{1}{x}\lim_{t\to 0} \frac{f\,(1+t)\;-\;f\,(1)}{t} \;=\; \frac{1}{x}\,f'(1)\;.$$

Somit ist $(f\,(x) \;-\; f'(1)\,\ln x)' \;=\; 0$ und folglich $f\,(x) \;-\; f'(1)\,\ln x \;=\; \text{const.}$. Setzt man noch $x = 1$ ein, so sieht man, daß die Differenz identisch Null sein muß. Also ist f ein skalares Vielfaches von $\ln x$. Umgekehrt erfüllen auch alle Funktionen der Gestalt $f\,(x) \;=\; c\,\ln x$ die gewünschte Funktionalgleichung.

Nachtrag: Eine einfachere (studentische) Lösung. Man differenziere die Funktionalgleichung (sagen wir: nach y), woraus sich $x\,f'\,(xy) = f'\,(y)$ für alle $x,\,y$ ergibt. Setzt man hierin noch $y = 1$, so kommt $x\,f'\,(x) = f'\,(1) =: c$, woraus alles Weitere wie oben folgt: Es ist damit notwendig $f\,(x) = c\,\ln x + C$, und durch nochmalige Anwendung der Funktionalgleichung auf z. B. $x = y = 1$ findet man $C = 0$.

Bemerkung. Man kommt auch nur mit der *Stetigkeit* der Funktion f aus, um dieselben Lösungen zu finden, wie einige Teilnehmer richtig bemerkt und bewiesen haben. Dies war in der Aufgabe aber nicht verlangt, zumal es mir gerade um die Verwendung der Sätze aus der *Differentialrechnung* ging. Ich widerstehe daher der Versuchung, die Lösung des allgemeineren Problems hier vorzustellen.

3. Die angegebene Formel ist offensichtlich im Punkte $x = a$ richtig. Wir können uns daher auf den Fall $a < x$ beschränken und folgen dem Hinweis, wie in der Vorlesung, bei fixiertem x mit den Funktionen $G\,(t)$ und $g\,(t)$ mit $t \in [\,a,\,x\,]$. Die Funktion $g\,(t)$ besitzt in dem fraglichen Intervall die Ableitung $g'(t) = -p(x \,-\, t)^{p-1}$ und ist damit auf jeden Fall von Null verschieden für $a < t < x$. Somit können wir tatsächlich den zweiten Mittelwertsatz anwenden. Leichte Rechnungen ergeben $G\,(x) = g\,(x) = 0$ und

$$G\,(a) \;=\; f\,(x) \;-\; \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x \,-\, a)^j\;, \quad g\,(a) \;=\; (x \,-\, a)^p\;.$$

Ferner berechnet man unmittelbar wie in der Vorlesung

$$G'(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}\,j\,(x \,-\, t)^{j-1} \;-\; \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}\,(x \,-\, t)^j \;=\; -\,\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x \,-\, t)^n\;.$$

Somit gibt es nach dem zweiten Mittelwertsatz ein ξ zwischen a und x, so daß

$$\frac{f\,(x) \;-\; \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}\,(x \,-\, a)^j}{(x \,-\, a)^p} \;=\; \frac{\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\,(x \,-\, \xi)^n}{p\,(x \,-\, \xi)^{p-1}}\;.$$

Schreibt man ξ in der Form $a \;+\; \vartheta\,(x \;-\; a)$ mit einem geeigneten $\vartheta \;\in\; (\,0,\,1\,)$, so ist $x \;-\; \xi \;=\; (1 \;-\; \vartheta)\,(x \;-\; a)$, und die Behauptung ergibt sich sofort aus der vorstehenden Identität.

4. Die Lösung findet man in Oskar Perron: *Die Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf*, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1929, 341–343. (Siehe auch vom selben Autor *Eine neue Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf*, ibid., Jahrgang 1933, 439–445).
Mit Hilfe der Zeichnung und mit dem Sinussatz erhält man sofort

$$\frac{\sin\,(x/2 \;-\; y)}{\sin\,y} \;=\; \frac{\sqrt{3} \;-\; 1}{\sqrt{2}}\;,$$

woraus sich mit dem Additionstheorem für den Sinus sofort

$$\cot\, y \;=\; \frac{\sqrt{3}\,-\,1\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(x/2)}{\sqrt{2}\,\sin\,(x/2)}$$

und damit

$$y \;=\; \arctan\,\frac{\sqrt{2}\,\sin\,(x/2)}{\sqrt{3}\,-\,1\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(x/2)}$$

ergibt. Der absolute Fehler ist dann

$$f\,(x) \;=\; \frac{x}{3}\,-\,y\;.$$

Man stellt sofort fest, daß $f\,(0) = 0$ und (durch Inspektion der Zeichnung) auch $f\,(\pi/2) = 0$ (oder durch Nachrechnen: Für $x = \pi/2$ ist

$$\tan\, y \;=\; \frac{\sqrt{2}\,\sin\,(\pi/4)}{\sqrt{3}\,-\,1\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(\pi/4)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad \text{da} \quad \sin\,(\pi/4) \;=\; \cos\,(\pi/4) \;=\; \frac{1}{2}\,\sqrt{2}\,,$$

und damit $y = \pi/6$, da $\sin\,(\pi/6) = 1/2$, $\cos\,(\pi/6) = \sqrt{3}/2$).
Durch Differenzieren dieser Beziehung findet man unmittelbar (indem man noch mit $\sqrt{3}+1$ erweitert):

$$f'\,(x) \;=\; -\,\frac{1}{3}\;-\;\frac{\sqrt{3}\,+\,1\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(x/2)}{4\,(\sqrt{3}\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(x/2))}\;.$$

Durch nochmaliges Differenzieren kommt

$$f''(x) \;=\; \frac{-\,\sin\,(x/2)}{4\,\sqrt{2}\,(\sqrt{3}\,+\,\sqrt{2}\,\cos\,(x/2))^2} \;<\; 0\,, \quad 0 < x \le \pi/2\,;$$

so daß die Fehlerfunktion streng konkav und insbesondere im Inneren des Definitionsintervalls stets positiv, d. h. der Kopfsche Winkel stets zu klein ist. Des weiteren muß die Ableitung der Fehlerfunktion zuerst streng monoton steigen und dann nach Annahme ihres Maximums wieder streng monoton fallen. Die Extremalstelle ξ berechnet sich aus der Ableitungsformel sofort implizit zu

$$\cos\,\frac{\xi}{2} \;=\; \frac{3\,-\,\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,, \quad \text{also} \quad \cos\,\xi \;=\; 11\,-\,6\,\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \sin\,\frac{\xi}{2} \;=\; \sqrt{3\,\sqrt{3}\,-\,5}\;.$$

Der <u>maximale</u> Fehler kann damit völlig explizit angegeben werden in der Form

$$M \;:=\; f_{\max} \;=\; \frac{1}{3}\,\arccos\,(11\,-\,6\,\sqrt{3})\;-\;\arctan\,\sqrt{\frac{3\,\sqrt{3}\,-\,5}{2}}\;.$$

Mit einer sehr guten trigonometrischen Tafel findet man die entsprechenden Winkel zu

$$\xi \;=\; 52^\circ\,34'\,37'' \quad \text{und} \quad \eta \;=\; 17^\circ\,23'\,20{,}6''\,,$$

so daß der maximale Fehler in etwa $0^\circ\,8'\,12''$ beträgt. Nimmt man zusätzlich an, daß der vorgegebene Winkel größer als 45° ist, was man ja immer durch Verdoppelung und anschließende Halbierung erreichen kann, so ist der <u>relative</u> Fehler in grober Abschätzung maximal in etwa gleich

$$\frac{8{,}2}{60\cdot 15} \;=\; 0{,}91111\ldots\,\%\;.$$

Die letzte Argumentation ist nicht sehr befriedigend. Eine exakte (aber gröbere, nämlich ca. doppelt so große) Abschätzung kann man leicht wie folgt gewinnen: Da der Arcuscosinus eine konkave Funktion ist, liegt er im Intervall von $1/2$ bis $\sqrt{3}/2$ oberhalb der Sekante

$$y \;=\; \frac{\sqrt{3}\,+\,9}{24}\,\pi\;-\;\frac{\sqrt{3}\,+\,1}{12}\,\pi\,x\;.$$

Nun ist offensichtlich $1/2 < 11 - 6\sqrt{3} < \sqrt{3}/2$. Hiermit berechnet man

$$\arccos \xi \;\geq\; \pi \,\frac{23 \;-\; 9\sqrt{3}}{24}$$

und damit

$$M \;\leq\; \frac{\pi}{2}\,\frac{136 \;-\; 78\sqrt{3}}{12 \cdot 24}\;.$$

Der letzte Ausdruck ist mit Sicherheit kleiner oder gleich $0^\circ\, 16'\, 53''$.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 6**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. a) Es ist

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\,\ln(\ln x) &= \frac{1}{x\,\ln x} && , \quad x > 1\,,\\
\frac{d}{dx}\,\left(1+x^2\right)^{\sin x} &= \left(1+x^2\right)^{\sin x}\left(\frac{2\,x\,\sin x}{1+x^2} + \ln\left(1+x^2\right)\cdot\cos x\right) && , \quad x\in\mathbb{R}\,,\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2} &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2} 2\,x\left(\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{x}{1-x^2}\right) && , \quad |\,x\,| < 1\,,\\
\frac{d}{dx}\,\frac{\sqrt{x}\,\sin x}{\ln x} &= \frac{(2\,x\,\cos x + \sin x)\,\ln x - 2\,\sin x}{2\,\sqrt{x}\,(\ln x)^2} && , \quad x > 0\,,\ x \neq 1\,,\\
\frac{d}{dx}\,\sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}} &= \frac{\cos\sqrt{x}}{4\,\sqrt{x}}\,\sqrt{e^{\sin\sqrt{x}}} && , \quad x > 0\,.
\end{aligned}$$

Im dritten Fall ist z. B.

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2\,\ln\frac{1+x}{1-x}\right)\,,$$

woraus das Ergebnis unter mehrfacher Benutzung der Produkt– und Kettenregel abgelesen werden kann, wenn man noch

$$\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2\,\dfrac{1+x}{1-x}} = \frac{2}{1-x^2}$$

berücksichtigt.

b) Es ist $f'(x) = (x^2+2x)e^x$, $f''(x) = (x^2+4x+2)e^x$, $f^{(1000)}(x) = (x^2+2000x+999000)e^x$. Für die letzte Aussage benutzt man selbstverständlich Aufgabe 1 in Blatt 5.

2. Es bezeichne x den horizontalen Abstand des Schiffsorts von dem Fußpunkt der Mole. Wenn wir uns (zunächst) auf *positive* x beschränken, so ist der Blickwinkel BW (absolut gemessen) auszudrücken in der Gestalt

$$\mathrm{BW}\,(\mathrm{x}) = \arctan\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{x}} - \arctan\frac{\mathrm{A}-\mathrm{L}}{\mathrm{x}}\,.$$

Diese Formel ist auch korrekt, wenn $A \le L$. Ist x negativ, so ist dieser Ausdruck stets negativ, also als *orientierter* Winkel zu interpretieren. Um die „Katastrophen" zu verstehen, die bei $x \to 0$ und $A \le L$ geschehen, ist es überaus sinnvoll, dies als korrekte Definition zu akzeptieren. Allerdings muß man dann im negativen Bereich nach *Minima* von BW suchen (was aber wegen $\mathrm{BW}\,(-\mathrm{x}) = -\mathrm{BW}\,(\mathrm{x})$ gerade die Negativen der Maxima im positiven Bereich sind).

Kehren wir nun zu dem Fall $x > 0$ und $A > L$ zurück. Da die Arcustangensfunktion für $x \to \infty$ nach $\pi/2$ strebt und im Nullpunkt stetig mit dem Wert 0 ist, ergeben sich, was anschaulich ohnehin klar ist, die (uneigentlichen) Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{BW}\,(\mathrm{x}) = 0\,, \quad \lim_{\mathrm{x}\to\infty}\mathrm{BW}\,(\mathrm{x}) = 0\,.$$

Somit ist die Funktion BW nach ganz $\mathbb{R}$ stetig fortsetzbar, und da sie auf $\mathbb{R}_+^*$ positiv ist, muß sie wegen der zweiten Grenzwertaussage dort ein Maximum annehmen. Wenn es nun nur genau eine Stelle in diesem Intervall gibt, an der die Ableitung der Funktion verschwindet, so muß dort das (absolute) Maximum vorliegen. Dies ist aber der Fall, da (wegen $\arctan'(x) = (1+x^2)^{-1}$)

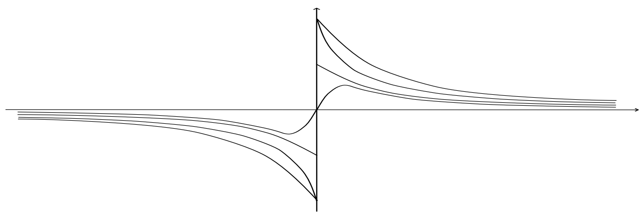
$$\mathrm{BW}'(x) \;=\; \frac{A\,-\,L}{x^2\,+\,(A\,-\,L)^2} - \frac{A}{x^2\,+\,A^2}$$

nur an den Stellen mit $x^2 = A\,(A-L)$ verschwindet, und davon gibt es nur eine im positiven Bereich, nämlich $x_{\max} = \sqrt{A(A-L)}$.

Geht nun A gegen L, so konvergiert $x_{\max}$ gegen Null, und dies ist durchaus der richtige Wert. Denn bei diesem Kurs schrammt der Pott haarscharf an der Katastrophe vorbei. Der Blickwinkel wächst stetig von (fast) Null auf $\pi/2$, und wenn der Kapitän sich nach der Beihnahe–Katastrophe von seinem Schrecken erholt hat, muß er sich umdrehen, um die Mole im (absoluten) Winkel von $\pi/2$ (und Gott sei Dank Schiff und Mole intakt) zu sehen. Mißt er aber den Winkel mit Vorzeichen, indem er sich stets von der Spitze der Mole zu ihrem Fußpunkt orientiert, so sieht er die Mole jetzt in der Tat mit dem orientierten Winkel $-\pi/2$.

Ist schließlich $A < L$, so kommt es tatsächlich zum Zusammenstoß. Hierbei wächst der Blickwinkel von (fast) Null auf π bei $x_{\max} = 0$, und wenn der Kapitän nach der Katastrophe noch in der Lage ist, mathematisch zu denken, so sieht er die (etwas demolierte) Mole nunmehr unter dem (orientierten) Winkel $-\pi$.

Bemerkung. Man stellt bei den obigen Betrachtungen schnell fest, daß es im Wesentlichen nur auf das Verhältnis $\ell := L/A$ ankommt, wir also ohne Einschränkung $A = 1$ setzen und die Molenlänge ℓ als variabel ansehen können. Dann hängt die Funktion BW auch noch von dem Parameter ℓ ab, und das folgende Schaubild gibt alle Möglichkeiten zweifelsfrei wider.



Fliegt man dagegen in einem Flugzeug in positiver Höhe H , so können die oben geschilderten „Katastrophenfälle“ nicht eintreten. Dies wird auch mathematisch deutlich an der Blickwinkelfunktion, die jetzt die Gestalt

$$\mathrm{BW}\,(\sqrt{x^2\,+\,H^2})$$

erhält. Ist nun $H \geq x_{\max}$, also $H^2 \geq A\,(A-L)$, so nimmt die neue Funktion ihr Maximum im Nullpunkt an, da BW (x) im Intervall $H \leq x < \infty$ streng monoton fällt. Ist dagegen $H < x_{\max}$, also $H^2 < A\,(A-L)$, was insbesondere nur für $A > L$ möglich ist, so hat man Maxima an den Stellen x_0 mit $x_0^2 + H^2 = x_{\max}^2$, also bei $x_0 := \pm\sqrt{A(A-L) - H^2}$ (und ein lokales Minimum bei 0). Man kann leicht nachrechnen, daß $\mathrm{BW}\,(\sqrt{x^2\,+\,H^2})$ tatsächlich genau einen Punkt, nämlich 0 , bzw. drei Punkte, nämlich $0,\ \pm x_0$, besitzt, an der die Ableitung verschwindet.

3. Aus der binomischen Formel

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

gewinnt man durch Differentiation die Beziehung

$$n\,(1 + x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Durch Einsetzen von $x = \pm 1$ ergeben sich hieraus die ersten beiden Formeln. Die letzte ergibt sich durch nochmalige Differentiation.

4. Die Tangente an den Graphen von f im Punkte $(\xi, \eta) = (\xi, f(\xi))$ besitzt die Gleichung

$$y = f(\xi) + (\tau - \xi)\, f'(\xi)\,,$$

in unserem konkreten Fall also

$$y = \xi\, e^{\xi} + (\xi + 1)\, e^{\xi}\, (\tau - \xi)\,.$$

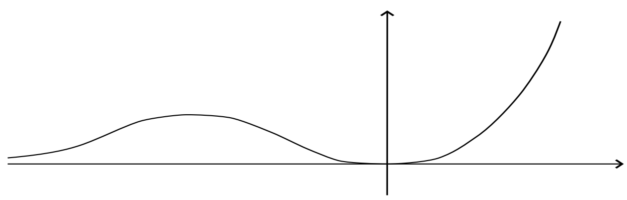
Diese soll durch den Punkt $(0, t)$ gehen. Wir suchen also diejenigen $t \in \mathbb{R}$, für welche die Gleichung

$$t = -g(\xi)\,, \quad g(\xi) := \xi^2\, e^{\xi}$$

keine, eine, zwei bzw. drei Lösungen besitzt. Da die Funktion g positiv ist, tritt der erste Fall mit Sicherheit für $t \geq 0$ auf. Auf der anderen Seite ist (wir ersetzen ξ durch x):

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0\,, \quad g(0) = 0\,, \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty\,.$$

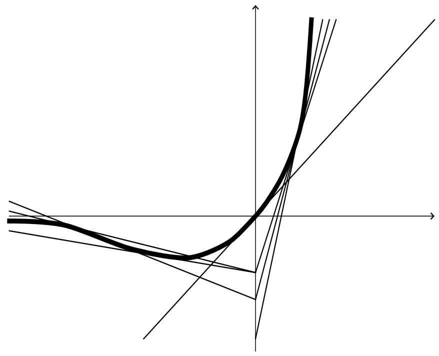
Damit gibt es stets mindestens eine Tangente, wenn $t < 0$. Eine genauere Untersuchung des Verlaufs der Funktion g ergibt das folgende qualitative Bild



Eine genaue Bestimmung des lokalen Maximums von g auf der negativen Achse (die Berechnung der Ableitung führt zu der Stelle $\xi = -2$ und damit zu dem maximalen Wert $4\,e^{-2}$) liefert dann das endgültige Ergebnis:

Intervall	Anzahl der Tangenten
$t > 0$	0
$t = 0$	1
$-4e^{-2} < t < 0$	3
$t = -4e^{-2}$	2
$t < -4e^{-2}$	1

Im folgenden soll eine Skizze dieses Ergebnis illustrieren.



Nachtrag zu Blatt 4, Aufgabe 4. In der früher vorgestellten Lösung ist die Existenz des linksseitigen Grenzwertes

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) \le f(\xi)\,, \quad \xi \in I\,,$$

nicht ausreichend begründet worden. Man kann die fehlenden Argumente leicht vervollständigen (siehe z. B. Kö 7. 8., Satz auf p. 98). Man setze dazu S für das *Supremum*

$$\sup_{x<\xi} f(x)\,,$$

das nun tatsächlich wegen der früher angegebenen Argumente existiert, wenn ξ nicht der linke Endpunkt des Definitionsintervalls von f ist. Ist nun (x_j) eine von links gegen ξ konvergente Folge, so gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $x < \xi$ mit $f(x) > S - \varepsilon$ und ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_j \ge x$ für alle $j > N$. Für diese j ist dann

$$S - \varepsilon < f(x) \le f(x_j) \le S < S + \varepsilon\,,$$

also $\lim_{j\to\infty} f(x_j) = S$.
Bei dem Beweis der Aussage der Aufgabe können wir die beiden eventuell vorhandenen (zwei, also endlich vielen !) Endpunkte des Definitionsintervalls sowieso getrost außer Acht lassen, und erhalten damit genauer für die <u>verbleibenden</u> $\xi \in I$ die Existenz und Abschätzung von

$$\sup_{x<\xi} f(x) \le f(\xi) \le \inf_{x>\xi} f(x)\,.$$

Es genügt nun zeigen, daß an einer *Unstetigkeitsstelle* ξ die beiden rechts und links stehenden Schranken nicht übereinstimmen. Der Rest der Argumente verläuft dann genau wie früher. Es sei also f an der Stelle ξ <u>nicht</u> (folgen–) stetig. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine gegen ξ konvergente Folge von Elementen $x_n \in I$, so daß

$$|\, f(x_n) - f(\xi)\,| \ge \varepsilon_0\,.$$

Da offensichtlich dann nicht fast alle x_n gleich ξ sein können, ist es möglich, eine unendliche Teilfolge auszuwählen, deren Glieder alle kleiner oder alle größer als ξ sind. Der Einfachheit bezeichnen wir die Folge wieder mit x_n und nehmen ohne Einschränkung an, daß alle x_n <u>größer</u> als ξ sind. Dann gilt auf jeden Fall

$$f(x_n) \ge f(\xi) + \varepsilon_0\,.$$

Für ein beliebiges $x > \xi$ gibt es dann aber ein x_N mit $\xi < x_N \le x$, und wegen der Monotonie der Funktion f führt dies zu

$$f(x) \ge f(x_N) \ge f(\xi) + \varepsilon_0\,,$$

woraus sich sofort, wie gewünscht,

$$\sup_{x<\xi} f(x) \le f(\xi) < f(\xi) + \varepsilon_0 \le \inf_{x>\xi} f(x)$$

ergibt.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 5**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Durch mehrfache Anwendung der Formel $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$ gewinnt man die Einsicht, daß die in Frage stehende Menge $\mathcal{C}^n(I,\, \mathbb{R})$ ein Untervektorraum der kommutativen Algebra $\mathrm{Abb}\,(I,\, \mathbb{R})$ ist. Das Einselement $f\,(x) \equiv 1$ ist in $\mathcal{C}^n(I,\, \mathbb{R})$ enthalten. Daß sogar eine (Unter–) *Algebra* vorliegt, bedeutet, daß das Produkt zweier n–mal stetig differenzierbaren Funktionen wieder n–mal stetig differenzierbar ist. Dies folgt aus allgemeinen Sätzen, sofern die angegebene Verallgemeinerung der Produktregel bewiesen ist. Hierzu benutzen wir vollständige Induktion nach n; der Beweis verläuft dann völlig analog wie im Falle der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)^{[n+1]} &= \left((f \cdot g)^{[n]}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} g^{[n-k]}\right)' \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{[k]} g^{[n+1-k]} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} g^{[n+1-k]} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{[k]} g^{[(n+1)-k]}\ .\end{aligned}$$

2. Außerhalb des Ursprungs sind die beiden gegebenen Funktionen stetig differenzierbar, wie man leicht mit Hilfe von Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel verifiziert. Die Funktion $g\,(x) = 1/x$ besitzt danach die Ableitung $g'(x) = -1/x^2$, und daraus ergibt sich sofort

$$f_1'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ,\quad f_2'(x) = 2\,x\,\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

an allen Stellen $x \neq 0$. Für f_1 ist der Differenzenquotient an der Stelle 0 gleich $\sin\,(1/x)$, und dieser läßt sich nicht stetig nach 0 fortsetzen; also ist f_1 an der Stelle 0 nicht differenzierbar. Im Falle f_2 führt die gleiche Überlegung zu der Erkenntnis, daß die Funktion im Ursprung die Ableitung $f_2'(0) = 0$ besitzt. f_2 kann aber im Nullpunkt nicht *stetig* differenzierbar sein, denn wegen

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

müßte dann auch

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

sein, was aus dem gleichen Grunde wie beim Sinus nicht richtig ist.

3. Wir setzen allgemein an: $P_n(x) := a_n\,x^2 + b_n$ und wollen erreichen, daß $P_n(\pm 1/n) = 1/n$ und $P_n'(\pm 1/n) = \pm 1$, $n \geq 1$. Dies liefert die Gleichungen $a_n + n^2 b_n = n$ und $2a_n = n$. Wir definieren daher

$$f_n(x) := \begin{cases} \;|\,x\,| & ,\quad |\,x\,| \geq \dfrac{1}{n}\,, \\[2ex] \dfrac{n}{2}x^2 + \dfrac{1}{2n} & ,\quad |\,x\,| \leq \dfrac{1}{n}\ . \end{cases}$$

Man überzeugt sich sofort davon, daß diese Funktionen einmal stetig differenzierbar sind und ihre Folge punktweise gegen die Funktion $f(x) = |x|$ konvergiert. Bzgl. gleichmäßiger Konvergenz brauchen wir nur die Differenz $f - f_n$ auf dem Intervall $[0, 1/n]$ zu betrachten (denn die Funktionen $f - f_n$ sind gerade und gleich Null, wenn $|x| \geq 1/n$). In dem fraglichen Intervall ist aber

$$f_n(x) - f(x) = \frac{n}{2}\left(x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{n}\right)^2$$

und folglich $|f - f_n|_\infty = 1/n$.

4. Die Funktionen γ_1 und γ_2 werden durch normal konvergente Reihen definiert und sind folglich nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz gleichmäßig konvergent. Insbesondere sind sie stetig. Wir stellen nun jeden beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in I^2$ koordinatenweise als Dualbruch dar:

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} 2^{-n} \quad \text{und} \quad y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} 2^{-n}$$

mit $a_n \in \{0, 1\}$. Dann ist die Reihe

$$t_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\,a_k}{3^{k+1}}$$

konvergent mit $f(3^n t_0) = a_n$ und $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 4**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Wir legen um den Großkreis/Äquator eine Schnur der Länge $2L$ und ordnen jedem Punkt auf dieser Schnur den entsprechenden Temperaturwert zu. Dies liefert eine (nach Voraussetzung stetige) Funktion $T : [\,0,\, 2L\,] \to \mathbb{R}$ mit der zusätzlichen Bedingung, daß am Anfangs– und Endpunkt die Werte übereinstimmen: $T(0) = T(2L)$. Diametral gegenüberliegenden Punkten auf dem Großkreis entsprechen Punktepaare $x,\, x + L$ mit $0 \le x \le L$. Die Aussage der Aufgabe läßt sich nun so umformulieren, daß die Funktion

$$f(x) := T(x) - T(x + L)$$

auf dem Intervall $[\,0,\, L\,]$ eine Nullstelle besitzt. Dies folgt aber sofort aus dem Zwischenwertsatz, da $f(0) = T(0) - T(L) = T(2L) - T(L) = -f(L)$.

2. Es ist sinnvoll, die Aufgabe in anderer Reihenfolge zu bearbeiten. Teil b) folgt unmittelbar aus der Dreiecksungleichung nach unten:

$$\big|\, |\,f(x)\,| - |\,f(a)\,|\, \big| \le |\,f(x) - f(a)\,|\,.$$

Der erste Teil ergibt sich daraus wegen

$$f^{+} = \frac{1}{2}\,(f + |\,f\,|)\ .$$

Definiert man noch $f^{-} := (-f)^{+}$, so ist auch diese Funktion stetig und nicht negativ, und offensichtlich ist $f = f^{+} - f^{-}$ (und $|\,f\,| = f^{+} + f^{-}$). Schließlich ist

$$\max(f,\, g) = \frac{1}{2}\,(f + g + |\,f - g\,|) \quad \text{und} \quad \min(f,\, g) = -\max(-f,\, -g)\ .$$

3. Jedes Intervall I ist, wie in der Vorlesung gezeigt wurde (siehe auch Ms. Satz 13.12), die abzählbare Vereinigung von einer aufsteigenden Folge von kompakten Intervallen $I_j := [a_j,\, b_j] \subset I_{j+1} \subset I$:

$$I = \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j\ .$$

Wir können zusätzlich ohne Einschränkung annehmen, daß I (und jedes I_j) mindestens zwei Punkte enthält. Es genügt dann zu zeigen, daß die Einschränkung von f auf jedes Intervall I_j streng monoton ist; denn aus $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ folgt, daß f auf jedem Intervall I_j monoton wächst (bzw. fällt), wenn dies auf I_0 richtig ist, und daraus folgt sofort die strenge Monotonie auf ganz I.
Mit anderen Worten: Wir können uns auf den Fall beschränken, daß $I = [\,a,\, b\,]$ mit $a < b$ gilt. Wegen der Injektivität von f ist ferner $f(a) \ne f(b)$, und wir nehmen ohne Einschränkung an, daß $f(a) < f(b)$. Wir werden zeigen, daß dann f streng monoton wächst. Es seien also $a \le x_1 < x_2 \le b$ vorgegeben. Wäre nun $f(x_1) > f(x_2)$, so müßte nach dem im Aufgabentext erwähnten Lemma (angewandt auf $-f$) auch $f(x_2) \ge f(b)$ folgen. Ganz entsprechend schließt man auf $f(a) \ge f(x_1)$. Insgesamt wäre also $f(a) > f(b)$ im Gegensatz zu unserer Annahme. Also ist stets $f(x_1) \le f(x_2)$

und damit wegen der Injektivität von f auch $f(x_1) < f(x_2)$.

4. Für $\xi \in I$ existiert der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) \le f(\xi) ,$$

da die Funktion f monoton wächst und damit auf der Menge $x \le \xi$ nach oben durch $f(\xi)$ beschränkt ist. (Für $\xi = a$ setzen wir diesen Grenzwert gleich $f(a)$). Aus denselben Gründen existiert auch der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) \ge f(\xi) .$$

ξ ist genau dann eine Stetigkeitsstelle, wenn beide Grenzwerte übereinstimmen. Im anderen Fall ist

$$\lim_{x \nearrow \xi} f(x) < \lim_{x \searrow \xi} f(x) ,$$

und es gibt eine rationale Zahl r_ξ, die echt zwischen diesen beiden Grenzwerten liegt. Ist $\xi' > \xi$ eine weitere Unstetigkeitsstelle, so ist - wieder wegen der Monotonie -

$$\lim_{x \searrow \xi} f(x) \le \lim_{x \nearrow \xi'} f(x) .$$

Infolgedessen ist die rationale Zahl $r_{\xi'}$ von r_ξ verschieden, und die Abbildung $\xi \mapsto r_\xi \in \mathbb{Q}$ ist injektiv. Also ist die Menge der Unstetigkeitsstellen gleichmächtig zu einer Teilmenge der abzählbar unendlichen Menge $\mathbb{Q}$ und damit höchstens abzählbar (siehe Ms. Satz 3.9).

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 2/3**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. Gleichmäßige Konvergenz impliziert immer die punktweise Konvergenz. Es braucht daher nur die umgekehrte Richtung untersucht zu werden. Die Folge der $f_n \in \mathrm{Abb}\,(X,\, Y)$ ist genau dann gegen die Grenzabbildung f *punktweise* konvergent, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_x = N\,(x,\, \varepsilon)$ gibt, so daß

$$d_Y(f_n(x),\, f\,(x)) \,<\, \varepsilon \quad \text{gilt für alle} \quad n \geq N_x \, .$$

Ist X endlich, so kann man zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ die natürliche Zahl $N := \max_{x \in X} N_x$ wählen und erhält

$$d_Y(f_n(x),\, f\,(x)) \,<\, \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N \quad \text{und alle} \quad x \in X \, .$$

Dies ist aber gerade die Definition der *gleichmäßigen* Konvergenz.

Für den zweiten Teil der Aufgabe (und auch für Aufgabe 3) ist es sinnvoll, die letzte Definition zu negieren: Die Folge (f_n) ist <u>nicht</u> gleichmäßig gegen f konvergent, wenn es ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß es zu jedem N ein $n \geq N$ und ein $x_n \in X$ gibt mit $d_Y(f_n(x_n),\, f\,(x_n)) \,\geq\, \varepsilon_0$.

Ist nun X abzählbar unendlich, also ohne Einschränkung $X = \mathbb{N}$, so wähle man z. B. für $f_n : X \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f_n(j) \,:=\, \frac{j}{n+1} \,, \quad j \in \mathbb{N} \, .$$

Diese Abbildungsfolge ist punktweise konvergent gegen die Nullfunktion $f\,(j) = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Wäre die Folge der f_n gleichmäßig konvergent, so müßte sie auch punktweise konvergieren, der Limes bzgl. der Supremumsnorm also gleich der Nullfunktion sein. Dies ist aber nicht der Fall; denn wählt man $\varepsilon_0 = 1$, so gibt es zu jedem N ein $n \geq N$ und ein j_n, so daß $|\, f_n(j_n) - f\,(j_n)\,| = f_n(j_n) = j_n/(n+1) \geq 1$, nämlich $n := N$ und $j_n := n+1$.

Selbstverständlich kann man hier auch direkt mit der Supremumspseudonorm argumentieren: Wäre die Folge f_n gleichmäßig konvergent gegen die Nullfunktion, so müßte die Folge $\|\, f_n \,\|_X$ der Supremumspseudonormen gegen Null konvergieren, was aber nicht richtig ist, da die Werte alle gleich Unendlich sind.

2. Man setze $P_n(x) := x - x^{n+1}/(n+1)$. Wegen

$$\sup_{x \in I} |\, P_n(x) \,-\, x \,| \,=\, \frac{1}{n+1}$$

ist diese Folge auf I gleichmäßig konvergent gegen $f\,(x) = x$. Die Ableitungsfolge $P_n'(x) = 1 - x^n$ konvergiert aber nur für $0 \leq x < 1$ gegen $f'(x) = 1$.

3. Die Funktionenfolge f_n ist an den Stellen $x = 0, 1$ trivialerweise und an den Stellen $0 < x < 1$ wegen $\lim_{n\to\infty} na^n = 0$ für $|\,a\,| < 1$ gegen 0 konvergent. Die Grenzfunktion $f \equiv 0$ ist also stetig. Dennoch konvergiert die Folge (f_n) *nicht gleichmäßig* gegen f! Dies sieht man wie im zweiten Teil von Aufgabe 1. Man betrachte zu jedem $n \in \mathbb{N}$ die Stelle $x_n := 1/(n+1) \in I$. Man berechnet dann sofort

$$f_n(x_n) \;=\; \frac{n}{n+1}\left(1 \,-\, \frac{1}{n+1}\right)^n \;=\; \left(1 \,-\, \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} ,$$

und die rechte Seite konvergiert gegen e^{-1}. Setzt man dann $\varepsilon_0 := (2e)^{-1}$, so ist $f_n\,(x_n) \ge \varepsilon_0$ für fast alle n. Damit kann die Folge (f_n) auf I nicht gleichmäßig gegen Null konvergieren.

4. Es ist $\sin z = \sum_n b_n\, z^n$ und $\cos z = \sum_n c_n\, z^n$ mit $b_0 = b_2 = b_4 = \cdots = c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ und $b_{2n+1} = (-1)^n/(2n+1)!\,,\ c_{2n} = (-1)^n/(2n)!$. Wegen $\sin(-z) = -\sin z\,,\ \cos(-z) = \cos z$ ist auch $\tan$ eine ungerade Funktion: $\tan(-z) = -\tan z$, und damit $a_0 = a_2 = \cdots = 0$. Wir brauchen daher nur die Koeffizienten $a_1,\, a_3,\, a_5,\, a_7$ zu bestimmen. Diese gewinnt man aus den Rekursionsgleichungen, die man mit Hilfe der Beziehung $\tan \cdot \cos = \sin$ aus den Formeln für das Cauchy–Produkt gewinnt: $a_1c_0 = b_1\,,\ a_3c_0 + a_1c_2 = b_3\,,\ a_5c_0 + a_3c_2 + a_1c_4 = b_5\,,\ a_7c_0 + a_5c_2 + a_3c_4 + a_1c_6 = b_7$. Man bekommt auf diese Weise sehr einfach (sogar noch einen Schritt weiter)

$$\tan z \;=\; z \,+\, \frac{1}{3}\,z^3 \,+\, \frac{2}{15}\,z^5 \,+\, \frac{17}{315}\,z^7 \,+\, \frac{62}{2835}\,z^9 \,+\cdots .$$

(Zu dem Zusammenhang dieser Koeffizienten mit den Bernoulli–*Zahlen* siehe z. B. das Manuskript).

5. Es sei $\mathrm{Abb}^{\mathrm{b}}(X,\,V)$ die Menge der *beschränkten* Abbildungen $f : X \to V$, also der Abbildungen, für die es ein $R \in \mathbb{R}_+$ gibt mit $\|\,f\,(x)\,\| \le R$ für alle $x \in X$. Dann ist auch $\|\,f\,\|_X := \sup_{x\in X} \|\,f\,(x)\,\| \le R < \infty$, und die Endlichkeit der „Supremums(pseudo)norm“ der Funktion f ist gleichbedeutend mit ihrer Beschränktheit. Genau wie in der Vorlesung zeigt man $\|\,f + g\,\|_X \le \|\,f\,\|_X + \|\,g\,\|_X$, so daß mit f und g auch die Summe $f + g$ beschränkt ist. Noch einfacher ist der Nachweis, daß mit f auch af für jede Konstante a beschränkt ist. Hieraus folgt unmittelbar, daß $\mathrm{Abb}^{\mathrm{b}}(X,\,V)$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}\,(X,\,V)$ ist, auf dem die Pseudonorm $\|\cdot\|_X$ eine *Norm* induziert. Es bleibt noch zu zeigen, daß dieser normierte Vektorraum *vollständig* ist. Nach der Vorlesung gibt es aber zu jeder Cauchy–Folge (f_n) in $\mathrm{Abb}^{\mathrm{b}}(X,\,V)$ eine Grenzfunktion $f \in \mathrm{Abb}\,(X,\,V)$, gegen die diese Folge gleichmäßig konvergiert. Es ist dann nur noch zu begründen, daß die Grenzfunktion f *beschränkt* ist. Nun ist aber $\|\,f - f_N\,\|_X \le 1$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ und $\|\,f_N\,\|_X \le R_N$. Also ist, wie gewünscht, $\|\,f\,\|_X \le R := R_N + 1$.

6. Nach Voraussetzung ist an jeder Stelle $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ der Funktionswerte eine monoton fallende Nullfolge. Wegen des Leibniz–Kriteriums ist die vorgegebene Reihe also punktweise konvergent. Wir setzen $F\,(x) := \lim_{m\to\infty} F_m(x)$ mit den Partialsummen $F_m(x)$ der Reihe $\sum_n (-1)^n f_n$. Wir wissen weiter, daß für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\,F\,(x) \,-\, F_m(x)\,| \;\le\; f_{m+1}(x)\;.$$

Damit ist

$$\sup_{x\in X}\,|\,F\,(x) \,-\, F_m(x)\,| \;\le\; \sup_{x\in X} f_{m+1}(x)\;,$$

und nach Voraussetzung ist die rechte Seite bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ kleiner als ε für alle $m \ge M = M\,(\varepsilon)$.

Übungen zur Vorlesung
Analysis II

O. Riemenschneider

Sommersemester 2003 **Blatt 1**

Lösungen (ohne Gewähr)

1. a) Es ist

$$\frac{(n+1)!}{a^{(n+1)^2}}\,\frac{a^{n^2}}{n!} = \frac{n+1}{a^{2n+1}}\,,$$

und wegen $a > 1$ konvergiert der rechte Quotient gegen 0. Damit ist die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergent.

b) Die Reihe ist gleich $2\sum_{n=0}^{\infty}(2n)^5\,(5z)^{2n}$. Das Quotientenkriterium liefert sofort den Konvergenzradius $R = 1/5$.

c) Wegen $\sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to e$ ist der Konvergenzradius gleich $1/e$.

d) Das Quotientenkriterium liefert $R = 1/4$.

e) Hier benutzt man am besten wieder das Wurzelkriterium. Wegen $\sqrt[n]{b^{\sqrt{n}}} = b^{1/\sqrt{n}} \to 1$ ist der Konvergenzradius gleich 1.

2. a) Indem man Zähler und Nenner durch $x - 1$ dividiert, gewinnt man für $x \neq 1$ die Identität

$$\frac{x^n - 1}{x^m - 1} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1}{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}\,,$$

so daß der gesuchte Grenzwert gleich n/m ist.

b) Für $x > 0$ ist

$$x - \sqrt{x^2 + 3x} = \frac{x^2 - (x^2 + 3x)}{x + \sqrt{x^2 + 3x}} = \frac{-3}{1 + \sqrt{1 + \dfrac{3}{x}}}\,,$$

der gesuchte Grenzwert also gleich $-3/2$.

c) Der Nenner besitzt nur endlich viele Nullstellen, insbesondere gibt es ein $R < 0$, so daß der Nenner für $x \leq R$ nicht Null wird. Für diese x erhält man durch leichte Umformung, daß der zu untersuchende Bruch in die folgende Gestalt gebracht werden kann:

$$\frac{a_n}{b_m}\,x^{n-m}\,\frac{1 + \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{a_1}{a_n}\dfrac{1}{x^{n-1}} + \dfrac{a_0}{a_n}\dfrac{1}{x^n}}{1 + \dfrac{b_{m-1}}{b_m}\dfrac{1}{x} + \cdots + \dfrac{b_1}{b_m}\dfrac{1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{b_m}\dfrac{1}{x^m}}\,.$$

Da der rechts stehende Bruch für $x \to -\infty$ gegen 1 strebt, ergibt sich der gesuchte Grenzwert zu a_n/b_m für $n = m$, zu 0 für $n < m$ und zu $\pm\infty$ für $n > m$, wobei im letzten Fall das Vorzeichen gleich $(-1)^{n-m}\,\mathrm{sign}\,(a_n b_m)$ ist.

d) Da der Sinus dem Betrage nach durch 1 beschränkt ist und $\lim_{x\searrow 0}\sqrt{x} = 0$ gilt, ist der in Rede stehende Grenzwert ebenfalls gleich 0.

3. a) Es ist

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}}\ .$$

Der Konvergenzradius der Reihe ist offensichtlich 2.

b) Der Grenzwert der Folge $(a_{n+1}/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bekanntlich der goldene Schnitt $g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Folglich besitzt die Potenzreihe nach dem Quotientenkriterium den Konvergenzradius

$$R := \frac{1}{g} = h = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\ .$$

Wegen

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + z + z^2\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + a_{n+1})\, z^n = 1 + z + z^2 f(z) + z\,(f(z) - 1)$$

ergibt sich der Grenzwert für $|z| < R$ zu

$$\frac{1}{1-z-z^2}\ .$$

4. Die Funktion f ist wohldefiniert, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ die definierende Reihe absolut summierbar ist, weil sie die obere Schranke

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$$

besitzt. Ist $x_1 < x_2$, so gibt es rationale Zahlen echt zwischen diesen reellen Werten, und somit enthält die Reihe für $f(x_2)$ mehr (positive) Summanden als die Reihe für $f(x_1)$. Damit ist f streng monoton wachsend.

Ist nun $a \in \mathbb{Q}$, also $a = r_N$ für ein $N \in \mathbb{N}$, so ist für jedes $x \in \mathbb{R}$, welches größer ist als a,

$$f(a) + 2^{-N} = \sum_{r_n < r_N} 2^{-n} + 2^{-N} = \sum_{r_n \le r_N} 2^{-n} \le \sum_{r_n < x} 2^{-n} = f(x)\ .$$

Damit ist $f(x) - f(a) \ge 2^{-N}\ ,\quad x > a$, und folglich ist f in a *nicht* stetig. In jedem $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist f jedoch stetig. Dazu reicht es zu zeigen, daß

$$\lim_{x\searrow a} f(x) = f(a) \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow a} f(x) = f(a)\ .$$

Wir beweisen die erste Aussage; die zweite läßt sich ganz analog herleiten. Wegen der strengen Monotonie von f ist $f(x) > f(a)$ für alle $x > a$, und damit genügt zu zeigen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für alle $x > a$ mit $x - a < \delta$ folgt: $f(x) < f(a) + \varepsilon$.

Nun gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein N, so daß $\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon$. Da $a \notin \mathbb{Q}$, ist $\delta := \min_{n<N}\{|a - r_n|\} > 0$ und folglich $|a - r_n| \ge \delta$ für alle $n < N$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x - a < \delta$ gilt dann aber

$$f(x) - f(a) = \sum_{r_n < x} 2^{-n} - \sum_{r_n < a} 2^{-n} = \sum_{a \le r_n < x} 2^{-n} \le \sum_{a \le r_n < a+\delta} 2^{-n} \le \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon\ .$$