Grundzüge der

Funktionentheorie

Oswald Riemenschneider

Hamburg 1993

Korrigierte, leicht veränderte, ergänzte und mit Skizzen versehene

Neufassung vom Juni 2004
mit weiteren Korrekturen und Ergänzungen vom Februar 2006

Vorwort

Diese Noten reflektieren den Inhalt meiner zweistündigen Vorlesung *Grundzüge der Funktionentheorie* im Wintersemester 1992/93, die sich stark an das Buch von Ingo Lieb und Wolfgang Fischer[1] anschloß. Die Herausgabe des Textes diente in erster Linie dem Zweck, denjenigen Studierenden, die diese Vorlesung nicht gehört hatten, aber in den „regulären“ Funktionentheorie–Kurs einsteigen wollten, verläßlich zu sagen, welche *spezifischen* Voraussetzungen sie erworben haben sollten. An *allgemeinen* Voraussetzungen sollte der Leser damals wie heute gute Grundkenntnisse in der *Analysis* (dazu einige wenige in der *Linearen Algebra*) mitbringen[2], vor allem aber Neugier auf fundamentale Entwicklungen und Erkenntnisse der Reinen Mathematik und elementare Freude am mathematischen Denken.

Eine Neuauflage des Manuskripts entstand aus Anlaß eines von mir im Sommersemester 1999 begonnenen Funktionentheorie–Zyklus. Sie unterschied sich inhaltlich nur unwesentlich von der ersten Fassung; allerdings habe ich mich damals bemüht, mißverständliche oder sogar fehlerhafte Formulierungen auszumerzen und die eine oder andere erläuternde Bemerkung einzufügen. Hierbei war mir der Rat und die Kritik meines damaligen Assistenten Dr. Jörg Schürmann von großer Hilfe. Weiter habe ich versucht, die zahlreichen Druckfehler in der ersten Auflage zu eliminieren und keine neuen entstehen zu lassen. Für die Erstellung der ersten umfangreichen Fehlerliste danke ich den erfreulich aktiven Teilnehmern an meinem 4–semestrigen Kurs *Mathematik für Studierende der Physik* vom Wintersemester 1993/94 bis Sommersemester 1995.

Die hier vorgelegte Neufassung vom Juni 2004 ist im Wesentlichen identisch mit der Auflage vom Sommer 1999. Ich habe das Manuskript nur an wenigen Stellen sprachlich geglättet und mich bemüht, durch weitere Bemerkungen und Einfügung zusätzlicher Informationen und Lösungen von Aufgaben dem Leser das Verständnis des Textes zu erleichtern. Insbesondere wurden Anhänge über komplex–wertige Differentialformen bzw. die Bernoulli–Zahlen eingefügt. Zudem wurden die wenigen Skizzen mit dem Computer erstellt und in den LaTeX–file eingebunden; die Literaturliste wurde auf den neuesten Stand gebracht. Inhaltlich decken diese Noten etwa die erste Hälfte meiner Vorlesung *Funktionentheorie I* im Sommersemester 2004 ab, wobei einiges nicht vorgetragen wurde, da es schon Gegenstand meiner vorhergehenden Vorlesungen über *Analysis* war. Der Rest der Vorlesung folgte meinem Manuskript mit dem gleichen Titel[3].

Hamburg, den 25. Juni 2004
Oswald Riemenschneider

Leider konnte auch in der vorigen Fassung der Fehlerteufel weiterhin sein Unwesen treiben, wie mir beim erneuten Korrekturlesen während eines Kurses über Funktionentheorie I im Wintersemester 2005/06 nicht verborgen bleiben konnte. Die schlimmsten Ungereimtheiten und Druckfehler wurden in der vorliegenden Fassung eliminiert. Ich hoffe, es blieben nicht allzu viele unentdeckt. In Kapitel 11 wurden noch einige Beispiele von Berechnungen uneigentlicher Integrale mit Hilfe des Residuenkalküls eingefügt, die im Kurs als Übungsaufgaben behandelt wurden.

Hamburg, den 12. Februar 2006
Oswald Riemenschneider

[1]Siehe die Literaturliste auf der übernächsten Seite.

[2]Meine Texte *Analysis I, Analysis II, Analysis III* und *Lineare Algebra* liegen als Ps– als auch Pdf–file in jeweils neuester Fassung auf meiner homepage (frühere Fassungen stehen auch gebunden in der Bibliothek).

[3]Auch das Manuskript *Funktionentheorie I* ist in der Bibliothek vorhanden. Es wurde ebenfalls zu Beginn des Sommersemesters vollständig überarbeitet und wird in jeweils aktueller Version ins Netz gestellt.

Inhalt

Literatur

[1] Ahlfors, L. V.: Complex Analysis. McGraw–Hill: New York 1966 (2nd edition).

[2] Ash, R. B.: Complex Variables. Academic Press: New York 1971.

[3] Behnke, H. und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Springer: Berlin 1965 (3. Auflage).

[4] Berenstein, C. A., and R. Gay: Complex Variables. An Introduction. Springer: New York–Berlin–Heidelberg 1991.

[5] Bieberbach, L.: Einführung in die Funktionentheorie. Teubner: Stuttgart 1966 (4. Auflage).

[6] Carathéodory, C.: Funktionentheorie (2 Bände). Birkhäuser: Basel 1960 (2. Auflage).

[7] Cartan, H.: Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes. Hermann: Paris 1961.

[8] Conway, J. B.: Functions of one complex variable. Springer: New York, Heidelberg, Berlin 1973.

[9] Diederich, K. und R. Remmert: Funktionentheorie I. Springer: Berlin 1972.

[10] Dinghas, A.: Vorlesungen über Funktionentheorie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1961.

[11] Fischer, W. und I. Lieb: Funktionentheorie. Komplexe Analysis in einer Veränderlichen. 8., neubearbeitete Auflage. vieweg studium - Aufbaukurs Mathematik. Vieweg: Braunschweig 2003.

[12] Freitag, E. und R. Busam: Funktionentheorie. 2. Auflage. Springer: Berlin 1995.

[13] Heins, M.: Complex Function Theory. Academic Press: New York–London 1968.

[14] Henrici, P.: Applied and computational complex analysis (2 Bände). Wiley: New York 1974/77.

[15] Hurwitz, A. und R. Courant: Funktionentheorie. Mit einem Anhang von H. Röhrl. Springer: Berlin 1964 (4. Auflage).

[16] Jänich, K.: Einführung in die Funktionentheorie. Springer: Berlin 1977.

[17] Knopp, K.: Funktionentheorie (2 Bände). de Gruyter (Sammlung Göschen): Berlin 1970/71 (12. Auflage).

[18] Lang, S.: Complex Analysis. 2. Auflage. Springer: Berlin 1999.

[19] Levinson, N. and R. Redheffer: Complex Variables. Holden–Day: San Francisco 1970.

[20] Remmert, R.: Funktionentheorie I. Grundwissen Mathematik 5. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984.

[21] Sansone, G. and J. Gerretsen: Lectures on the theory of functions of a complex variable. I. Holomorphic functions. Noordhoff: Groningen 1960.

Weiterführende Literatur

[22] Behnke, H. und P. Thullen: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Zweite, erweiterte Auflage. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 51. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[23] Fischer, W. und I. Lieb: Ausgewählte Kapitel aus der Funktionentheorie. Vieweg: Braunschweig 1988.

[24] Forster, O.: Riemannsche Flächen. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1977.

[25] Fritzsche, K. and H. Grauert: From holomorphic functions to complex manifolds. Graduate Texts in Mathematics 213. Springer: New York–Berlin–Heidelberg 2002.

[26] Grauert, H. und R. Remmert: Analytische Stellenalgebren. Unter Mitarbeit von O. Riemenschneider. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 176. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[27] Grauert, H. and R. Remmert: Coherent analytic sheaves. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 265. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1984.

[28] Grauert, H. und R. Remmert: Theorie der Steinschen Räume. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 227. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1977.

[29] Griffiths, P. and J. Harris: Principles of algebraic geometry. Wiley: New York–Chichester–Brisbane–Toronto 1978.

[30] Gunning, R. C.: Lectures on Riemann surfaces. Princeton Mathematical Notes. Princeton University Press: Princeton 1966.

[31] Gunning, R. C.: Riemann surfaces and generalized theta functions. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 91. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.

[32] Gunning, R. C. and H. Rossi: Analytic functions of several complex variables. Prentice Hall: Englewood Cliffs 1965.

[33] Hörmander, L.: An introduction to complex analysis in several variables. Van Nostrand: Princeton–Toronto–London 1966.

[34] Imayoshi, Y. and M. Taniguchi: An introduction to Teichmüller spaces. Springer: Tokyo–Berlin–Heidelberg–New York 1992.

[35] Kaup, L. and B. Kaup: Holomorphic functions of several variables. De Gruyter: Berlin 1983.

[36] Klein, F. und R. Fricke: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Erster Band. Johnson Reprint Corporation: New York 1966. Erstausgabe bei Teubner 1890.

[37] Remmert, R.: Funktionentheorie 2. Grundwissen Mathematik 6. Springer: Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo 1992.

[38] Rothstein, W. und K. Kopfermann: Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. BI–Hochschulverlag: Zürich 1982.

[39] Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw–Hill: New York 1966.

[40] Sansone, G. and J. Gerretsen: Lectures on the theory of functions of a complex variable. II. Geometric theory. Wolters–Noordhoff: Groningen 1969.

[41] Wells, R. 0. Jr.: Differential analysis on complex manifolds. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1980.

Lebensdaten einiger Protagonisten

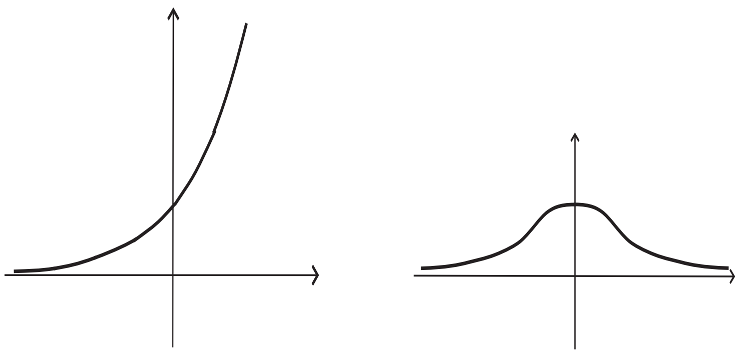
Cardano, G.	1501 – 1576
Wallis, J.	1616 – 1703
Newton, I.	1642 – 1727
Leibniz, G. W.	1646 – 1717
Bernoulli, Jak.	1654 – 1705
Taylor, B.	1685 – 1731
Euler, L.	1707 – 1783
d'Alembert, J. B. le Rond	1717 – 1783
Wessel, C.	1745 – 1818
Laplace, P. S.	1749 – 1827
Legendre, A.–M.	1752 – 1833
Pfaff, J. F.	1765 – 1825
Argand, J. R.	1768 – 1822
Gauß, C. F.	1777 – 1855
Bolzano, B.	1781 – 1848
Poisson, D.	1781 – 1840
Cauchy, A. L.	1789 – 1857
Sturm, Ch.	1803 – 1855
Jacobi, C. G. J.	1804 – 1851
Lejeune–Dirichlet, P. G.	1805 – 1859
Liouville, J.	1809 – 1882
Laurent, P. A.	1813 – 1854
Heine, E.	1821 – 1882
Kronecker, L.	1823 – 1891
Weierstraß, K.	1825 – 1897
Riemann, B.	1826 – 1866
Rouché, E.	1832 – 1910
Casorati, F.	1835 – 1890
Jordan, C.	1838 – 1921
Schwarz, H. A.	1843 – 1921
Mittag–Leffler, G.	1846 – 1927
Poincaré, H.	1854 – 1912
Morera, G.	1856 – 1909
Picard, E.	1856 – 1941
Runge, C.	1856 – 1927
Goursat, E.	1858 – 1936
Hurwitz, A.	1859 – 1919
Hadamard, J.	1865 – 1963
Wirtinger, W.	1865 – 1945
Borel, E.	1871 – 1956
Vitali, G.	1875 – 1932
Montel, P.	1876 – 1975

Einleitung

Schon L. Euler hatte die grundlegende Idee, die komplexen Zahlen zum Studium allgemeiner Funktionen heranzuziehen. Es dauerte jedoch einige Zeit, bis die komplexen Zahlen (nach Vorarbeiten von Gauss, Cauchy und anderen) systematisch beim Aufbau der Funktionentheorie verwendet wurden (Cauchy ab 1814; Riemann ab 1851; Einführung des Symbols i durch Euler schon 1777). Hinzu kam, daß durch Arbeiten von Fourier die bis dahin gültige Auffassung, daß Funktionen „Rechenausdrücke“ seien, hinfällig wurde, und man klären mußte, was Funktionen überhaupt sein sollten. Geklärt (oder besser gesagt: vorläufig entschieden) wurde diese Frage durch Weierstrass, der forderte, daß man nur *analytische* Funktionen betrachten sollte, also solche, die lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind. „Funktionentheorie“ ist somit nichts anderes als die Theorie der analytischen Funktionen im Komplexen; die klassische Bezeichnung wird verständlich, wenn man sich klarmacht, daß gewisse Eigenschaften reell–analytischer Funktionen nur erklärt werden können, wenn man sie in natürlicher Weise ins Komplexe fortsetzt und dort studiert.

Man betrachte z. B. die Funktionen

$$f(x) = \exp(x) = e^x , \quad g(x) = \frac{1}{1 + x^2} .$$



Figur E.1

Beide sind auf ganz $\mathbb{R}$ analytisch. Die Potenzreihenentwicklung um den Ursprung 0 sehen wie folgt aus:

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j , \quad \frac{1}{1 + x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} .$$

Im ersten Fall ist der Konvergenzradius unendlich groß, während er im zweiten Fall gleich 1 ist, wie aus der Cauchy–Hadamard*schen Formel* folgt. Entwickelt man um einen beliebigen anderen Punkt x_0, so verändert sich der Konvergenzradius nicht für die Exponentialfunktion, muß aber bei der zweiten Funktion durch $\sqrt{1 + x_0^2}$ ersetzt werden. Dieses Phänomen läßt sich grundsätzlich <u>nicht</u> verstehen, wenn man darauf beharrt, die Funktionen nur im Reellen zu studieren.

Eine befriedigende Erklärung liefert die Cauchy–Riemannsche Theorie. Komplexe Potenzreihen $\sum a_j (z - c)^j$ sind in ihrem Konvergenzkreis D (mit Mittelpunkt c) *komplex* differenzierbare Funktionen, d. h. in jedem Punkt $z_0 \in D$ existiert die *komplexe Ableitung*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} .$$

Betrachten wir ab jetzt nur solche komplex differenzierbaren Funktionen und schreiben wir insbesondere $f(z) = g(x, y) + i\, h(x, y)$ mit reellwertigen Funktionen g, h und $z = x + i y$, und nehmen wir ferner ohne Einschränkung $z_0 = 0$ und $f(0) = 0$ an, so ergibt sich aus der Existenz von $f'(0)$ sofort die Identität

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x, 0) + i\,h(x, 0)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{g(0, y) + i\,h(0, y)}{i\,y}$$

und damit das Bestehen der CAUCHY–RIEMANNschen *Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned} g_x(0, 0) &= h_y(0, 0)\ , \\ h_x(0, 0) &= -g_y(0, 0)\ . \end{aligned}$$

Man kann auch die Umkehrung zeigen:

Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ *ist in* $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in G$ *genau dann komplex differenzierbar, wenn Real– und Imaginärteil reell differenzierbar in* (x_0, y_0) *sind und dort die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen*

$$g_x = h_y\ , \quad h_x = -g_y$$

gelten.

Man sagt heutzutage, f sei *holomorph* auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, falls f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph in dem Punkt* z_0, wenn f in einer offenen Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist.

Entscheidend für die Theorie sind nun *Kurven–* oder *Wege–Integrale* für stetige Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ längs (hinreichend guter) Integrationswege γ in G, die man vermöge *Riemannscher Summen* bezüglich Unterteilungen der Parameterintervalle von γ in symbolischer Weise definieren kann durch

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \lim \sum f(\zeta_k)\,(z_{k+1} - z_k)\ .$$

Für stückweise stetig differenzierbare Kurven $\gamma : I \to G$ ergibt diese Definition sofort

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (g\,dx - h\,dy) + i \int_\gamma (h\,dx + g\,dy)\ ,$$

wobei g und h wie üblich den Real– bzw. Imaginärteil von f bezeichnen. Man berechnet nun leicht

$$\begin{aligned} d\,(g\,dx - h\,dy) &= -\,(g_y + h_x)\,dx \wedge dy\ , \\ d\,(h\,dx + g\,dy) &= (-\,h_y + g_x)\,dx \wedge dy\ . \end{aligned}$$

Hieraus resultiert dann wegen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen mit Hilfe des allgemeinen Satzes von STOKES (wobei wir allerdings die historische Abfolge der Ereignisse auf den Kopf stellen) der CAUCHYsche *Integralsatz*:

Ist f *holomorph mit stetiger Ableitung* f' *„im Inneren der (einfach geschlossenen) Kurve“* γ *und stetig bis zum Rand, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0\ .$$

Die wesentliche Problematik der klassischen Funktionentheorie bestand darin, diesen Sachverhalt <u>ohne</u> die Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitung f' zu beweisen. Der aus diesen Bemühungen resultierende *Satz* von GOURSAT war eine der großen mathematischen Sensationen zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

Zur Anwendung des Integralsatzes betrachte man jetzt für die auf $G \subset \mathbb{C}$ komplex differenzierbare Funktion f den Differenzenquotienten

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

als Funktion von $\zeta \neq z$ bei festgehaltenem $z \in G$. Aufgrund der Voraussetzung ist diese Funktion (durch $f'(z)$) nach $\zeta = z$ stetig fortsetzbar. Wir werden in der Vorlesung zeigen, daß für g dann immer noch der Cauchysche Integralsatz gilt. Damit folgt insbesondere für jeden Kreis $D \subset\subset G$ und $z \notin \partial D$, daß

$$0 = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \, .$$

Nun ist, wie wir sehen werden,

$$\int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$$

im Inneren von D, und damit erhält man die (lokale) *Cauchysche Integralformel*:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \, , \quad z \in D \subset\subset G \, .$$

Insbesondere besagt diese Formel, daß die Funktionswerte einer holomorphen Funktion im Inneren eines Kreises schon durch ihre Werte auf dem Rand desselben bestimmt sind. Dies hat weitreichende Konsequenzen; z. B. folgt hieraus, daß eine solche Funktion beliebig oft komplex differenzierbar, ja sogar um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar ist, die auf jeden Fall im größten Kreis mit dem gegebenen Mittelpunkt, der noch in dem Bereich der Holomorphie der Funktion liegt, konvergiert. Es gilt nämlich für $z \in D \subset\subset G$, z_0 der Mittelpunkt von D:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)}\, d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^j d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\right) (z - z_0)^j \, , \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten dieser Potenzreihe natürlich unabhängig von dem Radius des Kreises D sind und als Taylorkoeffizienten der Funktion f an der Stelle z_0 bis auf wohlbekannte Faktoren gerade die (höheren) komplexen Ableitungen von f an dieser Stelle durch eine Integralformel ausdrücken.

Dies erklärt nun auch abschließend das unterschiedliche Verhalten der reell–analytischen Funktionen $1/(1 + x^2)$ und e^x, denn e^x setzt sich zu der überall holomorphen Funktion e^z fort, während die kanonische Fortsetzung $1/(1 + z^2)$ der ersten Funktion in $z_0 = \pm i$ *nicht* holomorph ist.

Es sollte hier bemerkt werden, daß Folgerungen dieser Art für eine große Klasse von Lösungen *partieller Differentialgleichungen* gültig sind, nämlich für (Systeme von) *elliptische(n)* Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, zu denen auch die Cauchy–Riemannschen (CR)–Gleichungen gehören. Insofern ist die Funktionentheorie nur ein Spezialfall einer allgemeineren Theorie, in die sich auch die Behandlung der *harmonischen Funktionen* einordnet. In zwei reellen Dimensionen stehen diese sogar in einem *direkten* engen Zusammenhang mit den holomorphen Funktionen.

Als Anwendung des bisher Gesagten erhält man den *Satz* von Liouville durch Abschätzung der Koeffizienten der obigen Entwicklung um $z_0 = 0$ bzgl. des Kreises $D = D_R(0)$ und dem Grenzübergang $R \to \infty$:

Ist f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ und dem Betrage nach beschränkt: $|f(z)| \leq C < \infty$, so ist f konstant.

Als *Beispiel* zu diesem Satz betrachten wir komplexe Polynome $P(z)$ vom Grade n, für die man leicht zeigen kann, daß für hinreichend große $R >> 0$ gilt:

$$(*) \qquad |P(z)| \geq C\,|z|^n \, , \quad |z| \geq R \, .$$

Nimmt man nun an, daß P in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen besitze, so ist die Funktion $1/P$ dem Betrage nach beschränkt auf jedem kompakten Kreis, und wegen $(*)$ ist

$$\left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \frac{1}{C R^n} \quad \text{für} \quad |z| \geq R\,.$$

Somit ist $1/P$ dem Betrage nach beschränkt auf ganz $\mathbb{C}$ und also nach dem Satz von Liouville konstant, was aber im Widerspruch zu der obigen Ungleichung $(*)$ steht. Wir haben damit einen elementaren Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra* gefunden:

Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt (mindestens) eine Nullstelle in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$.

Hieraus folgt rein algebraisch, daß dann jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten vollständig in Linearfaktoren zerfällt.

Die Tatsache, daß holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind, hat auch weitreichende Konsequenzen für die Real– und Imaginärteile solcher Funktionen. Ist nämlich $f = g + i\,h$ holomorph auf dem Gebiet G, so sind nach dieser Bemerkung f_z (und $f_{\overline{z}} = 0$) wiederum (stetig) differenzierbar, so daß auch die Ableitungen g_x, h_x, g_y, h_y (total reell) stetig differenzierbar sind. Damit gilt auf G:

$$g_{xx} = (g_x)_x = (h_y)_x = h_{xy} = -\,g_{yy}\,, \quad \text{d. h.} \quad g_{xx} + g_{yy} = 0\,,$$

und entsprechend $h_{xx} + h_{yy} = 0$. Mit dem Laplace–*Operator*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ergibt sich also:

$$\Delta\, g = \Delta\, h = 0$$

und damit m. a. W.: Real– und Imaginärteile holomorpher Funktionen sind *harmonische Funktionen* (auch *Potentialfunktionen* genannt).

Ist umgekehrt $g : G \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion, so gibt es, wie wir zeigen werden, (lokal) Funktionen $h : G \to \mathbb{R}$, s. d. $f = g + i\,h$ holomorph ist. h ist bis auf additive Konstanten eindeutig bestimmt. Dieser enge Zusammenhang zwischen holomorphen Funktionen und Potentialfunktionen ist die Grundlage für Anwendungen der Funktionentheorie auf (zweidimensionale) physikalische Probleme, die in der *Hydrodynamik* auf Helmholtz und Kirchhoff zurückgehen. (Zu weiteren historischen Bemerkungen und mathematischen Ausführungen siehe z. B. Landau–Lifschitz: *Hydrodynamik*, pp. 25 ff., oder die in dem Literaturverzeichnis aufgeführten Bücher von Henrici und Levinson–Redheffer).

Eine weitere Anwendung der Funktionentheorie betrifft den *Residuen–Kalkül*. Ist f holomorph in einem Gebiet G mit Ausnahme eines Punktes $z_0 \in G$, so existiert eine Verallgemeinerung der Potenzreihenentwicklung, nämlich eine (eindeutig bestimmte) Laurent–*Entwicklung* nach positiven <u>und</u> negativen Potenzen von $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(z - z_0)^j\,.$$

Hierbei ist für einen hinreichend kleinen Kreis D_ε mit Mittelpunkt z_0

$$\int_{\partial D_\varepsilon} f(z)\,dz = 2\,\pi\,i\,a_{-1}\,;$$

die Zahl a_{-1} heißt das *Residuum* der Funktion f an der Stelle z_0, in Zeichen

$$\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = a_{-1}\,.$$

Der *Residuensatz* besagt nun, daß Integrale über holomorphe Funktionen mit *höchstens isolierten Singularitäten* mit Hilfe dieser Residuen berechnet werden können:

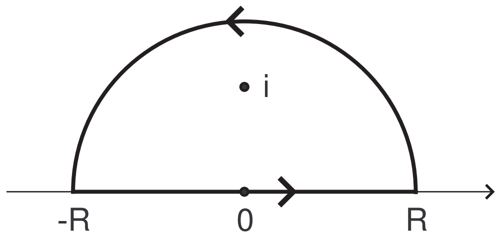
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum \operatorname{Res}_{z_0} f(z)\ ,$$

wobei die (endliche) Summe auf der rechten Seite über alle Punkte z_0 im „Inneren“ des (einfach geschlossenen, positiv orientierten) Weges γ zu erstrecken ist. Da sich die Residuen oftmals (ohne Berechnung von Integralen) durch schlichte Manipulationen von bekannten Potenzreihen ergeben, hat man damit eine starke Methode zur Verfügung, um Integrale auszurechnen.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right\}\ .$$

Wählt man den folgenden Weg:



Figur E.2

so hat man natürlich nur das Residuum bei $z = i$ zu berücksichtigen, und bekommt

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \operatorname{Res}_i \frac{1}{1+z^2} = \frac{2\pi i}{2i}\operatorname{Res}_i \frac{1}{z-i} = \pi\ .$$

Nun verschwindet aber für $R \to \infty$ das Integral über den oberen Halbkreis, so daß schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi\ .$$

Wir werden noch viele andere Beispiele der Anwendung des Residuenkalküls kennenlernen.

Ein weiterer Fortschritt wurde durch die Arbeiten von N. H. Abel, Jacobi, Riemann u. v. a. bezüglich der sogenannten *elliptischen Integrale* erzielt (so genannt, weil ein spezielles Integral dieses Typs bei der Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen auftritt). Es war lange bekannt, daß sich Integrale der Form

$$\int R\left(x,\ \sqrt{a x^2 + b x + c}\right)\,dx\ ,$$

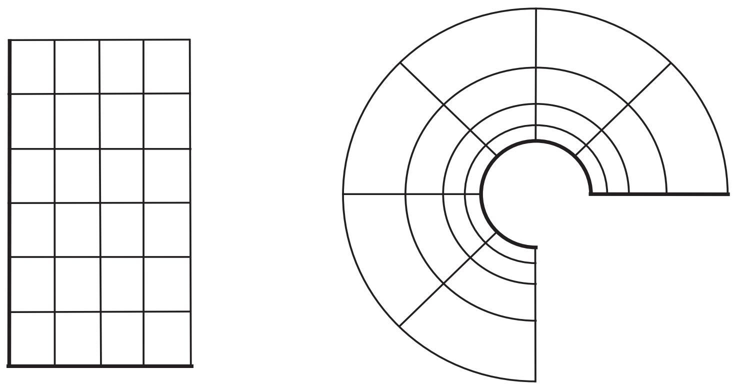
R eine rationale Funktion in x und y, mittels der *Elementartranszendenten* (genauer ihrer Umkehrfunktionen) ausdrücken lassen. Wie aber steht es z. B. mit Integralen der Form

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}}$$

bei paarweise verschiedenen $e_1, \ldots, e_4$? Es zeigt sich, daß ein solches Integral im Komplexen zweifach mehrdeutig ist, d. h. eindeutig bestimmt ist bis auf (von gewissen geschlossenen Kurven herrührende) additive ganzzahlige Vielfache zweier sogenannter *Perioden* ω_1, ω_2. Man kann dann zeigen: Die

Umkehrfunktion ist eindeutig (d. h. jeder Wert wird von dem Integral angenommen) und *zweifach periodisch* (sie ist in Wahrheit *meromorph*, d. h. sie hat Pole als isolierte Singularitäten). Nun ist aber die Menge der zweifach periodischen meromorphen Funktionen (zu fest vorgegebenen Perioden) isomorph zu dem Körper der *elliptischen Funktionen*, d. h. der meromorphen Funktionen auf einer kompakten RIEMANNschen *Fläche*, die topologisch äquivalent zu einem reell 2–dimensionalen Torus ist (auch *elliptische Kurve* genannt). Diese Beziehung gab historisch den Anlaß zu einer genaueren Untersuchung der Funktionenkörper von allgemeinen kompakten Riemannschen Flächen. Wir werden diesen Themenbereich in der Vorlesung *Funktionentheorie I* aufgreifen.

Der Versuch eines Überblicks wäre nicht vollständig, wenn nicht die *Abbildungseigenschaften* holomorpher Funktionen erwähnt würden. Es seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $f : G_1 \to G_2$ sei eine *biholomorphe* Abbildung, also eine bijektive Abbildung, die in beiden Richtungen holomorph ist. Identifiziert man $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, so zeigt man leicht, daß f eine (direkt) *konforme* Abbildung darstellt, also orientierte Winkel erhält. Umgekehrt impliziert die Konformität das Bestehen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen. Somit hat man für biholomorphe f das folgende Bild:



Figur E.3

D. h. insbesondere: Ist f biholomorph, so stehen die Niveaulinien

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Re} f &= \text{const.} \\ \operatorname{Im} f &= \text{const.} \end{aligned}\right\}$$

paarweise senkrecht aufeinander.

Dies erinnert uns wieder an *physikalische* Phänomene; tatsächlich kann man auch die *geometrische* Theorie der holomorphen Funktionen nutzbringend auf zweidimensionale physikalische Erscheinungen anwenden. Es sei dazu

$$\mathfrak{u} : z = x + iy \longmapsto (u(z), v(z)) = (u(x, y), v(x, y)) , \quad z \in G ,$$

ein *stationäres*, d. h. von der Zeit unabhängiges Vektorfeld (z. B. das Strömungsfeld einer Flüssigkeit). Wir denken uns stets $(u, v) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ eingebettet in $\mathbb{R}^3$ durch $(u, v) \mapsto (u, v, 0)$. Das Vektorfeld möge stetig differenzierbar sein. Dann kann man die *Divergenz* $\operatorname{div} \mathfrak{u}$ von $\mathfrak{u}$ und die *Rotation* $\operatorname{rot} \mathfrak{u}$ berechnen, wobei wir, da die Rotation senkrecht auf $\mathbb{R}^2$ steht, nur eine Komponente zu berücksichtigen brauchen, mit der wir dann die Rotation identifizieren:

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} = u_x + v_y , \quad \operatorname{rot} \mathfrak{u} = v_x - u_y .$$

Ein Vektorfeld heißt *quellenfrei*, falls $\operatorname{div} \mathfrak{u} \equiv 0$, und *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} \mathfrak{u} \equiv 0$. Bei einer Flüssigkeit sprechen wir im ersten Fall auch von einer *inkompressiblen* Flüssigkeit. Dies ist nach dem Satz von

STOKES und seinen Varianten äquivalent dazu, daß der *Fluß* von $\mathfrak{u}$ durch jede geschlossene Kurve γ in G gleich Null ist, während die Wirbelfreiheit bedeutet, daß die *Rotation* (oder *Zirkulation*) von $\mathfrak{u}$ längs jeder solchen geschlossenen Kurve verschwindet.

Zusammenfassend haben wir also für ein (stationäres) wirbelfreies *Strömungsfeld* $\mathfrak{u}$ einer inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\left.\begin{array}{rl} 0 = \operatorname{div}\mathfrak{u} = & u_x + v_y \\ 0 = \operatorname{rot}\mathfrak{u} = & (0,\, 0,\, v_x - u_y) \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{rl} u_x = & -v_y\,, \\ v_x = & u_y\,. \end{array}\right.$$

Wegen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen sind diese Bedingungen aber gleichbedeutend damit, daß die Funktion

$$f(z) = u(x,\, y) - i\, v(x,\, y)$$

holomorph ist und sich deshalb (lokal) in eine Potenzreihe entwickeln läßt, die stets *Stammfunktionen* F besitzt:

$$F(z) = G(x,\, y) + i\, H(x,\, y)\,, \quad F'(z) = f(z)\,.$$

Man nennt $F(z)$ ein *komplexes Potential* von $\mathfrak{u}$. Aus den Gleichungen

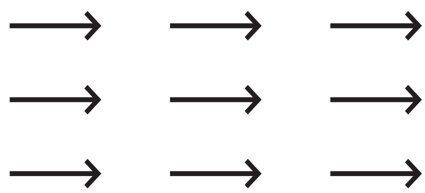
$$G_x - i\, G_y = G_x + i\, H_x = F_x = f = u - i\, v$$

ergibt sich dann sofort

$$(u,\, v) = (G_x,\, G_y) = \operatorname{grad} G\,.$$

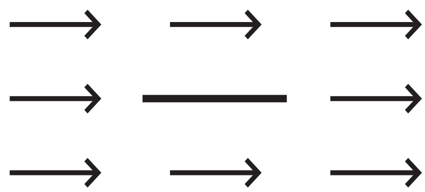
Mit anderen Worten: Der Realteil G eines komplexen Potentials stellt tatsächlich ein *Potential* des Vektorfeldes $\mathfrak{u}$ dar. Damit sind die Niveaulinien $G = \text{const.}$ *Linien gleichen Potentials*, und die darauf senkrecht stehenden Niveaulinien des Imaginärteils H sind *Stromlinien* (oder in anderer Interpretation *Kraftlinien*). Man nennt deshalb auch H ein *Stromlinien*– oder *Kraftlinienpotential*.

Als *Beispiel* betrachten wir das konstante Feld $\mathfrak{u} = (1,\, 0)$ einer „völlig ungestörten“ Flüssigkeit:



Figur E.4

Es ist hier also $f(z) = 1$ und damit $F(z) = z = x + i\, y$. Damit sind die Stromlinien gegeben durch $y = \text{const.}$. Das Strömungsbild wird sich nicht ändern, wenn man ein infinitesimal dünnes Hindernis der folgenden Gestalt in das Strömungsfeld einbringt:



Figur E.5

Was passiert aber, wenn man stattdessen z. B. ein *kreisförmiges* Hindernis in das Strömungsfeld bringt? Die Antwort ist einfach: Offensichtlich behält ein quellen– und wirbelfreies Vektorfeld, wenn man es unter einer holomorphen Funktion „liftet“, diese guten Eigenschaften. Also wird man versuchen, eine konforme Abbildung zwischen den beiden *Außengebieten* herzustellen. Eine solche Abbildung gibt es tatsächlich: Die Abbildung

$$z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

hat die gewünschten Eigenschaften, so daß das gesuchte komplexe Potential genau durch diese Funktion gegeben wird.

Zum Schluß wollen wir noch auf zwei weitere Aspekte der Funktionentheorie eingehen. Zum einen braucht man die Theorie der holomorphen Funktionen in *mehreren* Veränderlichen in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten). Eine solche in der Gestalt

$$P(D)\,u = f$$

transformiert sich vermöge der FOURIER–LAPLACE–*Transformation* in das *Divisionsproblem*

$$P\,\widehat{u} = \widehat{f}\,,$$

wobei für $C^\infty(\mathbb{R})$–Funktionen g die Fourier–Transformation

$$\widehat{g}\,(z) = \int e^{-i\sum x_j z_j}\, g\,(x)\,dx$$

holomorph in $z \in \mathbb{C}^n$ ist. Eine der grundlegenden Fragen ist:

Welche holomorphen Funktionen $U\,(z)$ sind Fourier–Transformierte von $C^\infty(\mathbb{R})$–Funktionen g mit Träger in einer Kugel vom Radius R?

Die Antwort gibt der Satz von PALEY und WIENER: Dies ist genau dann der Fall, wenn die folgende Wachstumsbedingung erfüllt ist:

$$|\,U\,(z)\,| \le C_N\,(1 + \|\,z\,\|)^{-N}\, e^{R\|\mathrm{Im}\,z\|} \quad \text{für alle} \quad N\,.$$

Hier bestehen noch weitere interessante Zusammenhänge mit dem Gebiet der Funktionalanalysis, mit Begriffen wie *Hypoelliptizität* etc.

Wir wollen zum Schluß noch andeutungsweise die Verwendung funktionentheoretischer Prinzipien in der *analytischen Zahlentheorie* erwähnen. Einer der berühmten Sätze dieses Themenkreises ist der *Primzahlsatz* von HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN (unabhängig voneinander bewiesen 1896):

$$\pi\,(x) \sim \frac{x}{\log x}\,,$$

wobei das Symbol $\sim$ für *asymptotisch gleich* steht. Man erhält diese Aussage durch eine genaue Analyse der Nullstellen der *Riemannschen ζ–Funktion*

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p\ \mathrm{prim}} (1 - p^{-s})^{-1}\,,$$

die für $\mathrm{Re}\,s > 0$ mit Ausnahme von $s = 1$ holomorph ist und nach ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortgesetzt werden kann. Entscheidend hierbei ist, daß

$$\zeta\,(1 + i\,t) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}^*\,.$$

Außer gewissen „trivialen“ Nullstellen hat man nur noch solche, die in dem Streifen $0 \le \mathrm{Re}\,s \le 1$ liegen. Die *Riemannsche Vermutung* besagt, daß diese alle auf der Geraden $\mathrm{Re}\,s = 1/2$ liegen sollten. In der Tat kennt man bis heute mehrere Millionen von solchen, aber kein einziges Gegenbeispiel. Ein Beweis der Riemannschen Vermutung hätte eine wesentliche Präzisierung des Primzahlsatzes zur Folge.

1 Der Körper der komplexen Zahlen

Schon Cardano verwendete um die Mitte des 16. Jahrhunderts algebraische Ausdrücke von der Form $\sqrt{-15}$ und war in der Lage, mit Hilfe solcher *imaginärer Zahlen* reelle Lösungen von Gleichungen höheren Grades zu bestimmen. L. Euler führte 1777 das Symbol i für die *imaginäre Einheit* ein; formal erfüllt diese Zahl die Bedingung $i^2 = -1$, was für eine reelle Zahl offensichtlich niemals erfüllt sein kann. Formal sind damit *komplexe Zahlen* Ausdrücke der Gestalt

$$z = x + i\,y\,, \quad x\,,\, y \in \mathbb{R}\,,$$

mit denen man unter Berücksichtigung der Arithmetik reeller Zahlen und der zusätzlichen Bedingung für i rechnet. Setzt man demgemäß

$$\mathbb{C} = \{\, z = x + i\,y : x, y \in \mathbb{R}\,\}$$

und definiert eine Addition und Multiplikation durch

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \quad (x_1 + x_2) \quad + \quad i\,(y_1 + y_2)\,, \\ z_1\,z_2 &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i\,(x_1\,y_2 + x_2\,y_1)\,, \end{aligned}$$

so wird $\mathbb{C}$, wie man schnell nachrechnet, zu einem Körper mit Unterkörper $\mathbb{R} = \{\, z = x + i\,0\,\}$.

Für uns heutzutage ist es nicht besonders problematisch, eine solche abstrakte Einführung zu akzeptieren, zumal sie sich konzeptionell beschreiben läßt als der Quotient des Polynomringes über $\mathbb{R}$ in einer Unbestimmten t nach dem Hauptideal, das von dem Polynom $t^2 + 1$ erzeugt wird:

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}\,[t]/\,(t^2 + 1)\,.$$

M. a. W.: $\mathbb{C}$ ist der kleinste Oberkörper von $\mathbb{R}$, in dem das Polynom $t^2 + 1$ zerfällt.

Im historischen Verlauf war es jedoch lange umstritten, ob diesen Zahlen eine *reale* Bedeutung beizumessen sei. Der Durchbruch zur allgemeinen Akzeptanz wurde schließlich in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts erzielt durch die geometrische Deutung der komplexen Zahlen in der sogenannten *Gaußschen Zahlenebene* (veröffentlicht von Gauß 1831, auch wenn er diese schon viel eher besaß). Allerdings war diese Deutung wesentlich früher auch schon Wessel (1707) und Argand (1806) bekannt. Man identifiziert hierbei eine komplexe Zahl $x + i\,y$ einfach mit dem Paar $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ und hat dementsprechend auf $\mathbb{R}^2$ eine Addition und Multiplikation zu erklären vermöge:

$$\begin{aligned} (x_1,\, y_1) + (x_2,\, y_2) &:= \quad (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)\,, \\ (x_1,\, y_1) \cdot (x_2,\, y_2) &:= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2\ ,\ x_1\,y_2 + x_2\,y_1)\,. \end{aligned}$$

Davon ist uns die Addition als übliche Vektorraumaddition in $\mathbb{R}^2$ wohlvertraut. Aber auch die Multiplikation läßt sich geometrisch einfach deuten. Führt man Polarkoordinaten $r_j \geq 0$, $\varphi_j \in \mathbb{R} \bmod 2\pi$ ein, d. h. schreibt man

$$z_j = r_j\,(\cos\varphi_j + i\,\sin\varphi_j)\,,$$

wobei also $r_j = |\,z_j\,|$ der *Betrag* von z_j ist und φ_j das *Argument* von z_j genannt wird, so ist

$$\begin{aligned} z_1\,z_2 &= r_1\,r_2\,[(\cos\varphi_1\,\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\,\sin\varphi_2) + i\,(\sin\varphi_1\,\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\,\sin\varphi_2)] \\ &= r_1\,r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))\,. \end{aligned}$$

Also *multiplizieren sich die Beträge* und *addieren sich die Argumente* bei der Multiplikation komplexer Zahlen.

Bemerkung. Eine andere Beschreibung der komplexen Zahlen gewinnt man wie folgt: Man kann jeden Körper $\mathbb{K}$ identifizieren mit den $\mathbb{K}$–linearen Endomorphismen von $\mathbb{K}$ in sich, die natürlich genau aus allen *Homothetien* $\mathbb{K} \ni x \to cx \in \mathbb{K}$ bestehen. Die $\mathbb{C}$–Homothetien von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ sind natürlich erst recht $\mathbb{R}$–linear und bilden deshalb eine Teilmenge der reellen 2×2–Matrizen. Mit anderen Worten: Man hat eine Inklusion von $\mathbb{R}$–Vektorräumen

$$\mathbb{C} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathbb{C} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathbb{R}^2 .$$

Anhand der Formel $(a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$ verifiziert man, daß der Körper $\mathbb{C}$ somit (bzgl. der $\mathbb{R}$–Vektorraum–Basis $1, i$ kanonisch) isomorph ist zu der Algebra aller reellen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

Mit anderen Worten: Die Multiplikation mit komplexen Zahlen bewirkt auf $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ nur sogenannte *Drehstreckungen*.

In dem Bild der Gaußschen Zahlenebene ist der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eingebettet durch

$$\mathbb{R} \ni r \longmapsto (r, 0) \in \mathbb{C} .$$

Bezeichnet man diese Einbettung $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ mit α, so ist offensichtlich

$$\alpha(r_1 + r_2) = \alpha(r_1) + \alpha(r_2) ,$$
$$\alpha(r_1 r_2) = \alpha(r_1)\,\alpha(r_2) .$$

Also schreibe man kurz $r = (r, 0)$. Dann ist tatsächlich keine Verwechslung möglich, denn für $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$–Vektorraum gilt:

$$r\,(x, y) = (r\,x, r\,y) ,$$

und bezüglich der Körperstruktur von $\mathbb{C}$ ist ebenfalls

$$r\,(x, y) = (r, 0)\,(x, y) = (r\,x, r\,y) .$$

Setzt man dann schließlich

$$i := (0, 1) ,$$

so folgt für alle $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, daß

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)\,(y, 0) = x + i\,y ,$$

und es gelten in dieser Beschreibung die zu Anfang geforderten Rechenregeln.

Wir führen nun für $z = x + i\,y$ die folgenden *Bezeichnungen* ein:

$x = \mathrm{Re}\, z$	*Realteil* von z
$y = \mathrm{Im}\, z$	*Imaginärteil* von z
i	*imaginäre Einheit*
$\overline{z} = x - iy$	*konjugiert Komplexe* zu z .

Satz 1.1 *Die durch $z \mapsto \overline{z}$ definierte Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist ein* involutorischer Automorphismus *(d. h. ein Körperautomorphismus mit $\overline{\overline{z}} = z$).*

Beweis: Trivial. □

Bemerkungen. 1. Es gilt $z = \overline{z}$ genau dann, wenn z reell ist.

2. Ebenso ist $z \in \mathbb{C}$ genau dann *rein imaginär*, also von der Form $z = y\,i$, $y \in \mathbb{R}$, wenn $z = -\overline{z}$.

Da wir auch im Komplexen Analysis betreiben wollen, müssen wir Beträge einführen. Man identifiziert dazu $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ mit dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und überträgt die euklidische Norm:

$$|\,z\,| := \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Man nennt $|\,z\,|$ den *Betrag* der komplexen Zahl z. - Es gelten die folgenden Regeln für das Rechnen mit Beträgen.

Satz 1.2 *Durch* $z \mapsto |\,z\,|$ *wird auf dem Körper* $\mathbb{C}$ *eine* Bewertung *definiert, d. h. es gilt* :

i) $|\,z\,| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$;

ii) $|\,z_1\,z_2\,| = |\,z_1\,|\,|\,z_2\,|$;

iii) $|\,z_1 + z_2\,| \le |\,z_1\,| + |\,z_2\,|$ (Dreiecksungleichung).

Diese setzt die übliche Bewertung auf $\mathbb{R}$ *fort.*

Beweis: Trivial. $\square$

Bemerkung. Dagegen ist es bekanntlich nicht möglich, eine *Anordnung* wie im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ zu finden. Aufgrund der üblichen Regeln für angeordnete Körper müßte nämlich $z^2 > 0$ für alle $z \neq 0$, insbesondere also $1 = 1^2 > 0$ und $-1 = i^2 > 0$ und damit $0 = 1 - 1 > 0$ gelten. Widerspruch!

Kehren wir noch einmal zu den algebraischen Eigenschaften von $\mathbb{C}$ zurück. $\mathbb{C}$ ist in minimaler Weise so konstruiert, daß das Polynom $t^2 + 1$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt:

$$t^2 + 1 = (t + i)\,(t - i)\ .$$

Es könnte sein, daß wir zur Zerlegung von Polynomen höheren Grades zu einem noch größeren Körper übergehen müssen. Daß dies nicht der Fall ist, besagt der berühmte

Fundamentalsatz der Algebra (Gauß 1799). *Jedes Polynom* $P\,(z) \in \mathbb{C}\,[z]$ *vom Grad* n *zerfällt in* n *Linearfaktoren*:

$$\begin{aligned} P\,(z) &= a_0 + a_1\,z + \cdots + a_n\,z^n \quad , \quad a_j \in \mathbb{C}\,,\ a_n \neq 0 \\ &= a_n\,(z - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (z - \lambda_n)\ , \quad \lambda_j \in \mathbb{C}\ . \end{aligned}$$

Moderner ausgedrückt: *Der Körper* $\mathbb{C}$ *ist algebraisch abgeschlossen*[4].

Der *Beweis* wird später mit funktionentheoretischen Mitteln erbracht.

Bemerkung. Für $n = 1, 2, 3, 4$ gibt es sogar explizite Formeln zur Berechnung der Nullstellen λ_j (mittels Körperoperationen zwischen den Koeffizienten und Ziehen von Wurzeln). Für $n \ge 5$ kann es eine solche allgemeine Formel jedoch nicht geben, wie von Abel 1824 gezeigt wurde! Dies steht aber nicht im Widerspruch zu dem obigen Satz!

Hat $P\,(z)$ nur *reelle* Koeffizienten, so folgt aus $P\,(\lambda) = 0$ sofort

$$0 = \overline{P\,(\lambda)} = \overline{\sum_{j=0}^{n} a_j\,\lambda^j} = \sum_{j=0}^{n} \overline{a_j}\,\overline{\lambda^j} = \sum_{j=0}^{n} a_j\,\overline{\lambda}^j = P\,(\overline{\lambda})\ ,$$

d. h. mit λ ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von P. Ist λ hierbei nicht reell, so ist $\overline{\lambda} \neq \lambda$. Da offensichtlich gilt

$$(z - \lambda)\,(z - \overline{\lambda}) = z^2 - (\lambda + \overline{\lambda})\,z + \lambda\,\overline{\lambda} = z^2 - (2\ \mathrm{Re}\ \lambda)\,z + |\,\lambda\,|^2 \in \mathbb{R}\,[z]\ ,$$

so ergibt sich sofort die

[4]Zu diesem Konzept siehe auch den Anhang zu diesem Kapitel.

Folgerung 1.3 *Jedes reelle Polynom*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x]$$

besitzt eine (bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmte) Zerlegung

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_p) Q_1(x) \cdot \ldots \cdot Q_q(x)$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ *und quadratischen Polynomen*

$$Q_j(x) = x^2 + \beta_j x + \gamma_j , \quad j = 1, \ldots, q ,$$

mit reellen Koeffizienten (aber ohne reelle Nullstellen).

Bemerkung. Ist insbesondere $n \equiv 1 \bmod 2$, so muß $P(x)$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzen (was man auch einfacher mit dem *Zwischenwertsatz* der reellen Analysis einsehen kann).

Wir wollen diese Folgerung zur Beantwortung der Frage heranziehen, für welche natürlichen Zahlen n es Körper $\mathbb{K}$ gibt, die der folgenden Aussage genügen:

(F_n) $\mathbb{K}$ ist ein Oberkörper von $\mathbb{R}$, der als Vektorraum über $\mathbb{R}$ isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist.

Für $n = 1, 2$ gibt es solche Körper, nämlich $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wir wollen zeigen, daß dies (bis auf Isomorphie) die einzigen möglichen Fälle sind.

Satz 1.4 *Es sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper, der* (F_n) *erfüllt mit* $n \geq 2$. *Dann ist* $n = 2$ *und* $\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$.

Der *Beweis* erfolgt in mehreren Schritten.

1. *Jeder Körper mit* (F_2) *ist isomorph zu* $\mathbb{C}$.

Dies zeigt man wie folgt:

a) Das reelle Einselement $1 \in \mathbb{R}$ ist wegen (F_n) auch automatisch das Einselement im Körper $\mathbb{K}$; insbesondere ist $1 \neq 0$.

b) *Es gibt eine Basis* v_0, v *von* $\mathbb{K}$ *über* $\mathbb{R}$ *mit* $v_0 = 1, v^2 \in \mathbb{R}$.

Denn: $v_0 = 1 \neq 0$ läßt sich ergänzen zu einer Basis $v_0, v \notin \mathbb{R}$ von $\mathbb{K}$, da $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}^2$. Es gibt dann eine Zerlegung $v^2 = r + s\,v$ mit reellen r, s. Mit $s = 2\sigma$ folgt dann $(v - \sigma)^2 = r + \sigma^2 =: \rho \in \mathbb{R}$. Selbstverständlich sind auch $v_0 = 1$ und $v - \sigma$ über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

c) *Man kann* v *so wählen, daß* $v^2 = -1$.

Im obigen Teil kann ρ nicht Null sein, denn sonst wäre $v - \sigma = 0$ und damit $v \in \mathbb{R}$. Dann hat das Element $|\rho|^{-1/2}(v - \sigma)$ als Quadrat nur die möglichen Werte ± 1. Wir ersetzen v durch dieses neue Element. Wäre sein Quadrat gleich $+1$, so wäre $(v - 1)(v + 1) = 0$ und damit $v = \pm 1 \in \mathbb{R}$. Widerspruch!

d) $\mathbb{K}$ *ist isomorph zu* $\mathbb{C}$.

Denn: Definiere eine Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{K}$ durch $\mathbb{C} \ni a + i\,b \longmapsto a + b\,v \in \mathbb{K}$. Es ist eine leichte Übungsaufgabe nachzuweisen, daß hierdurch ein Körperisomorphismus gegeben wird.

2. *Jedes Element* $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$ *genügt einer quadratischen Gleichung über* $\mathbb{R}$.

Denn wegen $\mathbb{K} = \mathbb{R}^n$ müssen die $n + 1$ Elemente

$$v^0, v^1, \ldots, v^n$$

linear abhängig über $\mathbb{R}$ sein; es gibt also $n + 1$ reelle Zahlen $a_0, \ldots, a_n$, die nicht alle gleichzeitig 0 sind, so daß

$$a_0 v^0 + a_1 v^1 + \cdots + a_n v^n = 0 .$$

Sei a_m der nichtverschwindende Koeffizient mit größtem Index m, den wir ohne Einschränkung gleich 1 annehmen dürfen. Dann existiert also ein normiertes Polynom

$$P(t) = t^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j t^j \in \mathbb{R}[t]$$

mit $P(v) = 0$. Zerlege nun $P(t)$ wie oben in seine irreduziblen Faktoren:

$$P(t) = (t - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (t - \alpha_p) Q_1(t) \cdot \ldots \cdot Q_q(t) .$$

Dann folgt

$$(v - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (v - \alpha_p) Q_1(v) \cdot \ldots \cdot Q_q(v) = 0 .$$

Also existiert ein j oder ein k mit $v - \alpha_j = 0$ oder $Q_k(v) = 0$. Ersteres kann jedoch nicht sein wegen $v \notin \mathbb{R}$.

3. *Jeder Körper* $\mathbb{K}$ *mit* (F_n), $n \geq 2$, *enthält den Körper der komplexen Zahlen als Unterkörper.*

Es sei $w \in \mathbb{K}\backslash\mathbb{R}$ beliebig gewählt. Nach dem vorigen Teil existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß $w^2 + \alpha w + \beta = 0$. Man definiert nun

$$\mathbb{K}_0 := \{ r + s w : r, s \in \mathbb{R} \} .$$

Wegen $w^2 \in \mathbb{K}_0$ ist $\mathbb{K}_0$ offensichtlich ein kommutativer Ring mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$. $\mathbb{K}_0$ *ist sogar ein Körper*: Ist nämlich $r + s w \in \mathbb{K}_0$, $s \neq 0$ und $t \in \mathbb{R}$ zunächst beliebig, so ist $w_1 := t + w \in \mathbb{K}_0 \setminus \{ 0 \}$ und damit

$$0 \neq \rho := (r + s w) w_1 = r t - s \beta + (r + s (t - \alpha)) w ,$$

so daß also für $t = \alpha - s^{-1} r$ die Zahl ρ in $\mathbb{R}$ liegt und somit bei dieser Wahl für w_1 die Beziehung

$$\frac{1}{\rho} w_1 = (r + s w)^{-1}$$

gilt. Da $\mathbb{K}_0 \cong \mathbb{R}^2$, folgt nach dem ersten Teil $\mathbb{K}_0 \cong \mathbb{C} \subset \mathbb{K}$.

4. *Jeder Körper* $\mathbb{K}$ *mit* (F_n), $n \geq 2$, *ist isomorph zu* $\mathbb{C}$.

Ist $v \in \mathbb{K}$ beliebig, so erfüllt auch v (wie oben gezeigt) eine quadratische Gleichung über $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}_0 \cong \mathbb{C}$. Da diese Gleichung über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, folgt $v \in \mathbb{K}_0 \cong \mathbb{C}$, d. h. $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K} \subset \mathbb{K}_0$ und damit $\mathbb{K} = \mathbb{K}_0 \cong \mathbb{C}$. □

Bemerkung. Ein Körper ist für uns stets *kommutativ*. Daher ist der *Schiefkörper der Hamiltonschen Quaternionen* $\mathbb{H}$, der als $\mathbb{R}$–Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist, kein Gegenbeispiel zu dem obigen Satz. Auch $\mathbb{H}$ hat eine einfache Beschreibung als Unteralgebra der *komplexen* 2×2–Matrizen:

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} : a , b \in \mathbb{C} \right\} .$$

Wir stellen nun, ausgehend von der Bewertung $|\cdot|$ auf $\mathbb{C}$, einige *topologische* Ergebnisse zusammen. Der mit der allgemeineren Situation des euklidischen $\mathbb{R}^n$ vertraute Leser kann diese Seiten vom Inhalt her überschlagen und sollte sich nur die Bezeichnungsweisen einprägen.

Man definiert (allgemein für bewertete Körper) einen *Abstand* oder eine *Distanz* durch

$$d(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \quad \text{(Abstand von } z_1 \text{ und } z_2)$$

und beweist dann sofort:

$$d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$$

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1) \quad \text{(Symmetrie)}$$

$$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \quad \text{für alle} \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \quad \text{(Dreiecksungleichung)} .$$

Mit anderen Worten: $d(.,.)$ ist eine *Metrik* auf $\mathbb{C}$. Setzt man $z_j = x_j + i\,y_j$ mit $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$, so gilt

$$\begin{aligned} |\, z_1 - z_2 \,| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \text{euklidischer Abstand von } (x_1, y_1) \text{ und } (x_2, y_2)\,. \end{aligned}$$

Wir können somit notieren:

Der metrische Raum $(\mathbb{C}, d)$ *ist* isometrisch *zu dem Raum* $\mathbb{R}^2$ *mit der von der euklidischen Norm* $\|\cdot\|$ *induzierten euklidischen Metrik.*

Wie üblich führt man mittels $|\cdot|$ eine *Topologie* auf $\mathbb{C}$ ein. Es bezeichne

$$U_\varepsilon(z_0) = D_\varepsilon(z_0) := \{\, z \in \mathbb{C} : |\, z - z_0 \,| < \varepsilon \,\}\,, \quad z_0 \in \mathbb{C}\,, \quad \varepsilon > 0$$

die *offene Kreisscheibe* mit Mittelpunkt z_0 und Radius ε. (Wir verwenden in der Funktionentheorie lieber das Symbol D für engl. *disk* anstelle des allgemeineren B für engl. *ball*). Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ heißt *offen*, falls es für alle $z_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(z_0) \subset U$. Es ist dann $\mathfrak{T} = \{\, U : U \subset \mathbb{C} \text{ offen} \,\}$ eine *hausdorffsche Topologie* auf $\mathbb{C}$, bzgl. derer $\mathbb{C}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Wir führen nun die üblichen Bezeichnungen für Teilmengen M des topologischen Raumes $\mathbb{C}$ ein:

$$\begin{aligned} M^\circ &= \bigcup_{M \supset U \text{ offen}} U &&: \quad \textit{Inneres} \text{ von } M\,, \\ \overline{M} &= \bigcap_{M \subset A \text{ abgeschlossen}} A &&: \quad \textit{Abschluß} \text{ von } M\,, \\ \partial M &= \overline{M} \setminus M^\circ &&: \quad \textit{Rand} \text{ von } M\,. \end{aligned}$$

Als *Beispiel* betrachten wir die Kreisscheiben $D_\varepsilon(z_0)$, die wegen der Dreiecksungleichung offen sind, also mit ihrem Inneren übereinstimmen. Man berechnet ohne Schwierigkeiten auch

$$\begin{aligned} \overline{D}_\varepsilon(z_0) := \overline{D_\varepsilon(z_0)} &= \{\, z \in \mathbb{C} : |\, z - z_0 \,| \le \varepsilon \,\}\,, \\ \partial D_\varepsilon(z_0) = \partial \overline{D}_\varepsilon(z_0) &= \{\, z \in \mathbb{C} : |\, z - z_0 \,| = \varepsilon \,\}\,. \end{aligned}$$

Eine *Folge komplexer Zahlen* ist eine durch $\mathbb{N}$ indizierte Menge, genauer also eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$, geschrieben in der Form $(z_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Eine komplexe Zahl c heißt der *Limes* oder der *Grenzwert* der Folge (z_j), wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $j_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$|\, z_j - c \,| < \varepsilon$$

für alle $j \ge j_0$. Man schreibt dann auch kürzer

$$z_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} c \quad \text{oder} \quad z_j \longrightarrow c \quad \text{oder} \quad \lim_{j\to\infty} z_j = c\,.$$

Da $\mathbb{C}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{j\to\infty} z_j = c$ genau dann, wenn die Grenzwerte $\lim(\mathrm{Re}\, z_j)$ und $\lim(\mathrm{Im}\, z_j)$ existieren, und es besteht dann die Relation $c = \lim(\mathrm{Re}\, z_j) + i \lim(\mathrm{Im}\, z_j)$.

Da $\mathbb{R}^2$ ein vollständiger metrischer Raum ist, gilt dasselbe auch für $\mathbb{C}$. D. h.: Ist (z_j) eine *Cauchy–Folge* in $\mathbb{C}$, existiert also für alle $\varepsilon > 0$ ein j_0, so daß $|\, z_j - z_k \,| < \varepsilon$ für alle $j, k \ge j_0$, so ist sie konvergent: Es existiert ein $c \in \mathbb{C}$ mit $\lim z_j = c$. Da die Metrik von einer *Bewertung* herkommt, sagt man auch:

$\mathbb{C}$ *ist ein vollständig bewerteter Körper.*

Bemerkung. Neben $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gibt es noch viele andere vollständig bewertete Körper, z. B. die *Vervollständigungen* von $\mathbb{Q}$ bzgl. der p–adischen Bewertungen. Nimmt man aber noch eine weitere Eigenschaft hinzu, so werden $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ durch diese Angaben charakterisiert. Offensichtlich ist: Für alle $z \in \mathbb{R}\,,\ \mathbb{C}$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, s. d. $|\,z\,| < |\,n \cdot 1\,|$. Dies bedeutet nach Definition: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind *archimedisch bewertete Körper*.

Satz 1.5 (Ostrowski) *$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind die einzigen vollständig archimedisch bewerteten Körper.*

Bemerkung. Nicht archimedisch bewertete Körper haben dagegen bekanntlich die Eigenschaft, daß die Menge $\{\,|\,n \cdot 1\,| : n \in \mathbb{N}\,\}$ beschränkt ist, was verbessert werden kann zu $|\,n \cdot 1\,| \le 1$ und zu der *verschärften* Dreiecksungleichung $|\,a + b\,| \le \max(|\,a\,|, |\,b\,|)$, die überraschende Konsequenzen hat[5].

Die *Regeln* über das *Rechnen mit Grenzwerten* lassen sich wie folgt zusammenfassen: Es gelte $\lim a_j = a\,,\ \lim b_j = b$. Dann existieren auch die folgenden Grenzwerte mit den angegebenen Werten:

i) $\lim (a_j + b_j) = a + b\,;$ ii) $\lim (a_j\, b_j) = a\, b\,;$

iii) $\lim \overline{a_j} = \overline{a}\,;$ iv) $\lim |\,a_j\,| = |\,a\,|\,;$

v) $\lim \dfrac{1}{a_j} = \dfrac{1}{a}$, sofern $a \neq 0$ (evtl. sind endlich viele a_j mit $a_j = 0$ wegzulassen).

Wir erinnern des weiteren an die folgenden *Definitionen*: c heißt *Häufungspunkt* der Folge (z_j), falls es für alle $\varepsilon > 0$ *unendlich viele* $j \in \mathbb{N}$ mit $z_j \in D_\varepsilon(c)$ gibt. c heißt Häufungspunkt einer Menge M, wenn in jedem $D_\varepsilon(c)$ unendlich viele Elemente von M liegen. Selbstverständlich besteht auch hier ein Unterschied zwischen dem Begriff von Häufungspunkten der *Folge* (z_j) und von denen der *Menge* $\{\,z_j : j \in \mathbb{N}\,\}$.

Ein System offener Mengen $\mathfrak{U} = \{\,U_\iota : \iota \in I\,\}$ heißt eine *offene Überdeckung* der Menge $M \subset \mathbb{C}$, wenn $M \subset \bigcup_{\iota \in I} U_\iota$. Die Menge $M \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn aus jeder (offenen) Überdeckung $\mathfrak{U} = \{\,U_\iota : \iota \in I\,\}$ von M eine *endliche Teilüberdeckung* ausgewählt werden kann, d. h. wenn es eine *endliche* Teilmenge $I_0 \subset I$ gibt, s. d.

$$M \subset \bigcup_{\iota \in I_0} U_\iota\,.$$

Wie in $\mathbb{R}^2$ gelten dann auch im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen die folgenden zentralen Aussagen.

Satz 1.6 (Heine - Borel, Bolzano - Weierstraß) *Für eine Menge $K \subset \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

i) *K ist kompakt.*

ii) *K ist beschränkt und abgeschlossen.*

iii) *Jede Folge (z_j) in K besitzt mindestens einen Häufungspunkt in K.*

iv) *Zu jeder Folge (z_j) in K gibt es eine unendliche Teilfolge, die gegen einen Grenzwert in K konvergiert.*

Eine leichte Konsequenz aus dem obigen Satz ist

[5]Zu allen diesen Aussagen konsultiere man mein Vorlesungsmanuskript *Analysis I*.

Satz 1.7 *$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$ sei eine absteigende Folge nicht leerer kompakter Teilmengen von $\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j \neq \emptyset \, .$$

Beweis. Wähle je ein $z_j \in K_j$. Dann ist $(z_{j)_{j\geq k}}$ eine unendliche Teilfolge von $K_k, \, k \geq 1$, für alle fest vorgegebenen k. Sei nun c ein Häufungspunkt von (z_j). Nach Satz 1. 4 ist dann $c \in K_1$. c ist aber auch Häufungspunkt von jeder Folge $(z_{j)_{j\geq k}}$; also ist $c \in K_k$ für alle $k \geq 1$, d. h. $c \in \cap K_k$. □

Da wir eine Topologie auf $\mathbb{C}$ zur Verfügung haben, können wir ohne Schwierigkeiten über die *Stetigkeit* von komplex–wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum, insbesondere auf Teilmengen $M \subset \mathbb{C}$ sprechen. Man kann dieses allgemeine Konzept in diesem Fall aber auch umformulieren: Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge, $f : M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung (kurz: eine *komplex–wertige Funktion* oder noch kürzer: eine *Funktion*). Da für festes $z \in M$ der Wert $f(z)$ in $\mathbb{C}$ liegt, gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$f(z) = g(z) + i\,h(z) \, , \quad g(z) \, , \; h(z) \in \mathbb{R} \, .$$

Also induziert f eindeutig bestimmte reell–wertige Funktionen

$$g : M \longrightarrow \mathbb{R} \, , \quad h : M \longrightarrow \mathbb{R} \, .$$

Man schreibt $g = \mathrm{Re}\, f$, $h = \mathrm{Im}\, f$ und nennt diese Funktionen den *Realteil* bzw. den *Imaginärteil* der komplex–wertigen Funktion f. g und h sind natürlich einfacher zu erklären durch

$$\left. \begin{aligned} (\mathrm{Re}\, f)(z) &= \mathrm{Re}\,(f(z)) \\ (\mathrm{Im}\, f)(z) &= \mathrm{Im}\,(f(z)) \end{aligned} \right\} \quad z \in M \, .$$

Ebenso definiert man den *Betrag* $|f|$ und das *Argument* $\arg f$ von f durch

$$|f|(z) = |f(z)| \quad \text{bzw.} \quad (\arg f)(z) = \arg(f(z)) = \varphi(z) \, ,$$

wenn

$$f(z) = |f(z)|\,(\cos\varphi(z) + i\,\sin\varphi(z)) \, .$$

Hierdurch werden Abbildungen

$$\begin{aligned} |f| \; : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \arg f \; : \quad M &\longrightarrow \mathbb{R} \bmod 2\pi \; \cong \; [0, 2\pi) \end{aligned}$$

erklärt. Schließlich assoziiert man zu f noch die *konjugiert–komplexe Funktion* $\overline{f}$ durch

$$\overline{f}(z) = \overline{f(z)} \, .$$

Beispiele von Funktionen sind *komplexe Polynome*

$$P(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \, , \quad a_j \in \mathbb{C} \, ,$$

reelle Polynome (im Sinne von komplex–wertigen Polynomen in den beiden reellen Veränderlichen x, y)

$$f(z) := Q(z, \overline{z}) = \sum_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 0 \leq k \leq K}} a_{jk}\, z^j\, \overline{z}^k \quad = \text{komplexes Polynom in } x \text{ und } y \, .$$

Speziell für $f(z) = z^2 = (x + i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + 2\,i\,x\,y$ ist $(\mathrm{Re}\, f)(x, y) = x^2 - y^2$, $(\mathrm{Im}\, f)(x, y) = 2\,x\,y$.

Für den Bildpunkt $f(z)$ schreiben wir häufig auch w, also $w = f(z)$. Der Graph von f:

$$\mathrm{Graph}\, f = \{ (w, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : w = f(z) \} ,$$

ist eine Teilmenge von $\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$. Somit läßt sich der Graph einer komplexen komplex–wertigen Funktion f nicht mehr in unserem dreidimensionalen Raum veranschaulichen; dagegen liegt der Graph des Realteils $\mathrm{Re}\, f$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$, und Entsprechendes gilt für den Graph von $\mathrm{Im}\, f$, so daß man f durch Angabe zweier Flächen in $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen kann (die beide über (Teilen von) $\mathbb{R}^2$ liegen).

Beispiel. $f(z) = z^2$, also $g(x, y) = x^2 - y^2$, $h(x, y) = 2\,x\,y$. Hier sind die *Niveaulinien* $g = \mathrm{const.}$ und $h = \mathrm{const.}$ Hyperbeln in $\mathbb{R}^2$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Komplexwertige Funktionen kann man addieren und multiplizieren (speziell mit komplexen Zahlen): Sind f, f_1, $f_2 : M \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ gegeben, so definiert man punktweise

$$\left.\begin{aligned} (f_1 + f_2)(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ (f_1 f_2)(z) &= f_1(z)\, f_2(z) \\ (cf)(z) &= c\, f(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } z \in M .$$

Auch $\dfrac{f_1}{f_2}$ ist definiert, falls $f_2(z) \neq 0$ für alle $z \in M$.

Definition. Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, $f : M \to \mathbb{C}$ sei eine Funktion, und $z_0 \in M$ sei ein fest gewählter Punkt. Dann heißt f *stetig* in z_0, wenn für alle (offenen) Umgebungen V von $w_0 = f(z_0)$ eine Umgebung U von z_0 existiert mit

$$f(U \cap M) \subset V .$$

Da in jeder Umgebung eine ε–Kreisscheibe enthalten ist, folgt sofort:

Die Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \in M$ genau dann, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß

$$|\, f(z) - f(z_0)\, | < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad z \in M \quad \text{mit} \quad |\, z - z_0\, | < \delta .$$

f heißt *stetig* auf M, falls f stetig ist in z_0 für alle $z_0 \in M$. Dies ist wie im Reellen gleichbedeutend mit der folgenden Aussage: Für jede offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ mit $f^{-1}(V) = U \cap M$ (Urbilder offener Mengen sind relativ offen in M).

Wie in jedem metrischen Raum gilt das *Folgenkriterium*: $f : M \to \mathbb{C}$ ist stetig in z_0 genau dann, wenn für jede Folge (z_j) in M mit $\lim z_j = z_0$ gilt:

$$\lim_{j\to\infty} f(z_j) = f(z_0) = f(\lim_{j\to\infty} z_j) .$$

Aus

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(z_0) + i\, \mathrm{Im}\, f(z_0) = f(z_0) &= \lim_{j\to\infty} f(z_j) \\ &= \lim_{j\to\infty} \mathrm{Re}\, f(z_j) + i \lim_{j\to\infty} \mathrm{Im}\, f(z_j) \end{aligned}$$

folgt $\lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{Re}\, f(z_j) = \mathrm{Re}\, f(z_0)$ und $\lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{Im}\, f(z_j) = \mathrm{Im}\, f(z_0)$. Also haben wir die

Folgerung 1.8 *Eine Funktion $f : M \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z_0 \in M$ genau dann, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

a) $\mathrm{Re}\, f$ *und* $\mathrm{Im}\, f : M \to \mathbb{R}$ *sind stetig in* $z_0 \in M$;

b) $\overline{f}$ *ist stetig in* $z_0 \in M$.

Unter diesen Voraussetzungen ist auch $|\, f \,|$ *stetig in* z_0 .

Aus dem Folgenkriterium und den Rechenregeln für Grenzwerte folgt sofort:

Satz 1.9 *Die Funktionen* $f,\, g : M \to \mathbb{C}$ *seien stetig in* $z_0 \in M$. *Dann sind auch* $f + g$, $f \cdot g$ *stetig in* z_0 . *Ist* $g\,(z_0) \neq 0$, *so ist* $g \neq 0$ *in einer Umgebung* $U \cap M$ *von* z_0 . *Insbesondere ist dann die Funktion* f/g *definiert auf* $U \cap M$ *und stetig in* z_0 .

Beweis (z. B. der letzten Aussage). Wegen $g\,(z_0) \neq 0$ ist $\varepsilon := (1/2)\,|\,g\,(z_0)\,| > 0$. Zu diesem ε gibt es ein $\delta > 0$, s. d. für alle $z \in M$ mit $|\, z - z_0 \,| < \delta$ gilt: $|\, g\,(z) - g\,(z_0) \,| < \varepsilon$. Wäre $g\,(z) = 0$ für ein solches z , so würde folgen:

$$0 < |\, g\,(z_0) \,| < \varepsilon = \frac{1}{2}\,|\, g\,(z_0) \,| \, .$$

Widerspruch! Also ist $g\,(z) \neq 0$ für alle $z \in M \cap \{\, z \in \mathbb{C} : |\, z - z_0 \,| < \delta \,\}$. Ist nun $z_j \in M$, $\lim z_j = z_0 \in M$, so folgt

$$\lim_{j\to\infty} \frac{f}{g}\,(z_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{f\,(z_j)}{g\,(z_j)} = \frac{\lim f\,(z_j)}{\lim g\,(z_j)} = \frac{f\,(z_0)}{g\,(z_0)} = \frac{f}{g}\,(z_0) \, . \qquad \square$$

Komplexwertige Funktionen kann man auch zusammensetzen: Sind $f : M \to \mathbb{C}$, $g : N \to \mathbb{C}$, $M, N \subset \mathbb{C}$, Funktionen mit $f\,(M) \subset N$ (kurz $f : M \to N$), so ist $(g \circ f)\,(z) := g\,(f\,(z))$ wohldefiniert und liefert eine Funktion $g \circ f : M \to \mathbb{C}$. Klar ist:

Ist f *stetig in* z_0 , g *stetig in* $w_0 = f\,(z_0)$, *so ist* $g \circ f$ *stetig in* z_0 .

Reellwertige stetige Funktionen auf Kompakta nehmen ihr Maximum und Minimum an. Daraus folgt im Komplexen das Folgende.

Satz 1.10 *Die Funktion* $f : K \to \mathbb{C}$ *sei stetig auf dem Kompaktum* $K \subset \mathbb{C}$. *Dann nehmen die Funktionen* $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $|\, f \,|$ *auf* K *ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere ist* f *(dem Betrage nach) beschränkt, d. h. es existiert eine reelle Zahl* $R \geq 0$ *, s. d.*

$$|\, f\,(z) \,| \leq R \quad \textit{für alle} \quad z \in K \, .$$

Hat außerdem f *auf* K *keine Nullstelle, so existiert ein* $\delta > 0$ *mit*

$$|\, f\,(z) \,| \geq \delta \quad \textit{für alle} \quad z \in K \, .$$

Mit der *Differenzierbarkeit* werden wir uns ausführlich in dem nächsten Kapitel auseinandersetzen. Wir erinnern hier nur noch an einen weiteren *topologischen* Begriff: Ein *Weg* (auch eine *Kurve* genannt) in $M \subset \mathbb{C}$ ist ein Tripel $(I,\, \gamma,\, \gamma\,(I))$ mit $I = [\, a,\, b\,] \subset \mathbb{R}$, $\gamma : I \to M$ stetig. $\gamma\,(a)$ heißt *Anfangs–*, $\gamma\,(b)$ *Endpunkt* des Weges, $\gamma\,(I)$ seine *Spur*, die wir auch manchmal mit $\mathrm{spur}\,\gamma$ oder $|\,\gamma\,|$ bezeichnen. I. a. notieren wir das Tripel $(I,\, \gamma,\, \gamma\,(I))$ einfach mit dem Symbol γ . Zwei Punkte $z_0,\, z_1 \in M$ heißen in M *verbindbar*, wenn es einen Weg $\gamma : I \to M$ mit $z_0 = \gamma\,(a)$, $z_1 = \gamma\,(b)$, $I = [\, a,\, b\,]$ gibt. Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation. $M \subset \mathbb{C}$ heißt *wegweise zusammenhängend*, wenn je zwei Punkte von M in M verbindbar sind. Offene Mengen in $\mathbb{C}$ nennen wir auch *Bereiche*, zusammenhängende Bereiche heißen *Gebiete*. - Es gilt:

Satz 1.11 *Jeder Bereich in* $\mathbb{C}$ *ist höchstens abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten Gebieten. Ein Bereich ist genau dann ein Gebiet, wenn aus*

$$G = U_1 \cup U_2 \, , \quad U_1 \, , \, U_2 \;\; \textit{offen} \, , \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset \, ,$$

folgt : $U_1 = \emptyset$ *oder* $U_2 = \emptyset$.

Anhang: Ein konzeptioneller Beweis für die Einzigkeit von $\mathbb{C}$

Wir wollen in diesem Anhang die Überlegungen des letzten Kapitels zu Körpern mit der Eigenschaft (F_n) in einen stärker algebraischen Kontext stellen.

Definition. Man nennt einen Oberkörper $\mathbb{K}$ eines Körpers $\mathbb{K}_0$ auch eine *Körpererweiterung* von $\mathbb{K}_0$. Eine Körpererweiterung $\mathbb{K}$ von $\mathbb{K}_0$ heißt *algebraisch*, wenn jedes Element $v \in \mathbb{K}$ *algebraisch* über $\mathbb{K}_0$ ist, d. h. wenn es ein Polynom $P_v \in \mathbb{K}_0[\,x\,]$ gibt mit $P_v(v) = 0$.

Beispiel. Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$.

Man kann diese Behauptung leicht unmittelbar verifizieren. Sie ist aber auch eine Folgerung aus einem viel allgemeineren Sachverhalt, den wir im Prinzip schon weiter oben verwendet haben.

Definition. Eine Körpererweiterung $\mathbb{K}$ von $\mathbb{K}_0$ heißt *endlich*, wenn $\mathbb{K}$ als $\mathbb{K}_0$–Vektorraum endlich–dimensional ist.

Satz 1.12 *Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.*

Bemerkung. Man nennt solche Körpererweiterungen deshalb auch *endlich–algebraisch*.

Beweis. Dieser folgt exakt Schritt 2 in Satz 4: Ist die Dimension von $\mathbb{K}$ über $\mathbb{K}_0$ gleich n, so sind für $v \in \mathbb{K}$ die Elemente $v^0, v^1, \ldots, v^n$ linear abhängig über $\mathbb{K}_0$. Den Rest des Beweises kann man wörtlich oben kopieren. $\square$

Definition. Ein Körper $\mathbb{K}$ heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn er keine *echten* algebraischen Körpererweiterungen besitzt.

Satz 1.13 *Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\mathbb{K}$ eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{C}$. Dann erfüllt jedes Element $v \in \mathbb{K}$ eine polynomiale Gleichung $P(v) = 0$ mit einem Polynom $P \in \mathbb{C}[\,x\,]$. Wegen der Kommutativität von $\mathbb{K}$ impliziert die Zerlegung

$$P(x) = c \cdot (x - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)\,, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}\,,$$

eine entsprechende Zerlegung nach Einsetzen von v:

$$P(v) = c \cdot (v - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (v - \lambda_n)\,.$$

Somit muß die rechte Seite zusammen mit der linken verschwinden und damit v gleich einem der λ_j sein, insbesondere also in $\mathbb{C}$ liegen. $\square$

Bemerkung. Man zeigt umgekehrt in der Körpertheorie, daß über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$ jedes Polynom in Linearfaktoren zerfallen muß. Dazu benutzt man die Tatsache, daß man zu einem vorgegebenen Polynom über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$ stets eine Körpererweiterung von $\mathbb{K}$ konstruieren kann, in der das Polynom in Linearfaktoren zerfällt (*Zerfällungskörper des Polynoms*).

Unsere früheren Überlegungen zu Körpern mit der Eigenschaft (F_n) können wir jetzt wie folgt umformulieren:

Satz 1.14 *Jede endliche Körpererweiterung von $\mathbb{R}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $\mathbb{K}$ eine solche Erweiterung. Enthält $\mathbb{K}$ ein Element v mit $v^2 = -1$, so enthält, wie wir oben bewiesen haben, $\mathbb{K}$ einen Unterkörper, der zu $\mathbb{C}$ isomorph ist. Da $\mathbb{K}$ endlich über $\mathbb{R}$ ist, muß $\mathbb{K}$ auch insbesondere endlich über diesem Unterkörper sein, und wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{K} \cong \mathbb{C}$. Im anderen Fall ist das Polynom $x^2 + 1$ über $\mathbb{K}[x]$ unzerlegbar, also ein Primelement. Folglich ist $\mathbb{K}_1 := \mathbb{K}[x]/(x^2 + 1)$ sowohl ein Oberkörper von $\mathbb{K}$ als auch von $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$. Da die Dimension von $\mathbb{K}_1$ über $\mathbb{K}$ gleich 2 ist, ist die Dimension von $\mathbb{K}_1$ über $\mathbb{R}$ endlich und damit auch die Dimension von $\mathbb{K}_1$ über $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$. Wegen der algebraischen Abgeschlossenheit von $\mathbb{C}$ ist dann aber $\mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$ und damit $\mathbb{K}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ enthält. Da das Polynom $x^2 + 1$ in $\mathbb{K}$ nicht zerfällt, kann die Dimension von $\mathbb{K}$ über $\mathbb{R}$ nicht 2 sein. Sie ist also 1 und damit $\mathbb{K} \cong \mathbb{R}$. $\square$

2 Reell und komplex differenzierbare Funktionen

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $z_0 = x_0 + i\,y_0 \in U$ sei ein beliebiger Punkt, und $g : U \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion. g heißt bekanntlich *(total) reell differenzierbar* in z_0, falls es Funktionen

$$A_1\,,\ A_2 : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die in z_0 stetig sind, so daß

$$g\,(z) \,=\, g\,(z_0) \,+\, A_1(z)\,(x \,-\, x_0) \,+\, A_2(z)\,(y \,-\, y_0) \quad \text{für alle} \quad z \in U\,.$$

Warnung. Die Funktionen A_1, A_2 sind auf U *nicht eindeutig bestimmt*! Dagegen sind *die Werte* $A_1(z_0)$ und $A_2(z_0)$ durch die Funktion g wohlbestimmt; denn es ist z. B.

$$A_1(z_0) \,=\, \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0\\ \mathrm{Im}\,z=y_0}} A_1(z) \,=\, \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0\\ \mathrm{Im}\,z=y_0}} \frac{g\,(z) \,-\, g\,(z_0)}{x \,-\, x_0} \,=\, \frac{\partial g}{\partial x}(z_0)\ ;$$

entsprechend ergibt sich

$$A_2(z_0) \,=\, \frac{\partial g}{\partial y}(z_0)\,.$$

Insbesondere erhalten wir: Ist g total reell differenzierbar in z_0, so ist g dort auch partiell differenzierbar in z_0. Die Umkehrung gilt jedoch bekanntlich nicht!

Es sei nun $f : U \to \mathbb{C}$ komplex–wertig. Wir nennen dann f *reell differenzierbar* in z_0, wenn $g = \mathrm{Re}\, f$ und $h = \mathrm{Im}\, f$ in z_0 reell differenzierbar sind. Durch Addition der definierenden Gleichungen

$$\begin{aligned} g\,(z) &= g\,(z_0) \,+\, A_1(z)\,(x \,-\, x_0) \,+\, A_2(z)\,(y \,-\, y_0) \\ h\,(z) &= h\,(z_0) \,+\, B_1(z)\,(x \,-\, x_0) \,+\, B_2(z)\,(y \,-\, y_0) \end{aligned}$$

ergibt sich dann

$$f\,(z) \,=\, f\,(z_0) \,+\, C_1(z)\,(x \,-\, x_0) \,+\, C_2(z)\,(y \,-\, y_0)\,,$$

wobei

$$C_1(z) \,=\, A_1(z) \,+\, i\,B_1(z) \quad \text{und} \quad C_2(z) \,=\, A_2(z) \,+\, i\,B_2(z)$$

auf U erklärt und in z_0 stetig sind. Umgekehrt können wir natürlich genauso schließen und gewinnen auf diese Weise das folgende

Lemma 2.1 *Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in \mathbb{C}$ genau dann reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige Funktionen C_1, $C_2 : U \to \mathbb{C}$ gibt mit*

$$f\,(z) \,=\, f\,(z_0) \,+\, C_1(z)\,(x \,-\, x_0) \,+\, C_2(z)\,(y \,-\, y_0)\,, \quad z \in U\,.$$

Wir setzen unter den vorigen Voraussetzungen (für $f = g + i\,h$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\,(z_0) &= C_1(z_0) \,=\, \frac{\partial g}{\partial x}\,(z_0) \,+\, i\,\frac{\partial h}{\partial x}\,(z_0)\,, \\ \frac{\partial f}{\partial y}\,(z_0) &= C_2(z_0) \,=\, \frac{\partial g}{\partial y}\,(z_0) \,+\, i\,\frac{\partial h}{\partial y}\,(z_0)\,. \end{aligned}$$

Es gilt also allgemein per definitionem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(g \,+\, i\,h) \,=\, \frac{\partial g}{\partial x} \,+\, i\,\frac{\partial h}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\,(g \,+\, i\,h) \,=\, \frac{\partial g}{\partial y} \,+\, i\,\frac{\partial h}{\partial y}\,.$$

Wir kürzen ferner wie gewöhnlich ab:

$$g_x := \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

Man sieht dann sofort: Sind $f,\, f_1,\, f_2 \,:\, U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ reell differenzierbar, so auch $f_1 + f_2,\, cf,\, f_1\, f_2,\, \overline{f}$, und es gelten die folgenden Regeln:

$$\begin{aligned}
(f_1 + f_2)_x &= f_{1,x} + f_{2,x} \\
(c\, f)_x &= c\, f_x \\
(f_1\, f_2)_x &= f_{1,x}\, f_2 + f_1\, f_{2,x} \\
\overline{f}_x &= \overline{(f_x)}
\end{aligned}$$

und entsprechend für die partiellen Ableitungen nach der Variablen y.

Bei der bisherigen Behandlung der reellen Differenzierbarkeit ist die Verwendung *reeller* Koordinaten störend. Wir beweisen deshalb den folgenden Satz, der uns sofort ein bequemes Hilfsmittel zur Charakterisierung von *komplex differenzierbaren* Funktionen an die Hand gibt.

Satz 2.2 *Eine Funktion $f \,:\, U \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in U$ genau dann reell differenzierbar, wenn es in z_0 stetige Funktionen $\Delta_1,\, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$ gibt, s. d. für alle $z \in U$ gilt:*

$$(*) \qquad f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)\,(z - z_0) + \Delta_2(z)\,(\overline{z} - \overline{z_0})\,.$$

Es gilt dann

$$\Delta_1(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(z_0) - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(z_0)\right),$$

$$\Delta_2(z_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,(z_0) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(z_0)\right).$$

Insbesondere sind die Werte $\Delta_1(z_0)$ und $\Delta_2(z_0)$ eindeutig durch f bestimmt.

Beweis. Sei f reell differenzierbar, d. h. es gelte

$$f(z) = f(z_0) + C_1(z)\,(x - x_0) + C_2(z)\,(y - y_0)$$

mit den üblichen Zusatzbedingungen. Setzt man dann $z = x + i\,y$, d. h. $x = (1/2)\,(z + \overline{z})$, $y = (1/2i)\,(z - \overline{z})$, und entsprechend für z_0, so ergibt sich sofort

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)\,(z - z_0) + \Delta_2(z)\,(\overline{z} - \overline{z_0})\,,$$

wobei die Funktionen

$$\Delta_1(z) = \frac{1}{2}\,(C_1(z) - i\,C_2(z)) \quad \text{und} \quad \Delta_2(z) = \frac{1}{2}\,(C_1(z) + i\,C_2(z))$$

auf U erklärt und in z_0 stetig sind mit

$$\Delta_1(z_0) = \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) - i\,f_y(z_0)) \quad \text{und} \quad \Delta_2(z_0) = \frac{1}{2}\,(f_x(z_0) + i\,f_y(z_0))\,.$$

Gilt andererseits

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)\,(z - z_0) + \Delta_2(z)\,(\overline{z} - \overline{z_0})\,,$$

so folgt umgekehrt eine Darstellung der gewünschten Art mit

$$C_1(z) = \Delta_1(z) + \Delta_2(z) \quad \text{und} \quad C_2(z) = i\,(\Delta_1(z) - \Delta_2(z))\,. \qquad \square$$

Definition und *Bemerkung*. Aufgrund der Darstellung $(*)$ ist es naheliegend zu setzen:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := f_z(z_0) := \Delta_1(z_0) = \frac{1}{2}(f_x - i\, f_y)(z_0)\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := f_{\overline{z}}(z_0) := \Delta_2(z_0) = \frac{1}{2}(f_x + i\, f_y)(z_0)\,.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ und $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ heißen die *Wirtinger–Ableitungen* von f nach z bzw. $\overline{z}$ an der Stelle z_0. Natürlich lassen sich die Wirtinger–Ableitungen auch durch Ableitungen des Real– und Imaginärteils von $f = g + i\,h$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}((g_x + i\,h_x) - i\,(g_y + i\,h_y)) \\ &= \frac{1}{2}(g_x + h_y) + \frac{i}{2}(h_x - g_y)\,, \\ f_{\overline{z}} &= \frac{1}{2}(f_x + i\,f_y) = \frac{1}{2}((g_x + i\,h_x) + i\,(g_y + i\,h_y)) \\ &= \frac{1}{2}(g_x - h_y) + \frac{i}{2}(h_x + g_y)\,. \end{aligned}$$

Satz 2.3 (Rechenregeln für Wirtinger - Ableitungen) *Es seien* $f\,,\ f_1\,,\ f_2 : U \to \mathbb{C}$ *in* $z_0 \in U$ *reell differenzierbar,* $c \in \mathbb{C}$. *Dann folgt :* $f_1 + f_2\,,\ c\,f\,,\ f_1\,f_2\,,\ \overline{f}$ *sind in* z_0 *reell differenzierbar, und es gelten die folgenden Regeln :*

$$\frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial z}(z_0)\,,\quad \frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}(z_0)\,,$$

$$\frac{\partial(c\,f)}{\partial z}(z_0) = c\,\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,,\quad \frac{\partial(c\,f)}{\partial \overline{z}}(z_0) = c\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)\,,$$

d. h. die Ableitungen $\dfrac{\partial}{\partial z}\,,\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ *sind* $\mathbb{C}$*–linear. Weiter gilt für die Wirtingerableitungen die* Produktregel

$$\frac{\partial(f_1 \cdot f_2)}{\partial z}(z_0) = f_1(z_0)\,\frac{\partial f_2}{\partial z}(z_0) + f_2(z_0)\,\frac{\partial f_1}{\partial z}(z_0)\,,$$

$$\frac{\partial(f_1 \cdot f_2)}{\partial \overline{z}}(z_0) = f_1(z_0)\,\frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}}(z_0) + f_2(z_0)\,\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}}(z_0)\,.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)}\,,\qquad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0) = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)}\,.$$

Ist $f : U \to \mathbb{C}$ *in* $z_0 \in U\,,\ g : V \to \mathbb{C}$ *in* $w_0 = f\,(z_0)$ *reell differenzierbar, und gilt* $f\,(U) \subset V$, *so ist auch* $g \circ f$ *in* z_0 *reell differenzierbar, und es gelten die* Kettenregeln :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial w}(w_0)\,\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(w_0)\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial z}(z_0)\,,$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}}(z_0) = \frac{\partial g}{\partial w}(w_0)\,\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(w_0)\,\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}(z_0)\,.$$

Der *Beweis* kann mit Hilfe der reellen partiellen Ableitungen $f_x\,,\ f_y$ und den Sätzen im Reellen bewiesen werden. Es geht aber viel schneller mit direkter Anwendung der Definition. Aus

$$f_1(z) = f_1(z_0) + \Delta_1(z)\,(z - z_0) + \Delta_2(z)\,(\overline{z} - \overline{z_0})$$

$$f_2(z) = f_2(z_0) + \Omega_1(z)\,(z - z_0) + \Omega_2(z)\,(\overline{z} - \overline{z_0})$$

folgt zum Beispiel sofort

$$\begin{aligned} f_1(z)\cdot f_2(z) \;=\; & f_1(z_0)\cdot f_2(z_0)+\\ & \{f_1(z_0)\,\Omega_1(z) \,+\, f_2(z_0)\,\Delta_1(z) \,+\, \Delta_1(z)\,\Omega_1(z)\,(z\,-\,z_0)+\\ & (\Delta_1(z)\,\Omega_2(z) \,+\, \Omega_1(z)\,\Delta_2(z))\,(\overline{z}\,-\,\overline{z_0})\}\,(z\,-\,z_0)+\\ & \{f_1(z_0)\,\Omega_2(z) \,+\, f_2(z_0)\,\Delta_2(z) \,+\, \Delta_2(z)\,\Omega_2(z)\,(\overline{z}\,-\,\overline{z_0})\}\,(\overline{z}\,-\,\overline{z_0}) \end{aligned}$$

und damit die reelle Differenzierbarkeit des Produktes samt der Relation

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1\cdot f_2)}{\partial z}\,(z_0) \;&=\; f_1(z_0)\,\Omega_1(z_0) \,+\, f_2(z_0)\,\Delta_1(z_0)\\ &=\; f_1(z_0)\,\frac{\partial f_2}{\partial z}\,(z_0) \,+\, f_2(z_0)\,\frac{\partial f_1}{\partial z}\,(z_0)\;. \end{aligned}$$

Die anderen Aussagen beweist man nach dem gleichen Muster. □

Ein ganz wichtiger Spezialfall liegt vor, wenn die Wirtinger–Ableitung $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,(z_0)$ nach der konjugiert–komplexen Variablen verschwindet. Wir formulieren äquivalente Bedingungen.

Satz 2.4 *Es sei* $f : U \to \mathbb{C}$ *gegeben,* z_0 *sei ein fest gewählter Punkt in* U *. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent* :

i) f *ist in* z_0 *reell differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,(z_0) \;=\; 0\;.$$

ii) f *ist in* z_0 *reell differenzierbar, und für* $g = \mathrm{Re}\, f$ *und* $h = \mathrm{Im}\, f$ *gelten die* Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen *in* z_0 :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}\,(z_0) \;&=\; \frac{\partial h}{\partial y}\,(z_0)\;,\\[2ex] \frac{\partial g}{\partial y}\,(z_0) \;&=\; -\,\frac{\partial h}{\partial x}\,(z_0)\;. \end{aligned}\right.$$

iii) *Es gibt eine in* z_0 *stetige Funktion* $\Delta : U \to \mathbb{C}$ *, so daß für alle* $z \in U$ *gilt* :

$$f\,(z) \;=\; f\,(z_0) \,+\, \Delta\,(z)\,(z\,-\,z_0)\;.$$

iv) *Es existiert der Grenzwert des* komplexen Differentialquotienten :

$$f'(z_0) \;:=\; \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\neq z_0}} \frac{f\,(z)\,-\,f\,(z_0)}{z\,-\,z_0}\;.$$

Definition: Ist eine der Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, so heißt f in z_0 *komplex differenzierbar* und $f'(z_0)$ heißt die *komplexe Ableitung* von f in z_0 .

Zusatz zu Satz 4. *Ist* f *in* z_0 *komplex differenzierbar, so gilt*

$$\frac{df}{dz}\,(z) \;:=\; f'(z_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial z}\,(z_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,(z_0) \;=\; \frac{1}{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(z_0) \;=\; g_x(z_0) \,+\, i\,h_x(z_0) \;=\; h_y(z_0) \,-\, i\,g_y(z_0)\;.$$

Beweis von Satz 4. Die Äquivalenz von ii) und i) ist trivial, ebenso die Implikation iii) $\Longrightarrow$ i). Ferner zeigt man iii) $\Longleftrightarrow$ iv) wie im Reellen, indem man setzt:

$$\Delta(z) := \begin{cases} f'(z_0) & , \quad z = z_0 \, ; \\ \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} & , \quad z \neq z_0 \, . \end{cases}$$

Es bleibt also nur noch i) $\Longrightarrow$ iii) zu beweisen. Es gelte also

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)(z - z_0) + \Delta_2(z)(\overline{z} - \overline{z_0})$$

für $z \in U$, wobei Δ_1, Δ_2 stetig in z_0 sind und Δ_2 in z_0 verschwindet. Für $z \neq z_0$ gilt dann

$$f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$$

mit

$$\Delta(z) := \Delta_1(z) + \Delta_2(z) \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \, .$$

Es bleibt nur noch zu zeigen: Δ ist stetig in z_0 (ergänzbar). Dies folgt aber zusammen mit der Stetigkeit von Δ_1 in z_0 sofort aus

$$\left| \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} \right| = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \to z_0} \Delta_2(z) = \Delta_2(z_0) = 0 \, . \qquad \square$$

Aus Satz 4 und den Rechenregeln für Wirtinger–Ableitungen folgt unmittelbar der folgende Satz über komplexe Ableitungen:

Satz 2.5 *Es seien f, f_1, $f_2 : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ komplex differenzierbar, $c \in \mathbb{C}$. Dann folgt : $f_1 + f_2$, $c f$, $f_1 \cdot f_2$ sind in z_0 komplex differenzierbar, und für die komplexen Ableitungen gilt :*

$$\frac{d(f_1 + f_2)}{dz}(z_0) = \frac{df_1}{dz}(z_0) + \frac{df_2}{dz}(z_0) \, ,$$

$$\frac{d(c f)}{dz}(z_0) = c \, \frac{df}{dz}(z_0) \, ,$$

$$\frac{d(f_1 \cdot f_2)}{dz}(z_0) = f_1(z_0) \frac{df_2}{dz}(z_0) + f_2(z_0) \frac{df_1}{dz}(z_0) \, .$$

Ist zusätzlich $g : V \to \mathbb{C}$ in $w_0 = f(z_0)$ komplex differenzierbar und $f(U) \subset V$, so ist auch $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt die Kettenregel :

$$\frac{d(g \circ f)}{dz}(z_0) = \frac{dg}{dw}(w_0) \frac{df}{dz}(z_0) \, .$$

Beweis (z. B. für die *Kettenregel*). Da f in z_0 und g in w_0 komplex differenzierbar sind, ist insbesondere

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0 \, , \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}(w_0) = 0 \, .$$

Anwendung der Kettenregel für Wirtinger–Ableitungen liefert dann

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}} \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} = 0 \quad \text{in} \quad z_0 \, .$$

Also ist $g \circ f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es ist dort

$$\frac{d(g\circ f)}{dz} = \frac{\partial(g\circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \overline{w}}\cdot\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \frac{dg}{dw}\cdot\frac{df}{dz}\ . \qquad \square$$

Selbstverständlich läßt sich dies alles auch direkt mit der Definition der komplexen Differenzierbarkeit wie im Reellen herleiten. Genauso mühelos gewinnt man den folgenden

Satz 2.6 *Wenn f in z_0 komplex (oder auch reell) differenzierbar ist, so ist f dort auch stetig.*

Beweis. Dies folgt sofort aus der charakterisierenden Gleichung $(*)$. $\square$

Satz 2.7 *$f : U \to \mathbb{C}$ sei komplex differenzierbar in $z_0 \in U$, und $f(z_0)$ sei von 0 verschieden. Dann existiert eine offene Umgebung $V = V(z_0) \subset U$, s. d. $1/f$ auf V erklärt ist. Ferner ist die Funktion $1/f$ in z_0 komplex differenzierbar, und es gilt*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\,\frac{f'(z_0)}{(f(z_0))^2}\ .$$

Beweis. Der 1. Teil folgt aus der Stetigkeit von f in z_0. Die Darstellung $f(z) = f(z_0) + \Delta(z)(z - z_0)$ und die Stetigkeit von Δ in z_0 implizieren, daß

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{f(z_0)} = \frac{f(z_0) - f(z)}{f(z)\,f(z_0)} = -\left(\frac{\Delta(z)}{f(z)\,f(z_0)}\right)(z - z_0)\ ,$$

und die Funktion

$$-\left(\frac{\Delta(z)}{f(z)\,f(z_0)}\right)$$

ist stetig in z_0 mit dem angegebenen Wert. $\square$

Wir wollen zunächst einige *Beispiele* betrachten:

1. „Reelle“ Polynome (in dem oben erläuterten Sinne) lassen sich stets schreiben in der Form

$$\sum_{\substack{j,k\\ \text{endlich}}} c_{jk}\, z^j\, \overline{z}^k\ , \quad c_{jk} \in \mathbb{C}$$

und sind reell differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$. Denn

$$z = z_0 + 1\,(z - z_0) \quad \text{impliziert} \quad \frac{\partial z}{\partial z}(z_0) = 1\ , \quad \frac{\partial z}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0\ ,$$

$$\overline{z} = \overline{z_0} + 1\,(\overline{z} - \overline{z_0}) \quad \text{impliziert} \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial z}(z_0) = 0\ , \quad \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1\ ;$$

also sind z und $\overline{z}$ reell differenzierbar in jedem Punkt z_0 und damit auch jede endliche Summe von Produkten.

2. Reelle Polynome sind i. a. nicht komplex differenzierbar: Wähle z. B.

$$f(z) = \overline{z}\ .$$

Dann ist (siehe oben) $\dfrac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}}(z_0) = 1$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}$, d. h. f ist in keinem Punkt komplex differenzierbar, aber überall stetig.

Man beachte, daß *in einer reellen Veränderlichen stetige Funktionen, die nirgends differenzierbar sind, sehr schwer zu konstruieren sind*!

Wir sehen also schon jetzt: Komplexe Differenzierbarkeit ist eine weit stärkere Bedingung als reelle Differenzierbarkeit (im Reellen).

3. Komplexe Polynome

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

sind überall komplex differenzierbar; denn aus 1. folgt: z ist überall komplex differenzierbar, also auch z^2, $z^3, \ldots$, etc. Damit ist P komplex differenzierbar, und es gilt:

$$P'(z) = \frac{dP}{dz}(z) = a_1 + 2\,a_2\,z + \cdots + n\,a_n\,z^{n-1} .$$

4. Es gibt stetige Funktionen, die nur in einzelnen Punkten komplex differenzierbar sind:

$$f(z) = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$$

ist nach 1. reell differenzierbar, und nach den Rechenregeln für Wirtinger–Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z\,\overline{z}) = z\,\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} + \overline{z}\,\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = z \cdot 1 + \overline{z} \cdot 0 = z ,$$

was nur im Nullpunkt gleich Null ist.

Da auch solche Funktionen wie in 4. nicht besonders gute Eigenschaften haben, gibt man die folgende

Definition. Sei $B \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, $f : B \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in B$. Dann heißt f *holomorph* im Punkte z_0, falls f in einer Umgebung $U = U(z_0)$ von z_0 komplex differenzierbar ist. f heißt *holomorph auf* B, falls f holomorph in $z_0 \in B$ ist für alle $z_0 \in B$, d. h. wenn f in jedem Punkt $z_0 \in B$ komplex differenzierbar ist. Ist $B = \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so heißt f eine *ganze* Funktion.

Bezeichnung. Ist $B \subset \mathbb{C}$ ein Bereich, so schreiben wir

$$\mathcal{O}(B) := \{\, f : B \longrightarrow \mathbb{C} \,;\; f \text{ holomorph} \,\} .$$

Satz 2.8 *$\mathcal{O}(B)$ ist (bezüglich der üblichen Verknüpfungen) eine (kommutative) $\mathbb{C}$–Algebra (mit 1).*

Beispiel. Jedes komplexe Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ liegt in $\mathcal{O}(\mathbb{C})$.

Bemerkung. Ist $f \in \mathcal{O}(B)$, so ist für alle $z \in B$ die Ableitung $f'(z)$ wohldefiniert. f liefert also eine neue Abbildung (Funktion)

$$f' : \begin{cases} B \longrightarrow \mathbb{C} \\ \;z \longmapsto f'(z) . \end{cases}$$

Eine der ganz wichtigen Folgerungen der Funktionentheorie ist (Beweis später), daß $f' \in \mathcal{O}(B)$. Infolgedessen existiert dann auch f'' etc. (man beachte den Unterschied zur Theorie im Reellen!!). Insbesondere ist also die Ableitung einer holomorphen Funktion automatisch stetig.

Wenn wir die letzte Bemerkung schon voraussetzen, können wir die Holomorphie einer komplex–wertigen Funktion vollständig in Termen der reellen Analysis formulieren.

Satz 2.9 *Es gilt $f = g + i\,h \in \mathcal{O}(B)$ genau dann, wenn g, $h : B \to \mathbb{R}$ auf B stetig partiell differenzierbar sind und die Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen gelten:*

$$g_x(x, y) = h_y(x, y) , \quad g_y(x, y) = -\,h_x(x, y) \quad \textit{für alle} \quad (x, y) \in B .$$

Man kann also sagen: Die Theorie der holomorphen Funktionen ist ein Teilgebiet der Theorie (von Systemen) partieller Differentialgleichungen (nämlich der Theorie der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen).

Bemerkung. Die reelle Funktionalmatrix $J_f^{\mathbb{R}}$ einer komplex differenzierbaren Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ ist wegen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen stets von der Form

$$J_f^{\mathbb{R}} := \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ -g_y & g_x \end{pmatrix} .$$

Dies ist nur eine andere Manifestation der Tatsache, daß ein $\mathbb{R}$–linearer Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ genau dann $\mathbb{C}$–linear ist, wenn er sich in der kanonischen $\mathbb{R}$–Basis $1, i$ von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ in der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

darstellen läßt (siehe Kapitel 1). Insbesondere ist die reelle Funktional–Determinante $\det J_f^{\mathbb{R}}$ einer holomorphen Funktion f nirgends negativ! Sie ist sogar positiv, wenn die komplexe Ableitung von f nicht verschwindet. - Dies folgt aus dem folgenden einfachen Lemma.

Lemma 2.10 *Ist die Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in U$ reell differenzierbar, so gilt*

$$\det J_f^{\mathbb{R}}(z_0) = |\, f_z(z_0)\,|^2 - |\, f_{\overline{z}}(z_0)\,|^2 .$$

Insbesondere ist

$$\det J_f^{\mathbb{R}}(z_0) = |\, f'(z_0)\,|^2 ,$$

wenn f in z_0 komplex differenzierbar ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} |\, f_z\,|^2 - |\, f_{\overline{z}}\,|^2 &= 1/4\,((g_x + h_y)^2 + (h_x - g_y)^2) - 1/4\,((g_x - h_y)^2 + (h_x + g_y)^2) \\ &= g_x h_y - h_x g_y = \det J_f^{\mathbb{R}} , \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Zusammen mit dem vorigen Satz lassen sich dann bekannte Sätze aus der reellen Analysis auf holomorphe Funktionen übertragen. Als Beispiel bringen wir hier den folgenden

Satz 2.11 *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, und an einer Stelle $z_0 \in U$ sei die komplexe Ableitung $f'(z_0)$ von Null verschieden. Dann ist, nach Verkleinerung von U, f eine bijektive Abbildung von U auf eine offene Teilmenge $W \subset \mathbb{C}$, deren Umkehrfunktion ebenfalls holomorph ist. Mit anderen Worten : f ist lokal um z_0* biholomorph.

Beweis. Wegen

$$\det J_f^{\mathbb{R}}(z_0) = |\, f'(z_0)\,|^2 > 0$$

ist f nach dem Satz über implizite Funktionen lokal umkehrbar mit einer reell differenzierbaren Funktion f^{-1}. Es bleibt zu zeigen, daß diese auch holomorph ist. Dies folgt aber sofort aus der Kettenregel für die Wirtinger–Ableitungen:

$$0 = \partial w/\partial\overline{w} = \partial(f \circ f^{-1})/\partial\overline{w} = \partial f/\partial z \cdot \partial f^{-1}/\partial\overline{w} + \partial f/\partial\overline{z} \cdot \partial\overline{f^{-1}}/\partial\overline{w} = \partial f/\partial z \cdot \partial f^{-1}/\partial\overline{w} ,$$

woraus sich wegen der Stetigkeit von $\partial f/\partial z$ und dem Nichtverschwinden dieser Ableitung bei z_0 die gewünschte Relation

$$\partial f^{-1}/\partial\overline{w} = 0$$

in einer Umgebung von $f(z_0)$ ergibt. □

Korollar 2.12 *Ist* $f : U \to \mathbb{C}$ *injektiv und holomorph, und gilt* $f'(z) \neq 0$ *für alle* $z \in U$*, so ist das Bild* $f(U)$ *offen in* $\mathbb{C}$*, und die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(U) \to U$ *ist holomorph.*

Bemerkung. Wir werden später einen viel eleganteren funktionentheoretischen Beweis dieser Tatsache geben, der den Umkehrsatz und damit die reelle Analysis vermeidet.

Beispiel. Die schon in der Einleitung erwähnte Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bildet sowohl $G_1 = D \setminus \{0\}$ als auch $G_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ umkehrbar holomorph auf das „Schlitzgebiet"

$$\mathbb{C} \setminus \{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |x| \leq 1,\ y = 0 \}$$

ab. Denn die Gleichung

$$f(z) = w\,, \quad w \in \mathbb{C} \ \text{ fest}$$

führt zu der quadratischen Beziehung

$$z^2 - 2wz + 1 = 0$$

mit den (i.a. zwei) Lösungen

$$z_{1,2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}\,,$$

die nur für $w = \pm 1$ zusammenfallen. Wegen $f(1/z) = f(z)$ folgt weiter $z_2 = 1/z_1$ (was man natürlich auch direkt nachrechnen kann). Insbesondere ist also $|z_2| = 1$ genau dann wenn $|z_1| = 1$, und $|z_2| > 1$ genau dann wenn $|z_1| < 1$. Folglich sind sowohl $f|_{G_1}$ als auch $f|_{G_2}$ bijektive Abbildungen von G_1 bzw. G_2 nach $\mathbb{C} \setminus f(\partial D)$. Für $z = \exp(i\theta) \in \partial D$ ist offensichtlich $f(z) = \cos\theta$, also $f(\partial D) = \{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z = 0 \}$. Daß die beiden Einschränkungen sogar umkehrbar holomorph (biholomorph) sind, folgt aus der lokalen holomorphen Umkehrbarkeit, die ihrerseits eine Folgerung aus dem Nichtverschwinden der Ableitung

$$f'(z) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

auf $G_1 \cup G_2$ ist.

Es ist naheliegend, für eine reell differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit Hilfe der Wirtinger–Ableitungen auch eine *komplexe* Funktionalmatrix

$$J_f^{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} f_z & f_{\overline{z}} \\ \overline{f}_z & \overline{f}_{\overline{z}} \end{pmatrix}$$

einzuführen, deren Determinante nach dem Wirtinger–Kalkül gerade gleich $|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ ist. Mit anderen Worten kann man also den ersten Teil von Lemma 10 auch ausdrücken durch die Identität

$$\det J_f^{\mathbb{C}} = \det J_f^{\mathbb{R}}\,.$$

Der tiefere Grund für diese Gleichheit liegt in der einfach zu beweisenden Tatsache, daß die beiden Funktionalmatrizen über dem Körper $\mathbb{C}$ *ähnlich* sind. Wir werden diese Rechnung jetzt am Ende dieses Kapitels nachtragen.

Lemma 2.13 *Für eine Funktion* $f : U \to \mathbb{C}$ *gilt an jeder Stelle* z_0*, an der sie reell differenzierbar ist, die Identität*

$$\begin{pmatrix} f_z & f_{\overline{z}} \\ \overline{f}_z & \overline{f}_{\overline{z}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}.$$

Beweis. Wir schreiben

$$f(z) = f(z_0) + \Delta_1(z)(z - z_0) + \Delta_2(z)(\overline{z} - \overline{z_0})$$

mit an der Stelle z_0 stetigen Funktionen $\Delta_1, \Delta_2 : U \to \mathbb{C}$, so daß

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \Delta_1(z_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \Delta_2(z_0) .$$

Entsprechend hat man dann

$$\overline{f}(z) = \overline{f}(z_0) + \overline{\Delta_2}(z)(z - z_0) + \overline{\Delta_1}(z)(\overline{z} - \overline{z_0}) .$$

Zusammenfassend kann man diese beiden Gleichungen in die Matrix–Gestalt

$$\begin{pmatrix} f(z) - f(z_0) \\ \overline{f}(z) - \overline{f}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1(z) & \Delta_2(z) \\ \overline{\Delta_2}(z) & \overline{\Delta_1}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z - z_0 \\ \overline{z} - \overline{z_0} \end{pmatrix}$$

bringen. Nun ist aber

$$\begin{pmatrix} z - z_0 \\ \overline{z} - \overline{z_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

und ganz entsprechend

$$\begin{pmatrix} f(z) - f(z_0) \\ \overline{f}(z) - \overline{f}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g(z) - g(z_0) \\ h(z) - h(z_0) \end{pmatrix} .$$

Daraus gewinnt man sofort

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} g(z) - g(z_0) \\ h(z) - h(z_0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(z) - f(z_0) \\ \overline{f}(z) - \overline{f}(z_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1(z) & \Delta_2(z) \\ \overline{\Delta_2}(z) & \overline{\Delta_1}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und damit die Darstellung

$$\begin{pmatrix} g(z) - g(z_0) \\ h(z) - h(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(z) & A_2(z) \\ B_1(z) & B_2(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} A_1(z) & A_2(z) \\ B_1(z) & B_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1(z) & \Delta_2(z) \\ \overline{\Delta_2}(z) & \overline{\Delta_1}(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} .$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung, da $A_1(z_0) = g_x(z_0)$ etc. $\square$

Anhang: Komplexe Differentialformen und der Wirtinger-Kalkül

In der reellen Analysis haben wir uns ausführlich mit (reell–wertigen) *(alternierenden) Differentialformen* auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ beschäftigt. Selbstverständlich kann man genausogut auch *komplex–wertige* k–Formen einführen, die per definitionem lokal von der Gestalt

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1,\ldots,j_k} \, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k}$$

mit komplex–wertigen Funktionen $a_{j_1,\ldots,j_k} : U \to \mathbb{C}$ sind. Das *äußere Produkt* und das *Liften* solcher Formen kann man wortwörtlich wie im früheren Fall einführen. Wenn man das *Differential* im Reellen wie früher erklären und als $\mathbb{C}$–lineare Abbildung auf komplex–wertige Formen fortsetzen will, hat man keine andere Wahl, als für Funktionen

$$df := d \operatorname{Re} f + i \, d \operatorname{Im} f$$

zu setzen und

$$d\,\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} da_{j_1,\ldots,j_k} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_k} \, .$$

Auch hier gilt die Formel $d^2 = 0$ und das Vertauschen des Differentials mit dem Liften.

Dies alles ist nur das Verallgemeinern von Begriffen ohne tiefere Bedeutung. Interessant wird die Verallgemeinerung aber in dem Fall, wo die Funktionen nicht nur komplex–*wertig* sind, sondern auch von *komplexen Argumenten* abhängen. Wir haben es dann mit Formen auf offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{C}^n$ zu tun, die wir vermöge der Zerlegung $z_j = x_j + i\, y_j$ als Formen auf $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ auffassen können. Nun sind z_j und $\overline{z_j}$ komplex–wertige Funktionen auf U und besitzen daher die komplexen Differentiale

$$dz_j = dx_j + i\, dy_j \, , \quad d\overline{z_j} = dx_j - i\, dy_j \, .$$

Offensichtlich lassen sich aber auch die Differentiale dx_j und dy_j im Komplexen wieder aus den Differentialen dz_j und $d\overline{z_j}$ zurückgewinnen durch die Formeln:

$$dx_j = \frac{dz_j + d\overline{z_j}}{2} \quad \text{und} \quad dy_j = \frac{dz_j - d\overline{z_j}}{2\, i} \, .$$

Mit anderen Worten: Jede komplex–wertige Differentialform auf $U \subset \mathbb{C}^n$ läßt sich auch ausdrücken als Linearkombination (mit komplex–wertigen Funktionen als Koeffizienten) von k–fachen Dachprodukten der 1–Formen $dz_j \, , \, d\overline{z_j} \, , \, j = 1, \ldots, n$.

Betrachten wir hierzu den Spezialfall des Differentials einer Funktion $f = f(z_1, \ldots, z_n)$ mit Realteil g und Imaginärteil h. Nach Definition ist

$$df = dg + i\, dh = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} + i\, \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) dx_j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial y_j} + i\, \frac{\partial h}{\partial y_j} \right) dy_j \, .$$

Selbstverständlich schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} := \frac{\partial g}{\partial x_j} + i\, \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y_j} := \frac{\partial g}{\partial y_j} + i\, \frac{\partial h}{\partial y_j} \, ,$$

so daß die obige Formel zu

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \, dx_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} \, dy_j$$

wird.

Nun muß sich df aber auch, wie wir oben bemerkt haben, als Linearkombination der dz_j und $d\overline{z_j}$ schreiben lassen. Es ist dann naheliegend, einen Ansatz der Form

$$df := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}\, dz_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\, d\overline{z_j}$$

zu machen mit den sogenannten (partiellen) WIRTINGER–*Ableitungen* nach den „komplexen Variablen" z_j bzw. $\overline{z_j}$. Diese sind $\mathbb{C}$–linear in f, genügen der Produktregel und der Kettenregel (in der aber beide Typen der Wirtinger–Ableitungen vorkommen), und es ist

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right)}\,, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z_j}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_j}\right)}\,.$$

Konkret gewinnt man mit

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\,, \quad i\left(\frac{\partial f}{\partial z_j} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}\right) = \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

die expliziten Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_j}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j} - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_j}\right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\,\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x_j} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y_j}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y_j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x_j}\right)\,.$$

Bemerkungen. 1. Für $n = 1$ reduzieren sich die vorigen Überlegungen auf die alten Definitionen. Insbesondere ist für stetig differenzierbare Funktionen in einer komplexen Veränderlichen

$$df := \frac{df}{dz}\, dz + \frac{df}{d\overline{z_j}}\, d\overline{z}$$

und speziell für holomorphe Funktionen

$$df := \frac{df}{dz}\, dz\,.$$

2. Komplexe 1–Formen sind $\mathbb{C}$–Linearformen auf *reellen* Vektorfeldern. Im Falle $n = 1$ schreibt sich ein solches Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^2$ in der Form $v = v(z) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$. Also operiert die Form dz als

$$dz\,(v) = (dx + i\,dy)\,(v_1, v_2) = v_1 + i\,v_2\,.$$

D. h.: Die 1–Form dz ordnet an jeder Stelle $z = x + i\,y$ dem reellen Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die komplexe Zahl $v_1 + i\,v_2 \in \mathbb{C}$ zu. Entsprechend ist $d\overline{z}\,(v) = \overline{dz\,(v)} = v_1 - i\,v_2$.

3 Potenzreihen

Zur Bequemlichkeit des Lesers fassen wir in diesem Kapitel noch einmal die Ergebnisse über komplexe Potenzreihen zusammen, die wir schon in der (reellen) Analysis hergeleitet hatten. Es sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge und (f_j) mit $f_j : M \to \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen. Ist diese punktweise konvergent auf M, so wird durch

$$(\lim_{j\to\infty} f_j)(z) := \lim_{j\to\infty} f_j(z)\,, \quad z \in M\,,$$

eine neue Funktion

$$\lim_{j\to\infty} f_j : M \longrightarrow \mathbb{C}$$

definiert. Die punktweise Konvergenz ist jedoch i. a. nicht stark genug, um gute Eigenschaften der Funktionen f_j auf den Limes zu übertragen. - Man benötigt daher die

Definition. Die Funktionenfolge (f_j) auf M heißt *gleichmäßig konvergent* gegen die Grenzfunktion f, falls es für alle $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $j_0 = j_0(\varepsilon)$ gibt, so daß für alle $z \in M$ und alle $j \geq j_0$ gilt:

$$|\, f_j(z) - f(z)\,| < \varepsilon\,.$$

Ist die Folge (f_j) auf einem Bereich $U \subset \mathbb{C}$ erklärt, so heißt diese *lokal gleichmäßig konvergent* gegen f, wenn für alle $z_0 \in U$ eine Umgebung $V = V(z_0) \subset U$ existiert, so daß die Folge $(f_{j|V})$ auf V gleichmäßig gegen $f_{|V}$ konvergiert. Wir schreiben für diesen Sachverhalt manchmal auch $f_j \Longrightarrow f$ bzw. $f_j \overset{\text{lokal}}{\Longrightarrow} f$.

Bemerkung. Die Folge f_j konvergiert lokal gleichmäßig auf dem Bereich U genau dann, wenn die eingeschränkte Folge der $f_{j|K}$ für jedes Kompaktum $K \subset U$ gleichmäßig konvergiert. Man sagt daher in diesem Fall auch, die Folge f_j *konvergiere gleichmäßig auf Kompakta* oder kurz, sie *konvergiere kompakt*.

Satz 3.1 *Existiert* $\lim f_j = f$ *lokal gleichmäßig auf* U *und sind die Funktionen* f_j *stetig, so auch die Grenzfunktion* f.

Beweis (Cauchy). Es sei $z_0 \in U$ fest gewählt und $V = V(z_0) \subset U$ so, daß $f_{j|V} \Longrightarrow f_{|V}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ wähle $j_0 = j_0(\varepsilon)$ so, daß

$$|\, f_j(z) - f(z)\,| < \varepsilon/3\,, \quad j \geq j_0\,, \quad z \in V\,.$$

Da alle f_j stetig in z_0 sind, existiert ferner für jedes j ein $\delta_j = \delta_j(\varepsilon) > 0$, so daß

$$|\, f_j(z) - f_j(z_0)\,| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle} \quad z \in U \quad \text{mit} \quad |\, z - z_0\,| < \delta_j\,.$$

Sei nun $0 < \delta \leq \delta_{j_0}$ so klein, daß $D_\delta(z_0) \subset V$. Dann gilt für alle $z \in D_\delta(z_0)$:

$$\begin{aligned} |\, f(z) - f(z_0)\,| &\leq |\, f(z) - f_{j_0}(z)\,| + |\, f_{j_0}(z) - f_{j_0}(z_0)\,| + |\, f_{j_0}(z_0) - f(z_0)\,| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Klar ist auch nach dem Cauchy–Kriterium:

Eine Folge f_j *auf* M *ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* $j_0 = j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *gibt, so daß*

$$|\, f_j(z) - f_k(z)\,| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad z \in M \quad \text{und für alle} \quad j, k \geq j_0\,.$$

All dies läßt sich nun leicht auf Reihen von Funktionen vermittels Partialsummen übertragen:

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} f_j \Big)(z) := \sum_{j=0}^{\infty} f_j(z) := \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} f_j(z) \Big) .$$

Folgerung 3.2 *Die Reihe* $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *ist genau dann gleichmäßig konvergent auf* M *, wenn es für alle* $\varepsilon > 0$ *ein* j_0 *gibt, so daß für alle* $m, n \geq j_0$ *und alle* $z \in M$ *gilt :*

$$\Big| \sum_{j=n}^{m} f_j(z) \Big| < \varepsilon .$$

Eine Reihe $\sum f_j$ heißt bekanntlich *absolut konvergent* in z, falls die Reihe der Absolutbeträge

$$\sum_{j=0}^{\infty} | f_j(z) |$$

konvergiert. Klar ist, daß absolute (gleichmäßige) Konvergenz die (gleichmäßige) Konvergenz nach sich zieht. Für absolute Konvergenz hat man die bekannten Kriterien der reellen Analysis (Quotientenkriterium, Wurzelkriterium) zur Verfügung. Ferner notieren wir den

Satz 3.3 (Majorantenkriterium) *Seien* $f_j : M \to \mathbb{C}$ *Funktionen, und die reellen Zahlen* a_j *seien nicht negativ und so beschaffen, daß die Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

konvergiert und für alle j *und alle* $z \in M$ *gilt :*

$$| f_j(z) | \leq a_j .$$

Dann ist die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ *auf* M *absolut und gleichmäßig konvergent.*

Wählen wir speziell für f_j die Polynome $f_j(z) = a_j (z - z_0)^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fest, so erhalten wir eine sogenannte *Potenzreihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

mit Entwicklungspunkt z_0. Als *Beispiel* betrachten wir den Fall $a_j = 1$ für alle j und $z_0 = 0$, also die *geometrische Reihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j .$$

Die natürliche Frage ist: Wo ist diese Reihe konvergent? Zur Beantwortung bilden wir die Partialsummen:

$$\sum_{j=0}^{n} z^j = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} .$$

Für $|z| < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$ und folglich wie im Reellen

$$\sum_{j=0}^{\infty} z^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} z^j = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} .$$

Ist dagegen $|z| \geq 1$, so ist auch $|z^j| = |z|^j \geq 1$ und damit $\lim z^j \neq 0$, so daß $\sum z^j$ nicht konvergent sein kann. Also zusammenfassend: $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ ist genau in der Kreisscheibe $D_1(0)$ konvergent und dort holomorph. - Allgemein gilt:

Satz 3.4 *Zu jeder Potenzreihe*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

gibt es einen eindeutig bestimmten Konvergenzradius $r \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. *D. h. genauer:* $P(z)$ *ist konvergent in dem Kreis* $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ *und*

divergent für $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| > r$.

Was dagegen für $|z - z_0| = r$ *geschieht, ist von Potenzreihe zu Potenzreihe verschieden.*

Auf dem Konvergenzkreis $D_r(z_0)$ *konvergiert die Reihe* $P(z)$ *sogar absolut und lokal gleichmäßig. Es gilt die* Cauchy–Hadamardsche Formel

$$\frac{1}{r} = \limsup \sqrt[j]{|a_j|} .$$

Beweis. a) Sei zunächst die Folge $a_j (z_1 - z_0)^j$ in einem Punkt $z_1 \neq z_0$ als beschränkt vorausgesetzt, es werde $r_1 := |z_1 - z_0|$ gesetzt und $0 < r_2 < r_1$ beliebig gewählt.

Behauptung. $P(z)$ ist auf $\overline{D_{r_2}(z_0)}$ absolut und gleichmäßig konvergent.

Zum Beweis dieser Behauptung sei $|a_j (z_1 - z_0)^j| \leq M$. Ist dann $z \in \overline{D_{r_2}(z_0)}$, also $|z - z_0| \leq r_2 < r_1$, so folgt

$$|a_j (z - z_0)^j| = |a_j (z_1 - z_0)^j| \left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right|^j \leq M \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^j .$$

Wegen $\dfrac{r_2}{r_1} =: q < 1$ folgt aus dem Majorantenkriterium durch Vergleich mit der geometrischen Reihe die Behauptung.

b) Sei r durch die Hadamardsche Formel gegeben. Ist $r > 0$ und $0 < r_1 < r$, so folgt aus

$$\limsup \sqrt[j]{|a_j|} = \frac{1}{r} < \frac{1}{r_1} ,$$

daß $\sqrt[j]{|a_j|} < \dfrac{1}{r_1}$ für fast alle j, d. h. die Folge

$$|a_j| r_1^j$$

ist beschränkt. Teil a) impliziert dann, daß P auf $D_{r_1}(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig konvergiert. Da $r_1 < r$ beliebig war, konvergiert P auch auf $D_r(z_0)$ absolut und lokal gleichmäßig.

c) Sei wieder r durch die Hadamardsche Formel gegeben, sei $r < \infty$ und $z \in \mathbb{C}$ so beschaffen, daß $|z - z_0| > r$. Dann ist

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{r} = \limsup \sqrt[j]{|a_j|} .$$

Also muß für unendlich viele j gelten:

$$\frac{1}{|z - z_0|} \leq \sqrt[j]{|a_j|} , \quad \text{d. h.} \quad 1 \leq |a_j (z - z_0)^j| .$$

Das bedeutet aber, daß $a_j\,(z - z_0)^j$ keine Nullfolge bildet, P also nicht in z konvergiert. □

Nach den Sätzen 1 und 3 ist eine Potenzreihe in ihrem Konvergenzkreis eine *stetige* Funktion. Es gilt sogar der

Satz 3.5 *Es sei* $\sum a_j\,(z - z_0)^j$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* r. *Dann ist ihre Grenzfunktion eine auf* $D_r(z_0)$ *holomorphe Funktion* f, *deren Ableitung sich durch gliedweise Differentiation berechnet* :

$$f'(z) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\,a_{j+1}\,(z - z_0)^j\ .$$

Die Potenzreihe

$$F(z) := \sum \frac{a_j}{j+1}\,(z - z_0)^{j+1}$$

ist ebenfalls konvergent auf $D_r(z_0)$, *also dort holomorph, und besitzt* f *als komplexe Ableitung*: $F' = f$.

Der *Beweis* kann wie im Reellen geführt werden. Wir werden später aber in Kapitel 6 einen eleganteren funktionentheoretischen Beweis geben. □

Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir noch zwei wichtige Kriterien der reellen Analysis ins rechte, sprich: *komplex–analytische* Licht rücken. Das bekannte LEIBNIZ–*Kriterium* für alternierende Reihen reeller Zahlen kann wie folgt uminterpretiert werden:

Satz 3.6 *Es sei* (a_j) *eine monoton fallend gegen* 0 *konvergierende Folge reeller Zahlen. Dann ist die Potenzreihe*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,z^j$$

im Punkt $z = -1$ *konvergent.*

Insbesondere ist also der Konvergenzradius unter der vorigen Voraussetzung stets größer oder gleich 1. Wenn er gleich 1 ist, stellt sich die Frage, an welchen komplexen Stellen z mit $|z| = 1$ die Potenzreihe ebenfalls konvergiert. In der Tat gilt der folgende überraschende Satz von PICARD, der das Leibniz–Kriterium optimal verbessert.

Satz 3.7 *Es sei* (a_j) *eine monoton fallend gegen* 0 *konvergierende Folge reeller Zahlen. Dann ist die Potenzreihe*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,z^j$$

in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| = 1$ *konvergent mit möglicher Ausnahme der Stelle* $z = 1$.

Bemerkung. Für die Stelle $z = 1$ kann man keine Aussagen machen. Die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j+1}$$

ist divergent in 1, während die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{(j+1)^2}$$

dort konvergiert.

Beweis von Satz 7. Es sei $z_0 \neq 1$ ein Punkt auf dem Rand des Einheitskreises. Wir setzen P_n für die n–te Partialsumme von P an der Stelle z_0 und $P_{m,n}$ für die Differenz $P_n - P_{m-1}$, wenn $m \leq n$. Dann ist

$$(z_0 - 1)\, P_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} (z_0 - 1)\, a_k\, z_0^k = -\, a_m\, z_0^m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\, z_0^{k+1} + a_n\, z_0^{n+1} .$$

Wegen $|\, z_0\,| = 1$ und $a_k - a_{k+1} \geq 0$ folgt hieraus sofort

$$|\, z_0 - 1\,|\,|\, P_{m,n}\,| \leq a_m + \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) + a_n = 2\, a_m ,$$

und mit dem CAUCHY–*Kriterium* schließt man auf die behauptete Konvergenz. □

Ein anderes, sehr nützliches Resultat ist der ABELsche *Grenzwertsatz*.

Satz 3.8 *Ist die Potenzreihe* $\sum_j a_j x^j$ *mit reellen Koeffizienten* a_j *konvergent an der Stelle* 1*, so wird die durch die Potenzreihe auf dem Intervall* $(-1,\, 1)$ *definierte beliebig oft differenzierbare Funktion* f *durch*

$$f\,(1) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

stetig nach $(-1,\, 1]$ *fortgesetzt.*

Offensichtlich kann man aus diesem Satz durch Übergang zu komplexen Koeffizienten und eine geeignete Drehstreckung um den Nullpunkt im Komplexen die folgende Aussage deduzieren.

Satz 3.9 *Ist die Potenzreihe* $\sum_j a_j x^j$ *mit komplexen Koeffizienten* a_j *konvergent an einer Stelle* z_0 *auf dem Rand* ∂D_r *ihres Konvergenzkreises, so gilt für die auf dem offenen Konvergenzkreis* D_r *durch die Potenzreihe definierte holomorphe Funktion* f :

$$\lim_{\rho \nearrow 1} f\,(\rho\, z_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z_0^j .$$

Dies bedeutet im Komplexen aber bei weitem noch nicht, daß in dieser Situation die Funktion f im Punkte z_0 durch den Wert der Potenzreihe an der Stelle z_0 *stetig fortgesetzt* werden kann.

In der Tat muß man zu einer exakten Formulierung des wahren Sachverhalts den Konvergenzbegriff bei Annäherung an den Rand des Konvergenzkreises einschränken.

Definition. Man sagt, eine Folge (z_k) komplexer Zahlen in einem offenen Kreis D_r konvergiere *nicht tangential* gegen einen Randpunkt $z_0 \in \partial\, D_r$, wenn die Folgenglieder in einem Bereich der Form

$$\frac{|\, z - z_0\,|}{|\, z_0\,| - |\, z\,|} \leq C$$

bleiben.

Die richtige Verallgemeinerung des ABELschen *Grenzwertsatzes* im Komplexen lautet:

Satz 3.10 *Konvergiert die komplexe Potenzreihe* $\sum_j a_j x^j$ *an einer Stelle* z_0 *auf dem Rand ihres Konvergenzkreises* D_r*, so gilt*

$$\lim_{k \to \infty} f\,(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z_0^j$$

für jede Folge $z_k \in D_r$*, die nicht tangential gegen* z_0 *konvergiert.*

Beweis. Da die Bedingung der nicht–tangentialen Konvergenz invariant unter Drehstreckungen ist, können wir $r = 1$ und $z_0 = 1$ voraussetzen; insbesondere ist dann die Reihe

$$A := \sum_{j=0}^{\infty} a_j$$

konvergent. Der weitere Beweis benutzt - wie im Reellen - *partielle Summation* nach Abel (siehe *Analysis II*, Kapitel **??**): Für beliebige Folgen A_j, c_j gilt

$$\sum_{k=m}^{n} c_k\,(A_k - A_{k-1}) = c_n\,A_n - c_{m-1}\,A_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} (c_k - c_{k-1})\,A_{k-1}\,.$$

Wir setzen $c_k := z^k$ für festes $z \in D$ und $A_k := \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j$. Dann ist $A_k - A_{k-1} = a_k$ und folglich

$$P_{m,n}(z) := \sum_{k=m}^{n} a_k\,z^k = \sum_{k=m}^{n} c_k\,(A_k - A_{k-1}) = A_n\,z^n - A_{m-1}\,z^{m-1} + \sum_{k=m}^{n} (z^k - z^{k-1})\,A_{k-1}\,.$$

Läßt man hierin n gegen Unendlich gehen, so ergibt sich wegen $\lim A_n = 0$:

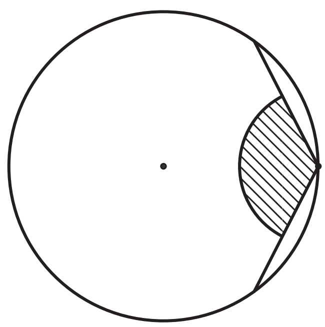
$$P_m(z) := \lim_{n\to\infty} P_{m,n}(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k\,z^k = -A_{m-1}\,z^{m-1} - (1 - z)\sum_{k=m}^{\infty} A_{k-1}\,z^{k-1}\,.$$

Damit gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein M, so daß für alle $m \geq M$ und alle $z \in D$ mit der Bedingung des Satzes gilt:

$$|\,P_m(z)\,| \leq \varepsilon\left(1 + |1 - z|\sum_{k=1}^{\infty} |\,z\,|^{k-1}\right) = \varepsilon\left(1 + \frac{|\,1 - z\,|}{1 - |\,z\,|}\right) \leq \varepsilon\,(1 + C)\,.$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch für $P_m(1) = A_{m+1}$. Infolgedessen ist die Folge der P_m *gleichmäßig* konvergent auf dem zugelassenen Bereich des Einheitskreises mit Einschluß ihres Häufungspunktes 1. Hieraus folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Die Voraussetzung der nicht–tangentialen Konvergenz ist erfüllt für Folgen in *symmetrischen Winkelräumen* mit totalem Innenwinkel kleiner als π:



Figur 3.1

4 Elementare Funktionen

Es sei $\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, x^j$ eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten a_j und positivem Konvergenzradius $0 < r \le \infty$. Wir können dieser Reihe die *komplexe Potenzreihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^j$$

zuordnen, die nach Kapitel 3 ebenfalls den Konvergenzradius r in $\mathbb{C}$ besitzt. Wir haben damit eine eindeutige Methode, reell–analytische Funktionen (zumindest lokal) ins Komplexe fortzusetzen. Insbesondere können wir definieren:

$$e^z := \exp z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, z^j ,$$

$$\sin z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\, z^{2j+1} \quad , \quad \cos z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\, z^{2j} .$$

Diese Reihen konvergieren ausnahmslos auf ganz $\mathbb{C}$; sie stellen dort also holomorphe Funktionen dar und setzen die reelle Exponentialfunktion, die Sinus– bzw. Cosinusfunktion ins Komplexe fort.

Die komplexen Funktionen e^z, $\cos z$, $\sin z$ sind eng miteinander verknüpft (diese Beziehung läßt sich im Reellen nicht entdecken). Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} e^{iz} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\,(iz)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j}}{(2j)!}\, z^{2j} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^{2j+1}}{(2j+1)\,!}\, z^{2j+1} \\ &= \cos z + i \sin z . \end{aligned}$$

Speziell hat man die berühmte Eulersche Beziehung

$$e^{2\pi i} = 1 .$$

Umgekehrt lassen sich auch die trigonometrischen Funktionen durch die Exponentialfunktion ausdrücken. Aus $\cos(-z) = \cos z$ und $\sin(-z) = -\sin z$ ergibt sich sofort

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

und damit gewinnt man zusammen mit der obigen Beziehung die *Eulerschen Formeln*:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i} .$$

Auch die *Funktionalgleichung* für die Exponentialfunktion und die *Additionstheoreme* für die trigonometrischen Funktionen lassen sich wie im Reellen beweisen. Durch gliedweise Differentiation erhält man

$$(e^z)' = e^z , \quad (\sin z)' = \cos z , \quad (\cos z)' = -\sin z .$$

Ferner benötigen wir das folgende kleine Lemma, das vom Beweis her schon in Kapitel 2 hätte behandelt werden müssen:

Lemma 4.1 *f sei holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und es sei $f' \equiv 0$. Dann ist f konstant.*

Beweis. Zu zeigen ist: f ist lokal konstant. Nach Voraussetzung ist $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$. Also gilt mit $f = g + i\,h$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \equiv 0 , \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} \equiv 0 ,$$

und folglich sind g, h lokal konstant. $\square$

Betrachte nun bei festem $z_0 \in \mathbb{C}$ die holomorphe Funktion

$$f(z) = e^{-z}\, e^{z+z_0} \,.$$

Es ist $f'(z) = -e^{-z}\, e^{z+z_0} + e^{-z}\, e^{z+z_0} = 0$ und deshalb nach dem obigen Lemma

$$f(z) = \text{const.} = f(0) = e^{z_0} \,,$$

da offensichtlich $e^0 = 1$ ist. Insbesondere für $z_0 = 0$ folgt hieraus

$$e^{-z} \cdot e^z = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \,,$$

insbesondere

$$e^z \neq 0 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \,.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt dann, wenn man z_0 durch w ersetzt, die *Funktionalgleichung*:

$$\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w) \quad \text{für alle} \quad z,\, w \in \mathbb{C} \,.$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formeln schließt man hieraus sofort die *Additionstheoreme* der trigonometrischen Funktionen:

$$\left.\begin{aligned} \cos(z + w) &= \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w \\ \sin(z + w) &= \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w \end{aligned}\right\} \quad z,\, w \in \mathbb{C} \,.$$

Ferner ergibt sich aus der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion exp mit $z = x + i\,y$ sofort

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y) \,.$$

Man kann auch e^z durch diese Beziehung definieren und dann die Holomorphie vermittels der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen nachrechnen. Wegen $|\cos y + i \sin y| = 1$, $y \in \mathbb{R}$, folgen aus der obigen Gleichung die nützlichen Ungleichungen

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{|\operatorname{Re} z|} \leq e^{|z|} \,, \quad \arg e^z = \operatorname{Im} z \,.$$

Speziell kann man die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto e^{it} = \cos t + i \sin t \in \mathbb{C}$$

als einen (surjektiven) Homomorphismus von der additiven Gruppe $\mathbb{R}$ auf die multiplikative Gruppe $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ auffassen.

Des weiteren ist wegen der Funktionalgleichung auch

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z \longmapsto e^z \end{cases}$$

ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ nach $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. Dieser ist ebenfalls surjektiv. Denn mit $w \in \mathbb{C}^*$ ist $|w| \neq 0$; setzt man dann $x = \log|w|$, $y = \arg w$, so ist leicht zu verifizieren, daß $e^{x+iy} = w$. Die Exponentialfunktion exp ist aber im Komplexen nicht injektiv, da z. B. $e^{2\pi i} = e^0 = 1$. Allgemein ist natürlich

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot (e^{2\pi i})^k = e^z \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z} \,.$$

Ist nun umgekehrt $e^z = e^w$, so muß $e^{z-w} = 1$ sein, und mit $z - w = x + i\,y$ und $e^{z-w} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$ schließt man dann sofort:

$$e^x = 1 \,, \quad \sin y = 0 \,, \quad \cos y = 1 \,,$$

also

$$x = 0 \quad \text{und} \quad z - w = 2\,k\,\pi\,i\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir können also zusammenfassend sagen, daß $2\,\pi\,i$ die einzige (fundamentale) *Periode* der Funktion $\exp$ ist. Gruppentheoretisch können wir das auch so ausdrücken, daß eine exakte Sequenz von Gruppen

$$\{\,0\,\} \longrightarrow 2\,\pi\,i\,\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^* \longrightarrow \{\,1\,\}$$

besteht. Im übrigen wird jeder Streifen $\{\, z \in \mathbb{C} : a \le \operatorname{Im} z < a + 2\,\pi \,\}$ unter $\exp$ bijektiv auf $\mathbb{C}^*$ abgebildet, wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann.

Die gesamten bisherigen Überlegungen zeigen insbesondere, daß es im Komplexen keine Umkehrabbildung $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ der Exponentialfunktion geben kann. Tatsächlich ist der *Logarithmus* einer komplexen Zahl $z \neq 0$ *unendlich vieldeutig*; je zwei solcher Werte dürfen sich um ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von $2\,\pi\,i$ additiv unterscheiden. Wir werden später auf die Bedeutung dieser Zahl $2\,\pi\,i$ noch mehrfach eingehen.

Wir fügen noch einige Aussagen über die trigonometrischen Funktionen an, die uns im Reellen schon vertraut sind. So ist zum Beispiel stets

$$\sin\,(z + \pi/2) = \sin z \cdot \cos\,(\pi/2) + \cos z \cdot \sin(\pi/2) = \cos z\,.$$

Weiter ergibt sich aus $(\sin^2 + \cos^2)' = 2 \sin \cos - 2 \cos \sin = 0$ die Beziehung

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 1 \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Zur Berechnung der Nullstellen des Sinus beachte man

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i} = \sin z = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff e^{2iz} = 1 \iff z = k\,\pi$$

mit $k \in \mathbb{Z}$. Also besitzt der Sinus nur die im Reellen liegenden Nullstellen. Mit der Translation um $\pi/2$ folgt die entsprechende Aussage auch für den Cosinus. Die Eulerschen Formeln implizieren schließlich die Periodizitätseigenschaft

$$\sin\,(z + 2\,\pi) = \sin z\,, \quad \cos\,(z + 2\,\pi) = \cos z\,,$$

und es ist einfach zu zeigen, daß $2\,\pi$ die einzige (fundamentale) Periode von $\sin$ und $\cos$ ist.

Man kann auch leicht $\operatorname{Re} \cos z$, etc. ausrechnen. Mit $z = x + i\,y$ ist

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\,\{\, e^{-y}\,(\cos x + i \sin x) + e^{y}\,(\cos x - i \sin x)\,\}\,, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname{Re} \cos\,(x + i\,y) = \cos x\,\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} = \cos x \cdot \cosh y\,,$$

$$\operatorname{Im} \cos\,(x + i\,y) = \sin x\,\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = -\sin x \cdot \sinh y\,.$$

Speziell schließt man hieraus, daß die Funktionen $\sin$ und $\cos$ in jedem Streifen $\{\, z : a \le \operatorname{Re} z \le b \,\}$ unbeschränkt sind.

Die Funktionen

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad \text{und} \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

sind holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{ (k + 1/2)\, \pi : \; k \in \mathbb{Z} \}$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \{ k\, \pi : \; k \in \mathbb{Z} \}$. Mit der Quotientenregel ergibt sich

$$(\tan z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + \tan^2 z \;,$$

$$(\cot z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} = -\,(1 + \cot^2 z) \;.$$

tan und cot lassen sich natürlich auch durch die komplexe Exponential–Funktion ausdrücken.

Schließlich lassen sich auch die Hyperbelfunktionen ins Komplexe fortsetzen:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \;, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-iz}}{2} \;.$$

Es folgt sofort:

$$\sin z = \frac{1}{i} \sinh i\, z \;, \quad \cos z = \cosh i\, z \;,$$

d. h. im Komplexen besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen den trigonometrischen und den Hyperbelfunktionen.

Zum Abschluß dieses Kapitels notieren wir eine Konsequenz aus Lemma 1, die wir in Kapitel 9 noch wesentlich verallgemeinern werden („Gebietstreue“ holomorpher Funktionen).

Lemma 4.2 *Es sei f holomorph auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Dann ist f schon dann konstant, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist :*

$$\text{i) } \operatorname{Re} f = \text{konst.} \;, \quad \text{ii) } \operatorname{Im} f = \text{konst.} \;, \quad \text{iii) } |\, f \,| = \text{konst.} \,.$$

Beweis. Ist $g = \operatorname{Re} f$ konstant, so ist $g_x = g_y = 0$ und folglich wegen der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen auch $h_x = h_y = 0$ und damit der Imaginärteil h von f konstant. Das gleiche Argument zieht auch in der umgekehrten Richtung, so daß man nur noch die Implikation iii) $\Longrightarrow$ $f =$ konst. zu zeigen braucht. Es sei also $f\,\overline{f} = |\, f \,|^2$ konstant, sagen wir: gleich c. Wegen der Holomorphie von f folgt dann

$$\overline{f}\, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\, (f\, \overline{f}) = \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \;, \quad \text{also } c\, \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \;.$$

Dann ist aber entweder $c = 0$ und folglich $f = 0$ oder $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ und folglich nach Lemma 1 f zumindest konstant. $\square$

5 Integration längs Wegen

Zunächst müssen wir etwas Ordnung schaffen in Bezug auf den Begriff des *Integrationsweges*. Wir erinnern daran, daß ein *Weg* (oder eine *Kurve*) per definitionem ein Tripel $(I, \gamma, \gamma(I))$ ist, wobei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $\gamma : I \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion bezeichnet (dann sind auch $\mathrm{Re}\,\gamma$, $\mathrm{Im}\,\gamma : I \to \mathbb{R}$ stetige reell–wertige Funktionen). Genauer gesagt handelt es sich bei einem solchen Tripel um einen *parametrisierten* Weg: $t \in I$ (oft physikalisch als *Zeit* interpretiert) ist der Parameter, und durchläuft dieser das Intervall monoton von a nach b, so durchläuft der Punkt $\gamma(t)$ die Spur $\mathrm{spur}\,\gamma = |\gamma| = \gamma(I)$ *stetig* beginnend mit dem *Anfangspunkt* $z_0 = \gamma(a)$ und sein Leben beendend mit dem *Endpunkt* $z_1 = \gamma(b)$. Man nennt einen solchen Weg *geschlossen*, falls $z_0 = z_1$. Da in diesem Fall aber offensichtlich kein Anfangspunkt ausgezeichnet ist, sollte man einen solchen Weg besser durch den Einheitskreis $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ parametrisieren, also als ein Tripel $(S^1, \gamma, \gamma(S^1))$ mit stetigem $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$ ansehen. In einer solchen Parametrisierung heißt der Weg *einfach zusammenhängend*, falls γ eine *injektive* Abbildung ist.

Um uns das Leben zu erleichtern, werden wir voraussetzen, daß unsere Integrationswege *stückweise stetig differenzierbar* sind. Dies bedeutet für die Parametrisierung $\gamma : I \to \mathbb{C}$ (oder entsprechend für $\gamma : S^1 \to \mathbb{C}$), daß γ stückweise stetig differenzierbar ist, d. h. daß es eine Zerlegung von I gibt: $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, so daß $\gamma_{|[t_{k-1}, t_k]}$ stetig differenzierbar ist für alle $k = 1, \ldots, n$. Das letztere bedeutet natürlich, daß $\mathrm{Re}\,\gamma$ und $\mathrm{Im}\,\gamma$ auf den Teilintervallen $[t_{k-1}, t_k]$ stetig differenzierbar sind (in den Randpunkten selbstverständlich nur einseitig). Wir setzen stets

$$\gamma'(t) := (\mathrm{Re}\,\gamma)'(t) + i\,(\mathrm{Im}\,\gamma)'(t) .$$

Ist γ sogar stetig differenzierbar, so heißt γ *glatt*, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$.

Definition. Stückweise stetig differenzierbare Wege $\gamma : I \to U \subset \mathbb{C}$ nennen wir kurz (parametrisierte) *Integrationswege* in U.

Ein *Integrationsweg* ist, genauer gesagt, eine *Äquivalenzklasse* von parametrisierten Integrationswegen bezüglich der Äquivalenzrelation des *Umparametrisierens*. Dies soll nun präzisiert werden.

Definition. Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle. Eine Abbildung $\varphi : J \to I$ heißt eine *Parametertransformation*, falls φ streng monoton steigend, stückweise stetig differenzierbar und surjektiv ist mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. (Hierbei sind gegebenenfalls wieder nur die linksseitigen oder rechtsseitigen Ableitungen zu betrachten).

Klar ist: Ist $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation, so auch $\varphi^{-1} : I \to J$. Ist ferner ψ eine weitere Parametertransformation, so daß $\psi \circ \varphi$ in sinnvoller Weise erklärt ist, also ψ den Definitionsbereich $\varphi(I)$ besitzt, so ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi$ eine Parametertransformation. Aus diesen Bemerkungen ergibt sich unmittelbar, daß der Prozeß des Umparametrisierens eine Äquivalenzrelation darstellt.

Ist nun $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ein parametrisierter Integrationsweg und $\varphi : J \to I$ eine Parametertransformation, so ist auch $\gamma \circ \varphi : J \to \mathbb{C}$ ein Integrationsweg mit der gleichen Spur und denselben Randpunkten wie $(I, \gamma, \gamma(I))$. Insbesondere wird die durch die Reihenfolge z_0, z_1 festgelegte *Orientierung* des parametrisierten Weges γ durch Umparametrisieren nicht verändert. Wir haben es also in Wahrheit sogar mit *orientierten* Wegen zu tun!

Man kann die Orientierung eines Weges $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ umkehren, indem man den parametrisierten Weg $[a, b] \ni t \mapsto \gamma(a + b - t)$ betrachtet. Dieser hat dieselbe Spur wie γ, aber vertauschte Anfangs– und Endpunkte. Man bezeichnet diese Parametrisierung oft auch mit γ^{-1}, obwohl sie weder etwas mit $1/\gamma$ noch mit der Umkehrabbildung von γ zu tun hat.

Man kann auch Wege mit „richtigen“ Endpunkten *zusammensetzen*. Sind $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{C}$ zwei Integrationswege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, so wird durch

$$t \longmapsto \begin{cases} \gamma_1(t) , & t \in [a, b] , \\ \gamma_2(t + c - b) , & t \in [b, b + d - c] , \end{cases}$$

ein Integrationsweg $[a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ definiert, den wir im folgenden mit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ oder $\gamma_1 \gamma_2$ bezeichnen werden. Man kann leicht zeigen, daß diese Definition in Wahrheit invariant bezüglich Umparametrisierungen ist.

Beispiele. 1. Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ fest gewählt. Dann ist $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, definiert durch $t \mapsto z_0 + r e^{it}$, eine Parametrisierung der *positiv orientierten Kreislinie um* z_0 *mit Radius* r. Für diese Parametrisierung gilt $\gamma'(t) = i r e^{it} \neq 0$. Also handelt es sich hier um einen glatten, einfach geschlossenen Weg.

2. Es seien $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ fest gewählte Punkte, und $\gamma : [0, n] \to \mathbb{C}$ werde gegeben durch

$$\gamma(t) = z_k + (t - k)(z_{k+1} - z_k), \quad t \in [k, k+1].$$

Dies ist natürlich eine Parametrisierung des durch $z_0, \ldots, z_n$ festgelegten *Streckenzuges*, den wir i. f. auch einfach mit $[z_0, \ldots, z_n]$ bezeichnen werden.

Nach Definition gilt für die Ableitung γ' eines parametrisierten Weges γ:

$$|\gamma'|^2 = \big((\mathrm{Re}\,\gamma)'\big)^2 + \big((\mathrm{Im}\,\gamma)'\big)^2$$

und damit nach einem Satz der reellen Analysis:

Für jeden Integrationsweg γ *ist die Spur* $\gamma(I)$ rektifizierbar *(wir sagen kurz,* γ *sei rektifizierbar), und ihre Länge* $L(\gamma) := L(\gamma(I))$ *ist gegeben durch die Formel*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Wir übertragen nun das *Riemann–Integral* von reell–wertigen auf komplex–wertige (stückweise stetige) Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ durch

$$\int_a^b f(t)\, dt := \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\, dt + i \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\, dt.$$

Es ist dann das Integral komplex–wertig und $\mathbb{C}$–linear und erfüllt

$$\mathrm{Re} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(t)\, dt, \quad \mathrm{Im} \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b \mathrm{Im}\, f(t)\, dt,$$

$$\int_a^b \overline{f(t)}\, dt = \overline{\int_a^b f(t)\, dt}.$$

Von ganz entscheidender Bedeutung ist das folgende, auf den ersten Blick völlig unscheinbare Lemma. Es ist ein Spezialfall einer Abschätzung von Integralen über vektor–wertige Funktionen in einer reellen Veränderlichen, die wir schon in der Analysis hergeleitet haben. Im Spezialfall $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ist der Beweis noch etwas einfacher.

Lemma 5.1 *Sei* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *stückweise stetig. Dann gilt*

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dt \Big| \le \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Beweis. Es sei $A := \displaystyle\int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{C}$. Ist dann $A = 0$, so ist nichts zu zeigen. Für $A \neq 0$ gilt

$$A = |A|\, e^{is}, \quad \text{d. h.} \quad 0 \le |A| = e^{-is} A = \mathrm{Re}\,(e^{-is} A)$$

und damit

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt\Big| = \operatorname{Re}\Big(e^{-is}\int_a^b f(t)\,dt\Big) = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-is} f(t)\,dt$$
$$= \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-is} f(t))\,dt \le \int_a^b |e^{-is} f(t))|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt\,,$$

was zu beweisen war. □

Wir kommen nun zu der außerordentlich wichtigen

Definition. $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{C}$ sei ein Integrationsweg, und $f : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ sei eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

das *Integral der Funktion* f *längs des Weges* γ.

Bemerkung. Sei $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ eine Unterteilung von I. Man bilde dann die *Riemannsche Summe*

$$\sum(f, t_\nu, \tau_\nu) := \sum_{\nu=1}^{n} f(\gamma(\tau_\nu))\,(\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1}))$$

bezüglich irgendwelcher *Zwischenwerte* $t_{\nu-1} \le \tau_\nu \le t_\nu$. Dann streben diese Summen bei immer feiner werdender Unterteilung gegen einen Grenzwert, nämlich gegen unser obiges Integral. Genauer gilt: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, s. d. für alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ mit $|t_\nu - t_{\nu-1}| \le \delta$ und alle Zwischenwerte τ_ν gilt:

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz - \sum(f, t_\nu, \tau_\nu)\Big| < \varepsilon\,.$$

Als nächstes zeigen wir, daß das oben definierte *Wege–* oder *Kurvenintegral* tatsächlich nicht von der Parametrisierung des Weges γ abhängt.

Satz 5.2 *γ_1, γ_2 seien parametrisierte Integrationswege, die durch Umparametrisieren auseinander hervorgehen. Ferner sei f stetig auf der Spur $\gamma_1(I_1) = \gamma_2(I_2)$. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,.$$

Beweis. Es sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ mit der Umparametrisierung $\varphi : J = I_2 = [c, d] \to I_1 = I = [a, b]$. Wegen

$$\operatorname{Re}\gamma_2 = (\operatorname{Re}\gamma_1)\circ\varphi\,,\quad \operatorname{Im}\gamma_2 = (\operatorname{Im}\gamma_1)\circ\varphi$$

folgt dann

$$\gamma_2' = (\operatorname{Re}\gamma_2)' + i\,(\operatorname{Im}\gamma_2)' = (\operatorname{Re}\gamma_1)'\cdot\varphi' + i\,(\operatorname{Im}\gamma_1)'\cdot\varphi' = (\gamma'\circ\varphi)\cdot\varphi'\,.$$

Es ergibt sich daraus mit Hilfe der Transformationsformel für reelle Integrale:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\,\gamma_1'(t)\,dt = \int_d^c f((\gamma_1\circ\varphi)(s))\,\gamma_1'(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds$$
$$= \int_d^c f(\gamma_2(s))\,\gamma_2'(s)\,ds = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\,,$$

was zu beweisen war. □

Die nützlichste Abschätzung für das Weitere liefert der folgende Satz, auf den wir uns stets mit der Bezeichnung *Standardabschätzung* beziehen werden.

Satz 5.3 *Es sei* f *stetig auf der Spur von* γ. *Dann gilt*

$$\Big| \int_\gamma f(z)\,dz \Big| \le L(\gamma) \max_{z\in\gamma(I)} |f(z)| .$$

Beweis. $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ist stetig und I ist kompakt. Also ist die Spur $\gamma(I)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, und somit existiert das Maximum $M := \max_{z\in\gamma(I)} |f(z)| < \infty$. Mit der früheren Standardabschätzung erhält man dann sofort:

$$\begin{aligned} \Big| \int_\gamma f(z)\,dz \Big| = \Big| \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \Big| &\le \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \\ &\le M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = L(\gamma)\,M \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit unserer Behauptung. □

Beispiele. 1. Es seien bei festem $z_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

und der Integrationsweg $\gamma : t \longmapsto re^{it} + z_0$, also der positiv umlaufene Rand des Kreises vom Radius r mit Mittelpunkt z_0, vorgegeben. Dann berechnet man leicht

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\,r\,e^{it}}{r\,e^{it}}\,dt = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i .$$

Dieses Beispiel ist meistens der Grund für das Auftreten des Faktors $2\pi i$ in der Funktionentheorie.

2. γ sei die Strecke von a nach b in $\mathbb{R}$, d. h. $\gamma(t) = t$ auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Hier erhält man unmittelbar

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(t)\,dt$$

mit unserer Definition für Integrale von komplex–wertigen Funktionen auf reellen Intervallen. Die neue Definition ist damit mit der alten verträglich.

3. Es sei $\gamma(t) = z_0$ für alle $t \in I$ der sogenannte „konstante Weg“. Hier ist $\gamma' = 0$ und damit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 .$$

4. Es sei $f(z) = |z|$, und γ_1, γ_2 seien die folgenden Wege mit gleichem Anfangs– und Endpunkt:

$$\gamma_1 : \begin{cases} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{i(\pi - t)} \end{cases} , \quad \gamma_2 : \begin{cases} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t \end{cases} .$$

Man rechnet dann sofort aus, daß

$$\int_{\gamma_1} |z|\,dz = \int_0^\pi \gamma_1'(t)\,dt = \gamma_1(t)\Big|_0^\pi = 1 - (-1) = 2$$

und

$$\int_{\gamma_2} |\, z\,|\, dz \;=\; \int_{-1}^{1} |\, t\,|\, dt \;=\; 2 \int_0^1 t\, dt \;=\; 2\; \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \;=\; 1\;.$$

Damit sind die beiden Integrale verschieden, Wegintegrale also im allgemeinen von den benutzten Wegen abhängig!

Klar ist die *Linearität des Wegintegrals*, für die wir nicht gesondert die Formulierung durch einen eigenen Satz spendieren:

$$\int_\gamma (a\, f\,(z) \,+\, b\, g\,(z))\, dz \;=\; a \int_\gamma f\,(z)\, dz \,+\, b \int_\gamma g\,(z)\, dz\;.$$

Schließlich gilt noch

Satz 5.4 *Seien* $\gamma,\, \gamma_1,\, \gamma_2$ *Integrationswege,* γ_1 *und* γ_2 *seien „zusammensetzbar“. Dann gilt* :

$$\int_{\gamma^{-1}} f\,(z)\, dz \;=\; -\int_\gamma f\,(z)\, dz\;,$$

$$\int_{\gamma_1\gamma_2} f\,(z)\, dz \;=\; \int_{\gamma_1} f\,(z)\, dz \,+\, \int_{\gamma_2} f\,(z)\, dz\;.$$

Beweis. Der zweite Teil folgt aus der entsprechenden Formel für die Zerlegung eines Intervalls in Teilintervalle. Zur ersten Formel beachte man, daß für $\gamma\,,\ \gamma^{-1} :\, [\, a,\, b\,] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma^{-1}(t) \,=\, \gamma\,(b + a - t)$ die Beziehung $(\gamma^{-1})'(t) \,=\, -\,\gamma'(b + a - t)$ folgt. Deshalb ergibt sich mit der Substitution $s := b + a - t$ und der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^{-1}} f\,(z)\, dz \;&=\; -\int_a^b f\,(\gamma\,(b \,+\, a \,-\, t))\, \gamma'(b \,+\, a \,-\, t)\, dt\\ &=\; \int_b^a f\,(\gamma\,(s))\, \gamma'(s)\, ds \;=\; -\int_\gamma f\,(z)\, dz\;,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Als nächstes benötigen wir einige Aussagen über Integrale von gleichmäßig konvergenten Folgen von Funktionen.

Satz 5.5 *Sei* $\gamma :\, I \to \mathbb{C}$ *ein Integrationsweg, und* (f_j) *sei eine gleichmäßig gegen* f *konvergente Folge stetiger Funktionen* $f_j :\, \gamma\,(I) \to \mathbb{C}$ *. Dann gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \int_\gamma f_j(z)\, dz \;=\; \int_\gamma \lim_{j\to\infty} f_j(z)\, dz \;=\; \int_\gamma f\,(z)\, dz\;.$$

Beweis. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge f_j hat man

$$\lim_{j\to\infty}\ \max_{z\in\gamma(I)}\ |\, f_j(z) \,-\, f\,(z)\,| \;=\; 0\;.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung mit Hilfe unserer Standardabschätzung wegen der Linearität des Integrals:

$$\Big|\, \int_\gamma (f_j(z) \,-\, f\,(z))\, dz\, \Big| \;\le\; L\,(\gamma)\, \max_{z\in\gamma(I)}\, |\, f_j(z) \,-\, f\,(z)\,|\;.$$ □

Entsprechend beweist man

Satz 5.6 *Es sei* γ *ein Integrationsweg,* M *sei eine Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$ *, und* $f : \gamma(I) \times M \to \mathbb{C}$ *sei eine stetige Funktion. Dann gilt :*

i) $F(x) := \displaystyle\int_\gamma f(z, x)\, dz$ *ist stetig auf* M *.*

ii) *Ist* M *eine offene Teilmenge und besitzt* f *auf* $\gamma(I)\times M$ *eine stetige partielle Ableitung* f_{x_k} , $1 \leq k \leq n$ *, so ist auch* F *stetig partiell nach* x_k *differenzierbar, und es gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_k}(z, x)\, dz \, .$$

iii) *Ist* $M \subset \mathbb{C}$ *offen und* $f(z, \zeta)$ *für jedes* $z \in \gamma(I)$ *nach* ζ *komplex differenzierbar, so daß die (partielle) Ableitung* $f_\zeta(z, \zeta)$ *auf* $\gamma(I) \times M$ *stetig ist, so ist* $F(\zeta)$ *holomorph auf* M *mit*

$$\frac{dF}{d\zeta}(\zeta) = \int_\gamma \frac{\partial f(z, \zeta)}{\partial \zeta}\, dz \, .$$

Beweis. Wir zeigen nur iii), da i) und ii) aus den entsprechenden Sätzen im Reellen sofort abgeleitet werden können. Nach ii) folgt, daß F reell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial F}{\partial \overline{\zeta}} = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}}\, dz = 0 \, .$$

Also ist F holomorph, und es gilt

$$\frac{dF}{d\zeta} = \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta}\, dz \, . \qquad \square$$

Aus dem Satz von Fubini folgt schließlich noch unmittelbar:

Satz 5.7 *Es seien* γ_1 *und* γ_2 *Integrationswege, und* $f : \gamma_1(I_1)\times\gamma_2(I_2) \to \mathbb{C}$ *sei eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_1} \Big(\int_{\gamma_2} f(z, w)\, dw \Big)\, dz = \int_{\gamma_2} \Big(\int_{\gamma_1} f(z, w)\, dz \Big)\, dw \, .$$

6 Stammfunktionen

Wir beginnen ohne Umschweife mit der folgenden

Definition. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine vorgegebene stetige Funktion, und $F : U \to \mathbb{C}$ sei holomorph mit $F' = f$. Dann heißt F eine *Stammfunktion* von f. Man sagt, daß f *lokale Stammfunktionen* besitze, falls es für alle z_0 eine Umgebung $V = V(z_0) \subset U$ gibt, so daß $f_{|V}$ eine Stammfunktion besitzt.

Bemerkung. Besitzt f (lokal) eine Stammfunktion F, so ist F nach Definition komplex differenzierbar. Wir haben in der Einleitung schon ausgeführt, daß wir beweisen werden, daß F dann sogar beliebig oft komplex differenzierbar ist. Infolgedessen muß a priori auch f schon komplex differenzierbar und damit holomorph sein. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, wie wir bald feststellen werden: *Eine Funktion besitzt genau dann lokale Stammfunktionen, wenn sie holomorph ist.*

Wir werden außerdem sehen, daß die Existenz von Stammfunktionen von f auf intime Weise mit der Frage zusammenhängt, ob Integrale von f nur von den Endpunkten eines Weges, nicht aber von dem speziell gewählten Weg abhängig, kurz gesagt also *wegunabhängig* sind. Als ersten Schritt dazu können und werden wir den *Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung* auf Kurvenintegrale verallgemeinern.

Satz 6.1 *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und besitze eine Stammfunktion F. Dann gilt für jeden Weg γ in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1, daß*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_1) - F(z_0)\,.$$

Beweis. Es sei $\gamma : [a, b] \to U$ eine Parametrisierung und $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ eine Zerlegung des gegebenen Intervalls, so daß $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \to U$ stetig differenzierbar ist. Ist dann der Satz für die γ_j schon bewiesen, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^n (F(\gamma(t_j)) - F(\gamma(t_{j-1})))\\ &= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(z_1) - F(z_0)\,.\end{aligned}$$

Ohne Einschränkung können wir daher voraussetzen, daß γ auf dem gesamten Definitionsintervall stetig differenzierbar ist. Dann gilt offensichtlich bei geeigneter Interpretation der Kettenregel:

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{\gamma}}{\partial t} = F' \circ \gamma' = f \circ \gamma'$$

und damit nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\, dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)\, dt\\ &= \quad (F \circ \gamma)(t)\Big|_a^b \quad = F(z_1) - F(z_0)\,.\end{aligned}$$

□

Folgerung 6.2 *Sind die Voraussetzungen wie im vorhergehenden Satz, so gilt für alle geschlossenen Wege γ in U:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0\,.$$

Beispiele. 1. Die Funktion $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, besitzt die Stammfunktion

$$F(z) = (n+1)^{-1} z^{n+1} \text{ auf } \mathbb{C} \text{ für } n \geq 0 \text{ bzw. auf } \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ für } n \leq -2 .$$

Somit ergibt sich für Wege in dem jeweiligen Gebiet mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1:

$$\int_\gamma z^n \, dz = \frac{1}{n+1} \, (z_1^{n+1} - z_0^{n+1}) ,$$

und damit kann man insbesondere Stammfunktionen für beliebige Polynome hinschreiben:

$$\Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} \, z^{j+1} \Big)' = \sum_{j=0}^{n} a_j \, z^j .$$

2. Für $f(z) = |z|$ haben wir schon die Wegabhängigkeit gezeigt. Also besitzt f keine Stammfunktion (auch nicht lokal). Der Grund hierfür besteht natürlich darin (siehe oben), daß f nicht holomorph ist!

3. Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und besitzt dort lokale Stammfunktionen (*Zweige des Logarithmus*). f besitzt aber auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine *globale Stammfunktion*, da (wie wir wissen)

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{dz}{z} = 2 \pi i .$$

Wir werden sehen, daß dies das zentrale Beispiel für das Abweichen von der „Norm“ ist (Residuensatz).

4. Weitere einfache Anwendungen sind natürlich Formeln wie

$$\int_\gamma e^z \, dz = e^{z_1} - e^{z_0} , \quad \int_\gamma \sin z \, dz = - \cos z_1 + \cos z_0 , \quad \text{etc.}$$

Bemerkung. Schreibt man die Funktion f in der Form $u - i v$ und $\mathfrak{u} = (u, v)$ für das entsprechende Vektor– oder Kraftfeld (wie bei der in der Einleitung besprochenen physikalischen Anwendung), so lassen sich

$$\mathrm{Re} \int_\gamma f(z) \, dz = \int_\gamma (u \, dx + v \, dy) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im} \int_\gamma f(z) \, dz = \int_\gamma (u \, dy - v \, dx)$$

auch *physikalisch* deuten: Das erste Integral ist als die von dem Kraftfeld verrichtete *Arbeit* längs des gegebenen Weges zu interpretieren und das zweite z. B. als der *Fluß* des Feldes durch die Kurve. Falls f eine Stammfunktion besitzt, so sind Arbeit und Fluß unabhängig vom Weg (die Physiker sprechen dann von einem *konservativen Kraftfeld*).

Wir wollen nun die Umkehrung von Satz 6. 1 bzw. seiner Folgerung formulieren und beweisen.

Satz 6.3 *Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf dem Gebiet G, und für alle geschlossenen Integrationswege γ in G gelte*

$$\int_\gamma f(z) \, dz = 0 .$$

Dann besitzt f auf G eine Stammfunktion.

Beweis. Sei $a \in G$ ein beliebiger, aber für das Weitere fest gewählter Punkt, $z \in G$ sei variabel. Dann gibt es einen stetigen Weg von a nach z in G, der sogar als Polygonzug gewählt werden kann, also einen Integrationsweg γ_z von a nach z. Definiere

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta$$

und beachte, daß der Wert von F an der Stelle z wegen der Voraussetzung nicht von der speziellen Wahl des Weges γ_z abhängt. Wir werden zeigen, daß F eine Stammfunktion von f ist, d. h. daß F in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar ist mit $F'(z_0) = f(z_0)$. Ist z nahe bei z_0 gelegen, so ist die Strecke $[z, z_0] \subset G$, und

$$\gamma := \gamma_{z_0} \cdot [z_0, z] \cdot \gamma_z^{-1}$$

ist ein geschlossener Weg in G. Es folgt

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\gamma_{z_0}} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta)\, d\zeta\ ,$$

also

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta\ .$$

Parametrisiert man die in Frage stehende Strecke durch $[0, 1] \ni t \mapsto z_0 + t(z - z_0)$, so ergibt sich das letzte Integral zu

$$\int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)\, dt = (z - z_0) A(z)\ ,$$

wobei

$$A(z) = \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))\, dt\ .$$

Wir sind mit dem Beweis fertig, wenn wir zeigen können, daß $A(z)$ stetig in z_0 ist, denn dann ist F dort komplex differenzierbar, und daß $A(z_0) = f(z_0)$ gilt. Das letztere ist aber klar nach Definition, wenn wir die Stetigkeit schon erkannt haben, und diese folgt aus der Stetigkeit von f in z_0, die nach der Standardabschätzung die Ungleichung

$$|A(z) - A(z_0)| \le \max_{0 \le t \le 1} |f(z_0 + t(z - z_0)) - f(z_0)| \longrightarrow 0$$

für $z \to z_0$ nach sich zieht. □

Bemerkung. Wie wir oben bemerkt haben, ist die Stammfunktion $F(z)$ nicht von γ_z, wohl aber von dem Punkt a abhängig. Bei Variation von a unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen damit nur um eine additive Konstante. Dies kann man auch a priori einsehen, da aus $F_1' = F_2' = f$ unmittelbar $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = 0$ und deshalb nach Lemma 4.1 $F_1 - F_2 = \text{const.}$ folgt.

Verschärft man die Voraussetzung an G, so braucht man das Verschwinden des Integrals nur für spezielle geschlossene Kurven vorauszusetzen.

Satz 6.4 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig, und es gelte für alle abgeschlossenen Dreiecke*[6] $\Delta \subset G$*, daß*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0\ .$$

Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G.

[6] Damit ist natürlich das „volle" Dreieck, also die *Dreiecksfläche* im Gegensatz zu dem Rand $\partial\Delta$ desselben gemeint. Ist G jedoch *konvex*, wie vorausgesetzt, so ist mit $\partial\Delta \subset G$ auch notwendigerweise $\Delta \subset G$. Im Übrigen zeigt der Beweis, daß die Voraussetzung nur für alle Dreiecke in G mit einer fest gewählten Ecke a erfüllt zu sein braucht.

Beweis. Wähle wieder $a \in G$ fest; bei konvexem G können wir für γ_z stets die Strecke $[\,a,\,z\,]$ wählen und $F(z)$ durch $\int_{[a,\,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ definieren. Der Rest des Beweises folgt dem von Satz 6.3. □

Folgerung 6.5 *Ist* G *ein beliebiges Gebiet,* $f : G \to \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion, und gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta \;=\; 0$$

für alle Dreiecke $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$ *wie oben, so besitzt* f lokale *Stammfunktionen.*

Denn: Jeder Punkt $z_0 \in G$ besitzt konvexe Umgebungen, die in G enthalten sind. □

Wir können Satz 6.4 noch verschärfen: Ein Bereich $U \subset \mathbb{C}$ heißt *sternförmig* (bezüglich des Punktes $a \in U$), falls für alle $z \in U$ die Verbindungsstrecke von a nach z in U enthalten ist. Jeder sternförmige Bereich ist automatisch ein Gebiet. Ferner ist jedes konvexe Gebiet sternförmig bzgl. jedes seiner Punkte a. Man macht sich leicht klar, daß der obige Beweis auch für jedes sternförmige Gebiet richtig bleibt, wenn man als speziellen Punkt a den in der Definition ausgezeichneten wählt.

Als Anwendung der bisherigen Theorie geben wir einen *funktionentheoretischen Beweis* für Satz 3.5. Die Potenzreihe

$$P(z) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z - z_0)^j$$

besitze einen positiven Konvergenzradius r. Wir schreiben

$$Q(z) \;:=\; \sum_{j=1}^{\infty} j\,a_j\,(z - z_0)^{j-1}$$

für die formal differenzierte Reihe und müssen zeigen, daß diese ebenfalls $D_r = D_r(z_0)$ als Konvergenzkreis besitzt und dort die komplexe Ableitung von P darstellt.

Offensichtlich ist $P(z)$ (bis auf den zusätzliche Summanden a_0) gleich der aus $Q(z)$ durch gliedweise Integration hervorgehende Reihe . Man kann daher genauso gut statt Satz 3.5 auch die Existenz von *Stammfunktionen* für Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreis beweisen.

Folgerung 6.6 *Es sei* $\sum a_j\,(z - z_0)^j$ *eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius* r*. Dann besitzt ihre Grenzfunktion* f *eine auf* $D_r(z_0)$ *konvergente Potenzreihe* F *als Stammfunktion. Man gewinnt* F *durch formale Integration der gegebenen Potenzreihe* :

$$F(z) \;=\; \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_j}{j+1}\,(z - z_0)^{j+1}\,.$$

F *hat ebenfalls den Konvergenzradius* r.

Beweis. Im folgenden sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit zur Vermeidung unnötiger Schreibarbeit $z_0 = 0$ vorausgesetzt. Wir zeigen als erstes, daß der Konvergenzradius R der Potenzreihe F höchstens gleich r ist. Es sei dazu $0 < \rho < R$ beliebig gewählt, und ρ_1 liege echt zwischen ρ und R. (Wenn $R = 0$ ist, gibt es solche Zahlen nicht; dann ist aber auch nichts zu beweisen). Da die Potenzreihe F in ρ_1 konvergiert, gibt es eine Konstante M_1, so daß

$$\left|\,\frac{a_j}{j\,+\,1}\,\right|\,\rho_1^{j+1} \;\le\; M_1 \quad \text{für alle} \quad j \in \mathbb{N}\,.$$

Nun besitzt die Potenzreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} (j\,+\,1)\,z^j$$

nach dem Quotientenkriterium offensichtlich den Konvergenzradius 1. Somit ist auch die Folge

$$(j+1)\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^j$$

durch eine Konstante M_2 nach oben beschränkt und folglich

$$|a_j|\rho^j = \frac{j+1}{\rho_1}\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^j \frac{|a_j|}{j+1}\,\rho_1^{j+1} \le \frac{M_1 M_2}{\rho_1}\,.$$

Damit ist die gegebene Potenzreihe in dem offenen Kreis um 0 mit Radius ρ konvergent. Da $\rho < R$ beliebig war, folgt die Konvergenz dieser Reihe in D_R, und es ist notwendig $r \ge R$.

Sei nun γ eine beliebige Kurve in dem Konvergenzkreis D_r der gegebenen Potenzreihe mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1. Dann folgt aus Satz 5. 5:

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \sum_{j=0}^\infty a_j\,\zeta^j\,d\zeta = \sum_{j=0}^\infty a_j \int_\gamma \zeta^j\,d\zeta = \sum_{j=0}^\infty \frac{a_j}{j+1}\,(z_1^{j+1} - z_0^{j+1})$$

wegen Beispiel 1. Insbesondere verschwindet das Integral für alle geschlossenen Kurven in D_r, und somit besitzt f dort eine Stammfunktion, z. B.

$$\int_{[0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{j=0}^\infty \frac{a_j}{j+1}\,z^{j+1} = F(z)\,.$$

Also ist die Potenzreihe F in D_r konvergent, woraus auch die umgekehrte Abschätzung $R \ge r$ folgt, und es ist $F' = f$. □

Bemerkung. Mit dem aus der reellen Analysis bekannten Grenzwert $\lim \sqrt[j]{j} = 1$ gewinnt man zusammen mit der Cauchy–Hadamardschen Formel leicht einen alternativen Beweis für die Gleichheit der Konvergenzradien.

Des weiteren wollen wir uns noch einmal die Problematik der Logarithmusfunktion vergegenwärtigen. Wegen der Differentialgleichung $(\exp z)' = \exp z$ erfüllt jede mögliche Umkehrfunktion log die Gleichung

$$(\log z)' = \frac{1}{z}\,.$$

Denn wegen $\exp(\log z) = z$ für alle z in einem Definitionsgebiet des Logarithmus folgt nach der Kettenregel

$$(\log z)'\,z = (\log z)'\,e^{\log z} = \frac{d}{dz}\,(\exp(\log z)) = 1\,.$$

Wir haben es deshalb bei diesem Problem schlicht mit der Frage zu tun, ob die Funktion $1/z$ auf dem nicht–sternförmigen Gebiet $\mathbb{C}^*$ eine Stammfunktion besitzt. Dies ist, wie wir schon wissen, nicht der Fall, da das Integral

$$\int_{\partial D_r(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \ne 0$$

ist. Andererseits erhalten wir unter Verwendung von Satz 7.4 und Vorwegnahme weiterer Überlegungen in Kapitel 14:

Auf jedem sternförmigen Teilgebiet G von $\mathbb{C}^*$ besitzt die (holomorphe) Funktion $1/z$ Stammfunktionen, die dort automatisch (bei geeigneter Wahl eines einzigen Funktionswertes an einer festen Stelle) Umkehrfunktionen der Exponentialfunktion darstellen. Wir nennen diese Zweige des Logarithmus *auf G und bezeichnen jede mit dem Symbol* log. *Je zwei solche Zweige unterscheiden sich additiv um ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$.*

Insonders gibt es Zweige des Logarithmus auf der Menge $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Unter diesen gibt es den sogenannten *Hauptzweig*, der an der Stelle $z = 1$ gerade den Wert 0 annimmt (und auf $\mathbb{R}_+^*$ mit dem reellen Logarithmus übereinstimmt). Für diesen schreibt man manchmal auch $\operatorname{Log} z$. Nimmt man irgendeinen Zweig des Logarithmus auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ her und nähert sich der negativen reellen Achse von oben bzw. unten, so konvergieren die Funktionswerte gegen Zahlen, die wir mit $\log^+ z$ bzw. $\log^- z$ bezeichnen. Wegen der Mehrdeutigkeit des Logarithmus auf $\mathbb{C}^*$ ist dann

$$\log^+ z - \log^- z = 2\pi i \, .$$

Ebenso vorsichtig müssen wir sein mit Potenzen z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, die man durch

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

und damit im allgemeinen nicht eindeutig definiert. Auf jedem Gebiet G , auf dem Zweige des Logarithmus existieren, gibt es aber auch Zweige der *Potenzfunktionen* z^α .

7 Die lokalen Cauchyschen Integralformeln

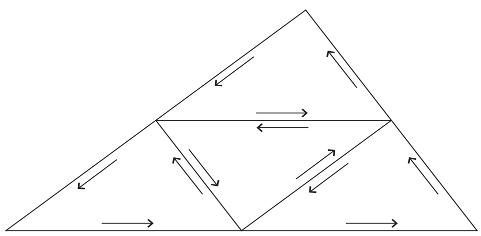
Wir zeigen als erstes, daß *holomorphe* Funktionen stets die Voraussetzungen der Folgerung 6.5 erfüllen.

Satz 7.1 (Goursat 1900) *Sei* f *holomorph auf dem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$, *und sei* $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$ *ein abgeschlossenes Dreieck. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0 \, .$$

Folgerung 7.2 *Holomorphe Funktionen besitzen stets lokale Stammfunktionen. Auf sternförmigen (insbesondere konvexen) Gebieten besitzen sie sogar globale Stammfunktionen.*

Beweis von Satz 1. Wir unterteilen das Dreieck Δ auf die folgende Weise in kleinere kompakte Dreiecke



Figur 7.1

und setzen entsprechend

$$\Delta := \Delta_0^1 = \Delta_1^1 \cup \Delta_1^2 \cup \Delta_1^3 \cup \Delta_1^4 \, .$$

Dann gilt bei gleicher Orientierung aller Δ_1^j, daß

$$I_0 := \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} I_1^j \quad \text{mit} \quad I_1^j := \int_{\partial\Delta_1^j} f(z)\, dz \, .$$

Es folgt

$$|\, I_0 \,| \leq 4 \max_{j=1,\ldots,4} |\, I_1^j \,| \, .$$

Sei Δ_1 eines der kleineren Dreiecke Δ_1^j, für welches der größte Wert unter den $|\, I_1^j \,|$ angenommen wird, und I_1 bezeichne das entsprechende Integral. Wir unterteilen dann Δ_1 wieder auf die gleiche Weise und erhalten eine unendliche Folge von Dreiecken

$$\Delta = \Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \, ,$$

so daß mit

$$I_j = \int_{\partial\Delta_j} f(z)\, dz$$

gilt:

$$|\, I \,| \leq 4^j \,|\, I_j \,| \, .$$

Für die Längen der entsprechenden Integrationswege ergibt sich ferner

$$L(\partial\Delta) = 2\, L(\partial\Delta_1) = \cdots = 2^j\, L(\partial\Delta_j) \, .$$

Da alle Δ_j kompakt sind, existiert ein $z_0 \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j$. Andererseits geht der Durchmesser der Δ_j gegen Null. Daraus folgt

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j = \{ z_0 \} .$$

Nun ist f nach Voraussetzung speziell in diesem Punkte $z_0 \in G$ komplex differenzierbar. Also gilt

$$f(z) = f(z_0) + (f'(z_0) + A(z))(z - z_0) ,$$

wobei $A(z)$ stetig ist in G mit $\lim_{z\to z_0} A(z) = 0$. Die lineare Funktion $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ besitzt eine globale Stammfunktion; also ist nach Folgerung 6.2:

$$\int_{\partial\Delta_j} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta_j} A(z)(z - z_0)\, dz$$

und folglich

$$|I_j| \le L(\partial\Delta_j) \max_{z\in\partial\Delta_j} |z - z_0|\,|A(z)| \le L(\partial\Delta_j)^2 \max_{z\in\Delta_j} |A(z)| .$$

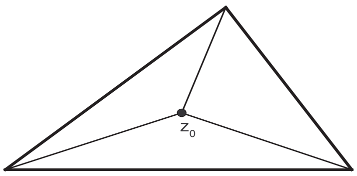
Damit erhält man schließlich

$$|I| \le 4^j \left(\frac{L(\partial\Delta)}{2^j}\right)^2 \max_{z\in\Delta_j} |A(z)| = L(\partial\Delta)^2 \max_{z\in\Delta_j} |A(z)| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 . \qquad \square$$

Um den Integralsatz bequem zur Ableitung der Integral–Formeln anwenden zu können, benötigen wir eine Verschärfung (die aber nur eine scheinbare ist; siehe das Ende dieses Kapitels).

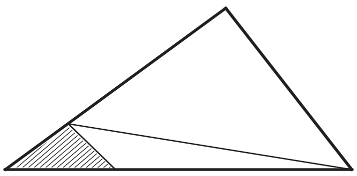
Satz 7.3 *Die Funktion* $f : G \to \mathbb{C}$ *sei stetig, und* f *sei an allen Stellen von* G *mit eventueller Ausnahme eines einzigen Punktes* $z_0 \in G$ *holomorph. Dann ist* $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ *für alle Dreiecke* $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$.

Beweis. Wir brauchen nur Dreiecke zu behandeln mit $z_0 \in \Delta$. Zerlege dann Δ in der folgenden Form



Figur 7.2

wobei die ausgearteten Fälle, bei denen z_0 auf dem Rand von Δ liegt, weniger Teildreiecke ergeben. Auf jeden Fall können wir damit annehmen, daß z_0 ein Eckpunkt von Δ ist. In diesem Fall zerlege man weiter:



Figur 7.3

Es folgt

$$\int_{\partial \Delta} f(z)\, dz = \int_{\partial \Delta_\varepsilon} f(z)\, dz$$

durch Anwendung von Satz 1 auf die beiden restlichen Dreiecke. Damit erhalten wir aber

$$\Big| \int_{\partial \Delta_\varepsilon} f(z)\, dz \Big| \le L(\partial \Delta_\varepsilon) \max_{z \in \partial \Delta_\varepsilon} |f(z)| \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0 . \qquad \square$$

Satz 7.4 (Cauchyscher Integralsatz - lokale Version) *G sei ein sternförmiges (z. B. also ein konvexes) Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf $G \setminus \{ z_0 \}$ holomorph. Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ in G :*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 .$$

Beweis. Aufgrund der bisher bewiesenen Sätze besitzt f auf G eine Stammfunktion. Die Behauptung ergibt sich dann als Folgerung aus Satz 6.1. $\square$

Wir können nun bequem die *Cauchysche Integralformel* (in lokaler Fassung) beweisen.

Satz 7.5 (Cauchysche Integralformel) *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und $D = D_r(z_0)$ liege relativ kompakt in G. Dann gilt für alle $z \in D$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta .$$

Hierbei ist der Rand ∂D natürlich positiv zu orientieren.

Beweis. Es ist $U = D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset\subset G$ für hinreichend kleines ε. Wähle $z \in D$ fest; wir betrachten dann, wie in der Einleitung schon ausgeführt, die Funktion

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} , & \zeta \in U \setminus \{ z \} \\[2ex] f'(\zeta) , & \zeta = z . \end{cases}$$

Wegen Satz 4 ist

$$0 = \int_{\partial D} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} .$$

Also ist nur noch zu zeigen:

$$h(z) := \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 2\pi i \quad \text{auf} \quad D .$$

Mit Satz 5. 6. folgt aber sofort die Holomorphie von $h(z)$ auf D und die Relation

$$h'(z) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = - \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta = 0 ,$$

da der Integrand im letzten Integral eine Stammfunktion besitzt. Somit ist $h'(z) \equiv 0$, und da nach einem früheren Beispiel $h(z_0) = 2\pi i$ gilt, ist $h(z) \equiv 2\pi i$ auf D. $\square$

Bemerkung. Außerhalb von $\overline{D}$ ergibt sich ebenfalls $h(z) = \text{const.}$ Da außerdem offensichtlich

$$\lim_{z \to \infty} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

ist, muß h dort identisch Null sein.

Wenden wir wiederum Satz 5.6 auf die Cauchysche Integralformel an, so sehen wir, daß für f holomorph auf G, $D \subset\subset G$ eine Kreisscheibe, die komplexe Ableitung von f sich in $z \in D$ berechnet in der Form

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta .$$

Damit ist aber f' stetig auf D und sogar auf ganz G. f' ist in der Tat nach z komplex differenzierbar auf D, und zwar gilt

$$f''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3}\, d\zeta .$$

So fortfahrend erhält man

Satz 7.6 (Cauchysche Integralformeln) $f : G \to \mathbb{C}$ *sei eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$. *Dann ist* f *beliebig oft komplex differenzierbar (insbesondere ist* f' *stetig). Für alle Kreisscheiben* $D \subset\subset G$ *gelten die* Integralformeln :

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}}\, d\zeta , \quad z \in D , \quad j \in \mathbb{N} .$$

Wir ziehen noch zwei wichtige Folgerungen aus diesen Ergebnissen.

Satz 7.7 (Morera) *Die Funktion* $f : G \to \mathbb{C}$ *sei stetig. Dann gilt :* f *ist holomorph genau dann, wenn* $\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0$ *ist für alle Dreiecke* $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$.

Beweis. Eine Richtung wird von Satz 1 geliefert. Ist umgekehrt die Bedingung des Satzes erfüllt, so besitzt f nach Folgerung 6.5 lokale (holomorphe) Stammfunktionen, die nach Satz 6 beliebig oft, also insbesondere zweimal komplex differenzierbar sind. Somit ist (lokal) insbesondere $f = F'$ komplex differenzierbar. □

Schließlich zeigen wir noch, daß die Voraussetzung von Satz 2 impliziert, daß f auf ganz G holomorph ist. Wir beweisen gleich einen allgemeineren Satz. Dazu erinnern wir an die folgende Definition.

Definition. Die Menge $M \subset G$ heißt *diskret* in G, falls für alle $z_0 \in G$ eine Umgebung $U = D_\varepsilon(z_0) \subset G$ existiert, s. d. $M \cap D_\epsilon(z_0)$ aus endlich vielen Punkten besteht.

Satz 7.8 (Riemannscher Hebbarkeitssatz) *Es sei* G *ein Gebiet,* $M \subset G$ *sei diskret, und* $f : G \backslash M \to \mathbb{C}$ *sei holomorph und lokal beschränkt nahe* M. *Dann gibt es genau eine holomorphe Funktion* $\widetilde{f} : G \to \mathbb{C}$ *mit* $\widetilde{f}_{|G\backslash M} = f$.

Beweis. i) Die Eindeutigkeit ist klar, da nach Definition $G \setminus M$ dicht in G liegt und die Funktion $\widetilde{f}$ stetig ist.

ii) Für alle $z_0 \in M$ existiert eine Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ mit $U(z_0) \cap M = \{ z_0 \}$. Es genügt daher, eine holomorphe Fortsetzung von f nach U zu finden. Wir haben damit das Problem auf den Fall $M = \{ z_0 \}$ reduziert.

iii) Wir beweisen den Satz für $M = \{ z_0 \}$ unter der Zusatzvoraussetzung, daß f stetig in z_0 ergänzt werden kann, daß also der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} f(z) =: \widetilde{f}(z_0)$$

existiert. Wir definieren $\widetilde{f}$ dann auf naheliegende Weise auf G; $\widetilde{f}$ ist somit stetig in G, holomorph in $G \setminus \{ z_0 \}$, und besitzt daher nach Satz 3 und der Folgerung 6. 5 lokale Stammfunktionen. Wie oben (Satz 7) ergibt sich hieraus, daß $\widetilde{f}$ holomorph auf G ist.

iv) f sei nur beschränkt nahe z_0, d. h. $| f(z) | \le R$ für alle $z \in U \setminus \{ z_0 \}$. Wir bilden dann

$$F(z) := \begin{cases} (z - z_0) f(z) \, , & z \in U \setminus \{ z_0 \} \, , \\ 0 \, , & z = z_0 \, . \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist F holomorph in $U \setminus \{ z_0 \}$ und stetig in z_0 mit $F(z_0) = 0$, so daß F nach Teil iii) holomorph auf U und insbesondere in z_0 komplex differenzierbar ist. Somit existiert

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} f(z) \, ,$$

und wir können noch einmal Teil iii) auf die ursprüngliche Funktion f anwenden. □

Bemerkung. Historische Bemerkungen zu diesem Themenkreis findet man z. B. bei Fischer–Lieb.

Zum Abschluß dieses Kapitels geben wir einen ersten Beweis für den *Fundamentalsatz der Algebra*. Dazu reichen schon die wenigen Ergebnisse, die wir bisher gewonnen haben. Weitere kurze funktionentheoretische Beweise lernen wir später kennen. Es sei also P ein komplexes Polynom von einem Grad $n \ge 1$. Wir müssen zeigen, daß P mindestens eine Nullstelle in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ besitzt. Nehmen wir an, daß dies nicht der Fall ist. Dann ist die Funktion $f := 1/P$ holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, und sie verschwindet nirgends. Schreiben wir

$$P(z) = a_0 \, z^n + a_1 \, z^{n-1} + \cdots$$

mit $a_0 \neq 0$, so ist

$$\lim_{z \to \infty} \frac{P(z)}{z^n} = a_0 \neq 0$$

und damit

$$| P(z) | \ge | z |^n \, | a_0 | / 2$$

für alle hinreichend großen $| z |$ (siehe auch Satz 9.9). Folglich besteht für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung $| f(z) | \le \varepsilon$ für $| z | \ge R = R_\varepsilon >> 0$. Die Standardabschätzung für

$$f(0) = \frac{1}{2 \pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f(z) \, dz}{z}$$

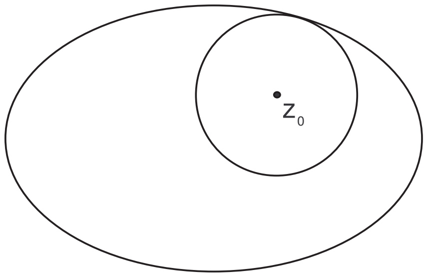
liefert aber sofort

$$| f(0) | \le \frac{(2 \pi R) \, \varepsilon}{2 \pi R} = \varepsilon \, ,$$

also, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, $f(0) = 0$. Widerspruch! □

8 Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

Holomorphe Funktionen sind nach Satz 7.6 beliebig oft komplex differenzierbar. Wir werden in diesem Paragraphen zeigen, daß sie sogar analytisch sind. Dazu sei $f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$ fest und $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$, s. d. $D = D_R(z_0)$ den größten Kreis um z_0 bezeichnet, der noch in G enthalten ist. Ferner ist im folgenden r stets eine beliebige reelle Zahl mit $0 < r < R$.



Figur 8.1

Wir werden den *Cauchy–Kern* $(\zeta - z)^{-1}$ vermittels der geometrischen Reihe in eine Potenzreihe entwickeln. Es sei dazu $z \in D_r(z_0)$ und $\zeta \in \partial D_r(z_0)$. Dann gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^j ,$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite absolut und gleichmäßig bei festem z für alle $\zeta \in \partial D_r(z_0)$ konvergiert. Da f stetig auf $\partial D_r(z_0)$ ist, ist $f_{|\partial D_r(z_0)}$ beschränkt, so daß auch die Reihe

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}$$

gleichmäßig konvergent auf $\partial D_r(z_0)$ ist bei festem z. Also gilt nach der Cauchy–Formel und dem Satz 5.5:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \sum_{j=0}^{\infty} (z - z_0)^j \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\, d\zeta \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\, d\zeta \right) (z - z_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^j . \end{aligned}$$

Da die rechte Seite von r unabhängig ist, konvergent diese Potenzreihe auf jeden Fall in $D_R(z_0)$. - Wir haben damit gezeigt:

Satz 8.1 *Sei $f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$, und es sei $R = \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$. Dann läßt sich f um z_0 in eine in $D_R(z_0)$ konvergente Potenzreihe entwickeln :*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j , \quad z \in D_R(z_0) .$$

Die Koeffizienten a_j sind durch f eindeutig bestimmt, und zwar vermöge der Formel

$$a_j = \frac{1}{j!} f^{(j)}(z_0) ,$$

so daß die Reihe mit der Taylorentwicklung *von* f *an der Stelle* z_0 *übereinstimmt. Für jedes* r *mit* $0 < r < R$ *berechnen sich die Taylorkoeffizienten* a_j *zu*

$$a_j \,=\, \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f\,(\zeta)}{(\zeta\,-\,z_0)^{j+1}}\,d\zeta\ .$$

Beweis. Nur noch die Eindeutigkeitsaussage ist zu verifizieren. Wegen

$$f\,(z)\,=\,\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z\,-\,z_0)^j$$

ist selbstverständlich $f\,(z_0)\,=\,a_0$. Da wir Potenzreihen in ihrem Konvergenzbereich bedenkenlos differenzieren dürfen, erhalten wir ebenso

$$f'(z)\,=\,\sum_{j=0}^{\infty}(j\,+\,1)\,a_{j+1}\,(z\,-\,z_0)^j$$

und damit $f'(z_0)\,=\,a_1$. Durch vollständige Induktion gewinnt man daraus die gewünschte Beziehung

$$f^{(n)}(z_0)\,=\,1\cdot\ldots\cdot n\cdot a_n\ . \qquad \square$$

Warnung. Der Konvergenzradius der Taylorreihe von f ist mindestens so groß wie der Abstand R von z_0 zum Rand ∂G; er kann aber durchaus größer als R sein! Dieses Phänomen wird uns später noch im Zusammenhang mit dem Problem der *analytischen Fortsetzung holomorpher Funktionskeime* intensiv beschäftigen.

Folgerung 8.2 *Die Potenzreihe* $P\,(z)\,=\,\sum_{0}^{\infty} a_j\,(z-z_0)^j$ *sei auf der Kreisscheibe* $D_R(z_0)$ *konvergent, und* $z_1 \in D_R(z_0)$ *sei beliebig gewählt. Dann gibt es eine Entwicklung*

$$P\,(z)\,=\,\sum_{j=0}^{\infty} b_j\,(z\,-\,z_1)^j\ ,$$

die im Kreis um z_1 *mit Radius* $R\,-\,|\,z_1\,-\,z_0\,|$ *konvergiert.*

Bemerkung. Man erhält diese neue Entwicklung selbstverständlich durch *Umordnung* der Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z\,-\,z_0)^j \,&=\, \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,((z\,-\,z_1)\,+\,(z_1\,-\,z_0))^j \\ &=\, \sum_{j=0}^{\infty} a_j\left((z\,-\,z_1)^j\,+\,\binom{j}{1}(z_1\,-\,z_0)\,(z\,-\,z_1)^{j-1}\,+\,\cdots\right)\end{aligned}$$

nach Potenzen von $(z\,-\,z_1)$. Man beachte, daß wir dieses Ergebnis auch schon in der *reellen* Analysis mit Hilfe des *Umordnungssatzes* bewiesen haben.

Eine weitere interessante Folgerung ist, daß eine Potenzreihe im Rand ihres Konvergenzkreises ihre natürliche Grenze in Bezug auf holomorphe Fortsetzbarkeit findet.

Satz 8.3 *Sei* R *der Konvergenzradius der Reihe* $\sum a_j\,(z\,-\,z_0)^j$, *und sei*

$$f\,(z)\,=\,\sum a_j\,(z\,-\,z_0)^j\ .$$

Dann gibt es keine holomorphe Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{O}\,(U)$ *mit* $\overline{D}_R(z_0) \subset U$, *s. d.* $\widetilde{f}_{|\,D_R(z_0)}\,=\,f$.

Beweis (durch Widerspruch). Angenommen, es existierte eine solche Fortsetzung $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(U)$, $D = D_R(z_0)$, $\overline{D} \subset U$. Dann ist auch noch $D_{R+\delta} \subset U$ für ein $\delta > 0$. Wegen Satz 1 muß dann aber die Potenzreihenentwicklung von $\widetilde{f}$ um z_0 konvergent in $D_{R+\delta}$ sein. Diese Potenzreihenentwicklung ist aber identisch mit der von f wegen $f = \widetilde{f}_{|D_R}$. Also müßte der Konvergenzradius doch $> R$ sein. Widerspruch! □

Bemerkungen. 1. Im Reellen ist ein entsprechender Satz nicht richtig, wie das in der Einleitung angegebene Beispiel $\dfrac{1}{1 + x^2}$ zeigt.

2. Man kann leicht das folgende Kriterium beweisen: Gilt unter den obigen Voraussetzungen für ein $z_1 \in D_R(z_0) \setminus \{ z_0 \}$, daß $f(z) \neq 0$ für $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, aber $f(z_1) = 0$, so besitzt die Potenzreihenentwicklung von $1/f$ um z_0 den Konvergenzradius $|z_1 - z_0|$.

3. Man kann unter den obigen Voraussetzungen sogar zeigen, daß sich f nicht über alle Randpunkte von $D_R(z_0)$ hinaus *lokal* holomorph fortsetzen läßt. Es ergibt sich nämlich aus dem *Identitätssatz* (Satz 5) sofort, daß zwei solcher lokalen Fortsetzungen (definiert auf Kreisen mit einem Randpunkt von D_R als Mittelpunkt) in dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche übereinstimmen. Wegen der Kompaktheit von ∂D_R besitzt dann f eine holomorphe Fortsetzung nach $D_{R+\delta}$ im Gegensatz zu dem obigen Satz.

Wir können nunmehr noch einmal die wichtigsten äquivalenten Bedingungen für die Holomorphie zusammenfassen (man könnte die Liste noch ohne weiteres verlängern).

Satz 8.4 *Es sei f eine komplex–wertige Funktion auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$. Dann sind äquivalent* :

i) *f ist holomorph (also in jedem Punkt von U komplex differenzierbar).*

ii) *f ist reell differenzierbar und genügt den Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.*

iii) *f besitzt lokale Stammfunktionen.*

iv) *f ist lokal um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar (also „komplex–analytisch“).*

Zum Schluß wollen wir noch den *Identitätssatz* samt einiger Folgerungen ableiten. Dazu vermerken wir zunächst: Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$, so sind äquivalent:

i) $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0\,, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0\,.$

ii) Die Taylorentwicklung von f um z_0 lautet

$$\sum_{j=n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

iii) Es existiert eine Umgebung $U = U(z_0) \subset G$ und eine Funktion $g \in \mathcal{O}(U)$ mit $g(z_0) \neq 0$, so daß $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ für alle $z \in U$.

Definition. Man sagt, f besitze in z_0 eine *Nullstelle der Ordnung* n, falls eine der obigen äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

Satz 8.5 (Identitätssatz) *Seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent* :

i) *$f \equiv g$.*

ii) *$f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für ein $z_0 \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$.*

iii) *Es existiert eine* nicht diskrete *Teilmenge* $N \subset G$, *so daß* $f_{|N} = g_{|N}$.

Wählt man speziell $g \equiv 0$ *so sind für* $f \in \mathcal{O}(G)$ *äquivalent* :

i)′ $f \equiv 0$.

ii)′ $f^{(n)}(z_0) = 0$ *für ein* $z_0 \in G$ *und alle* $n \in \mathbb{N}$.

iii)′ *Es existiert eine* nicht diskrete *Teilmenge* $N \subset G$, *so daß* $f_{|N} = 0$.

Definition und *Bemerkung*. Im Falle ii)′ nennt man z_0 eine *Nullstelle unendlicher Ordnung* von f. Auch *reell–analytische* Funktionen können keine Nullstellen unendlicher Ordnung besitzen, außer wenn sie (lokal) identisch verschwinden. Dagegen können nicht triviale reelle $\mathcal{C}^\infty$–Funktionen Nullstellen unendlicher Ordnung haben.

Beweis von Satz 5. Betrachte $f - g$ und 0 anstelle von f und g. Wir können damit ohne Einschränkung in dem Satz $g \equiv 0$ annehmen und nur die Äquivalenz der „gestrichenen“ Aussagen beweisen.

iii)′ $\Longrightarrow$ ii)′. Da N nicht diskret in G ist, gibt es eine unendliche Folge $z_k \neq z_0$, $k \geq 1$, in N mit $z_0 = \lim z_k$. Aus $f(z_k) = 0$ folgt dann $f(z_0) = \lim f(z_k) = 0$. Also ist mit

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j$$

automatisch $a_0 = 0$. Angenommen, wir hätten schon $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ nachgewiesen. Aus

$$f(z) = \sum_{j=n}^{\infty} a_j (z - z_0)^j = (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots)$$

folgt dann, wenn wir für die Klammer auf der rechten Seite $g(z)$ schreiben, mit $f(z_k) = 0$ auch $g(z_k) = 0$. Da g stetig (sogar holomorph) ist, ergibt sich auch $a_n = g(z_0) = \lim g(z_k) = 0$. Also folgt induktiv $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und das heißt auch $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle n.

ii)′ $\Longrightarrow$ i)′. $f^{(n)}(z_0) = 0$ für alle n bedeutet nichts anderes, als daß die Taylorreihe von f identisch 0 ist, also $f \equiv 0$ in einer Umgebung von z_0 gilt. Offensichtlich ist die Menge

$$\{ z \in G : f^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \} \subset G$$

damit offen und abgeschlossen in G. Da diese Menge nach Voraussetzung nicht leer ist, muß sie mit G übereinstimmen, so daß $f \equiv 0$.

i)′ $\Longrightarrow$ iii)′ ist trivial. □

Beispiele. 1. Es sei $f(z) = \sin z$, $g(z) = \sin(z + 2\pi)$. Dann gilt $f = g$ auf der nicht diskreten Teilmenge $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, so daß f und g auf ganz $\mathbb{C}$ übereinstimmen müssen.

2. Entsprechend beweist man

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad z \in \mathbb{C},$$

und viele andere Identitäten.

Eine weitere Folgerung aus dem Identitätssatz ist das folgende Resultat, dessen Beweis wir dem Leser überlassen.

Satz 8.6 *Für jedes Gebiet* $G \subset \mathbb{C}$ *ist der Ring* $\mathcal{O}(G)$ *der holomorphen Funktionen ein* Integritätsbereich. *D. h.: Ist für zwei holomorphe Funktionen* f, g *auf* G *das Produkt* $f g$ *identisch Null, so muß schon eine der beiden Funktionen identisch verschwinden.*

9 Cauchysche Ungleichungen mit Anwendungen

Aus den Cauchyschen Integralformeln folgen sehr nützliche Abschätzungen: Sind $f \in \mathcal{O}(G)$, $D_r(z_0) \subset\subset G$, $0 < \delta \le r$ und $|z - z_0| \le r - \delta$ gegeben, so ergibt sich ohne weiteres die Abschätzung

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \int_{\partial D_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| \le \frac{n!}{2\pi} 2\pi r \frac{\max_{\zeta \in \partial D_r} |f(\zeta)|}{\delta^{n+1}} .$$

Wir fassen zusammen:

Satz 9.1 (Cauchysche Ungleichungen) *Es seien $f \in \mathcal{O}(G)$, $D_r(z_0) \subset\subset G$, $0 < \delta \le r$. Dann gilt für alle $z \in \overline{D_{r-\delta}(z_0)}$:*

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{r}{\delta} \cdot \frac{n!}{\delta^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| .$$

Speziell folgt für $\delta = \dfrac{r}{2}$:

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{C_n}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \textit{und alle} \quad z \in \overline{D_{r/2}(z_0)} ,$$

wobei $C_n = 2^{n+1} n!$ unabhängig von f und r ist.

Es gilt stets im Mittelpunkt der Kreisscheibe $D_r(z_0)$ (man wähle $\delta = r$) :

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)|$$

und damit

$$|a_n| \le \frac{1}{r^n} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| , \quad \textit{falls} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Als eine der wichtigsten Konsequenzen erhält man hieraus schon den WEIERSTRASSschen *Konvergenzsatz* für holomorphe Funktionen:

Satz 9.2 (Weierstraß) *Seien $f_k \in \mathcal{O}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, und die Folge der f_k sei auf G lokal gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion f. Dann ist auch f holomorph auf G, und für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge der Ableitungen $f_k^{(n)}$ lokal gleichmäßig gegen die entsprechende Ableitung $f^{(n)}$ von f.*

Bemerkung. Man beachte wieder den Unterschied zu der Theorie der differenzierbaren Funktionen in einer *reellen* Veränderlichen, in der man die *gleichmäßige* Konvergenz der Ableitungsfolgen voraussetzen muß.

Beweis. a) f ist holomorph. Aus $f_k \overset{\text{lokal}}{\Longrightarrow} f$ folgt nämlich, daß die Grenzfunktion f stetig ist. Sei weiter $\Delta = \overline{\Delta} \subset G$ ein Dreieck. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = \int_{\partial\Delta} \lim f_k(z)\, dz = \lim \int_{\partial\Delta} f_k(z)\, dz = 0 .$$

Nach dem Satz von Morera (Satz 7.7) ist damit f holomorph.

b) Wir zeigen die Aussage $f_k' \overset{\text{lokal}}{\Longrightarrow} f'$ (für die höheren Ableitungen folgt die entsprechende Aussage dann durch Induktion): Für $z_0 \in G$ existiert eine Kreisscheibe $D' = D_{r/2}(z_0)$, so daß $\overline{D} = \overline{D}_r(z_0) \subset G$. Nach Satz 1 gilt dann für alle $z \in D'$ die Abschätzung

$$|f_k'(z) - f'(z)| \le \frac{C_1}{r} \max_{|\zeta - z_0| = r} |f_k(\zeta) - f(\zeta)| .$$

Nun ist der Kreisrand $\{\,\zeta \in \mathbb{C} : |\,\zeta - z_0\,| = r\,\} \subset G$ kompakt, und da die Folge f_k lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $k_0 = k_0(\varepsilon)$, so daß

$$\max_{|\zeta - z_0| = r} |\,f_k(\zeta) - f(\zeta)\,| < \frac{r \cdot \varepsilon}{C_1}$$

und damit

$$|\,f_k'(z) - f'(z)\,| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0 \quad \text{und alle} \quad z \in D' \,.$$

Also gilt lokal $f_k' \Longrightarrow f'$. $\square$

Als nächstes wollen wir das sogenannte *Maximumprinzip* (und verwandte Aussagen) beweisen. Dazu formulieren wir zunächst das

Lemma 9.3 *Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$, $\overline{D}_r(z_0) \subset G$, und es gelte*

$$|\,f\,(z_0)\,| < \min_{|z - z_0| = r} |\,f\,(z)\,| \,.$$

Dann hat f in $D_r(z_0)$ mindestens eine Nullstelle.

Beweis (durch Widerspruch). Es sei $f\,(z) \neq 0$ für alle $z \in D_r(z_0)$. Dann ist nach Voraussetzung insbesondere $0 < |\,f\,(z_0)\,| < \min_{|z-z_0|=r} |\,f\,(z)\,|$ und folglich auch $f\,(z) \neq 0$ für alle $z \in \partial D_r(z_0)$. Aus Stetigkeitsgründen ist sogar $f\,(z) \neq 0$ für alle $z \in D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$, $\varepsilon > 0$ eine geeignete reelle Zahl, und damit $g = 1/f$ holomorph auf $D_{r+\varepsilon}(z_0)$. Die Cauchysche Ungleichung liefert schließlich für $n = 0$ den Widerspruch

$$\frac{1}{\min\limits_{|z-z_0|=r} |\,f\,(z)\,|} < \frac{1}{|\,f\,(z_0)\,|} = |\,g\,(z_0)\,| \leq \max_{|z-z_0|=r} |\,g\,(z)\,| = \frac{1}{\min\limits_{|z-z_0|=r} |\,f\,(z)\,|} \,. \qquad \square$$

Hieraus folgt der sogenannte *Satz von der Gebietstreue*:

Satz 9.4 *G sei ein Gebiet, und $f \in \mathcal{O}(G)$ sei nicht konstant. Dann ist die Bildmenge $f\,(G)$ ein Gebiet.*

Beweis. $f\,(G)$ ist (wegweise) zusammenhängend, da f stetig und G wegweise zusammenhängend ist. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $f\,(G)$ ein Bereich, also offen ist. Sei dazu $w_0 \in f\,(G)$ und $z_0 \in G$ mit $f\,(z_0) = w_0$. Es existiert dann eine Kreisscheibe $D_{2r}(z_0) \subset G$, so daß $f\,(z) \neq w_0$ für alle $z \in D_{2r}(z_0) \setminus \{\,z_0\,\}$; denn sonst gäbe es eine unendliche Folge $z_j \to z_0$, $z_j \neq z_0$, mit $f\,(z_j) = f\,(z_0)$, was nach dem Identitätssatz $f \equiv f\,(z_0)$ zur Folge hätte. Mit der Kompaktheit von $\partial D_r(z_0)$ ergibt sich

$$0 < \min_{z \in \partial D_r(z_0)} |\,f\,(z) - f\,(z_0)\,| =: 2\,\varepsilon \,.$$

Es genügt dann zu zeigen, daß $U_\varepsilon(w_0) \subset f\,(G)$. Sei zum Nachweis dieser Aussage w mit $|\,w - w_0\,| < \varepsilon$ beliebig, aber fest gewählt. Dann ergibt sich für alle $z \in \partial D_r(z_0)$:

$$|\,f\,(z) - w\,| \geq |\,f\,(z) - w_0\,| - |\,w - w_0\,| > 2\,\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \,.$$

Für $z = z_0$ ist aber $|\,f\,(z_0) - w\,| = |\,w_0 - w\,| < \varepsilon$. Setzen wir also $g\,(z) = f\,(z) - w$, so haben wir

$$|\,g\,(z_0)\,| < \varepsilon \leq \min_{|z-z_0|=r} |\,g\,(z)\,|$$

und damit nach dem obigen Lemma $g\,(z) = 0$ für ein $z \in D_r(z_0)$. $\square$

Beispiel und *Bemerkung*. Es sei $f \in \mathcal{O}\,(G)$ eine holomorphe Funktion mit $\operatorname{Re} f = \text{const}$. Dann ist die Bildmenge $f\,(G)$ in der Geraden $\{\,w \in \mathbb{C} : w = u + i\,v,\ u = \text{const.}\}$ enthalten und ist daher nicht offen. Infolgedessen ist notwendig auch $f = \text{const}$. Diese Aussage haben wir schon in Lemma 4.2 mit Hilfe der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen nachgewiesen. Sie läßt sich umgehend verallgemeinern zu dem folgenden Kriterium:

Ist $P(u, v)$ ein nicht triviales reelles oder komplexes Polynom in den beiden reellen Variablen u, v, und ist für eine holomorphe Funktion f

$$P(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f) = 0 ,$$

so ist f konstant.

Satz 9.5 (Maximum - Prinzip) *Sei G ein Gebiet, und f sei holomorph auf G.*

a) *Hat $|f|$ in einem Punkt $z_0 \in G$ ein lokales Maximum, so ist $f = \text{const}$.*

b) *Sei G beschränkt, und f sei nach $\overline{G}$ stetig fortsetzbar. Dann gilt*

$$|f(z)| \le \max_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \textit{für alle} \quad z \in \overline{G} .$$

Beweis. a) Es folgt $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle z in einer Umgebung $U = U(z_0)$, so daß

$$f(U) \subset \{ w \in \mathbb{C} : |w| \le |w_0| \} .$$

Da $w_0 \in f(U)$ liegt, die Menge auf der rechten Seite aber nicht offen ist in w_0, so ist $f(U)$ nicht offen und $f \equiv f(z_0)$ nahe z_0 nach Satz 4. Der Identitätssatz liefert dann die Behauptung.

b) Da (die Fortsetzung) f auf $\overline{G}$ stetig ist, existiert ein Punkt $z_0 \in \overline{G}$, in dem das Maximum des Betrages angenommen wird: $|f(z)| \le |f(z_0)|$ für alle $z \in \overline{G}$. Ist $z_0 \in \partial G$, so ist die Behauptung trivialerweise richtig. Ist aber $z_0 \in G$, so hat f in z_0 ein (lokales) Maximum, und daher muß $f = \text{const.}$ sein. In diesem Fall ist die Behauptung ebenfalls richtig. □

Sofern f keine Nullstellen hat, kann man von f zu $1/f$ übergehen. Als unmittelbare Konsequenz hieraus zieht man das

Satz 9.6 (Minimum - Prinzip) *Es sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt* :

a) *Besitzt $|f|$ in $z_0 \in G$ ein lokales Minimum, so ist $f(z_0) = 0$ oder f ist konstant* ;

b) *ist f nach $\overline{G}$ stetig fortsetzbar und G beschränkt, und hat ferner f keine Nullstellen, so gilt*

$$|f(z)| \ge \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)| \quad \textit{für alle} \quad z \in \overline{G} .$$

Bemerkung. Alle diese Eigenschaften lassen sich übrigens auch aus der *Mittelwerteigenschaft* holomorpher Funktionen ableiten (siehe z. B. Fischer–Lieb III, Paragraph 7*): Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$, $D_r(z_0) \subset\subset G$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it}}\, i r e^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it})\, dt , \end{aligned}$$

wobei das letzte Integral gerade den Mittelwert von f auf dem Kreis um z_0 mit dem Radius r darstellt.

Wir leiten jetzt noch einige wichtige Folgerungen aus den Cauchyschen Ungleichungen für *ganze* Funktionen $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ab.

Satz 9.7 (Liouville) *Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.*

Dies ist offensichtlich ein Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes:

Satz 9.8 *Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ derart, daß $|f(z)| \leq M|z|^n$ für festes $M > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$ für geeignetes $R > 0$. Dann ist f ein Polynom vom Grade $\leq n$.*

Beweis. Da $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, läßt sich f um Null in eine überall konvergente Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$$

entwickeln. Nach Satz 1 gilt für alle $R >> 0$:

$$|a_j| \leq \frac{1}{R^j} \max_{|\zeta|=R} |f(\zeta)| \leq M R^{n-j} ,$$

und der letzte Ausdruck geht für $R \to \infty$ nach 0, wenn $n < j$, so daß also $a_j = 0$ für $j > n$ sein muß. □

Um hieraus den *Fundamentalsatz der Algebra* ableiten zu können, beweisen wir noch den folgenden elementaren

Satz 9.9 *Es sei $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ ein Polynom vom Grad n. Dann gibt es zu jedem ε mit $0 < \varepsilon < 1$ ein $\rho_\varepsilon \geq 1$, so daß*

$$(1 - \varepsilon)|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n||z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq \rho_\varepsilon$.

Beweis. Setze $P(z) = Q(z) + a_n z^n$. Offensichtlich gilt:

$$|Q(z)| \leq \Big(\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \Big) |z|^{n-1} \quad \text{für alle} \quad |z| \geq 1 .$$

Definiere für $0 < \varepsilon < 1$:

$$\rho_\varepsilon := \max \Big(1, \frac{1}{\varepsilon |a_n|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \Big) .$$

Dann folgt für alle $|z| \geq \rho_\varepsilon$:

$$|Q(z)| \leq \Big(\frac{1}{|z|} \sum_{j=0}^{n-1} |a_j| \Big) |z|^n \leq \varepsilon |a_n||z|^n$$

und damit

$$\begin{aligned}(1 - \varepsilon)|a_n||z|^n &\leq |a_n||z|^n - |Q(z)| \leq |P(z)| \\ &\leq |a_n||z|^n + |Q(z)| \leq (1 + \varepsilon)|a_n||z|^n ,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Satz 9.10 (Fundamentalsatz der Algebra) *Es sei $P(z)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten vom Grad $n \geq 1$. Dann hat P mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Wähle im vorigen Satz $\varepsilon = 1/2$ und $R \geq \rho_\varepsilon = \rho_{1/2}$ so groß, daß $|\,P(0)\,| < (1/2)\,|\,a_n\,|\,R^n$. Dies impliziert

$$|\,P(0)\,| < \frac{1}{2}\,|\,a_n\,|\,R^n \leq \min_{|z|=R} |\,P(z)\,|\,,$$

was wegen Lemma 3 die Existenz einer Nullstelle von P in $D_R(z_0)$ nach sich zieht. - Wir können auch ohne Verwendung dieses Lemmas direkt schließen: Es ist $|\,P(z)\,| \geq (1/2)\,|\,a_n\,|\,|\,z\,|^n = M\,|\,z\,|^n$ für alle $|\,z\,| \geq R$. Hätte P keine Nullstelle, so würde

$$\left|\frac{1}{P(z)}\right| \leq \frac{1}{M}\cdot\frac{1}{R^n}\,, \quad n \geq 1\,, \quad |\,z\,| \geq R$$

folgen. Andererseits ist $1/P$ stetig auf $\{\,z \in \mathbb{C} : |\,z\,| \leq R\,\}$, so daß $1/P$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt sein muß. Der Satz von Liouville liefert dann die Konstanz von $1/P$ und von P, was aber wegen der obigen Ungleichung nicht sein kann. □

Bemerkung. Offensichtlich nimmt jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ auch jeden Wert $w_0 \in \mathbb{C}$ genau n–mal (mit Vielfachheit gezählt) an. Denn mit $P(z)$ ist auch $P(z) - w_0$ ein Polynom n–ten Grades.

Definition. $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ heißt eine *ganze transzendente Funktion*, falls $f \notin \mathbb{C}[z]$.

Solche transzendenten Funktionen verhalten sich wesentlich anders als Polynome für große $|\,z\,|$. Es gilt der berühmte

Satz 9.11 (Großer Satz von Picard für transzendente Funktionen) *Eine ganze transzendente Funktion nimmt außerhalb jedes Kreises jede komplexe Zahl mit höchstens einer Ausnahme als Wert an.*

Wir werden diesen tiefliegenden Satz (für den allgemeineren Fall einer wesentlichen isolierten Singularität; siehe Kapitel 10) in dem Manuskript *Funktionentheorie II* beweisen. Als Folgerung notieren wir ein Resultat, das jedoch erheblich einfacher zu gewinnen ist.

Folgerung 9.12 (Kleiner Satz von Picard) *Läßt eine ganze holomorphe Funktion mindestens zwei Werte aus, so ist sie konstant.*

Daß bei ganzen transzendenten Funktionen ein „Ausnahmewert" tatsächlich vorkommen kann, zeigt das Beispiel der Exponentialfunktion $\exp z$, die den Wert 0 nicht annimmt. - Wir können hier nur eine Abschwächung des Satzes von Picard beweisen:

Satz 9.13 *Sei f eine ganze transzendente Funktion. Dann ist die Bildmenge von $\mathbb{C} \setminus D_R(0)$ unter f für alle $R > 0$ dicht in $\mathbb{C}$. Mit anderen Worten : Für alle $w_0 \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $z_j \in \mathbb{C}$ mit $\lim_j |\,z_j\,| = \infty$ und $\lim_j f(z_j) = w_0$.*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine Funktion, für die die Behauptung nicht gültig ist. Zu zeigen ist: f ist ein Polynom. Nach Voraussetzung existieren also $w_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $\varepsilon > 0$, s. d.

$$|\,f(z) - w_0\,| \geq \varepsilon > 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|\,z\,| \geq R$, wobei wir ohne Einschränkung $R \geq 1$ voraussetzen dürfen. Da $f \not\equiv w_0$, kann f nach dem Identitätssatz auf der kompakten Kreisscheibe $\overline{D}_R(0)$ nur endlich viele w_0–Stellen besitzen. Werden diese mit $b_1, \ldots, b_r$ bezeichnet und die entsprechenden Vielfachheiten mit $n_1, \ldots, n_r$, so ist wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - w_0}{(z - b_1)^{n_1}\cdot\ldots\cdot(z - b_r)^{n_r}}$$

ganz auf $\mathbb{C}$ und besitzt nach Konstruktion keine Nullstellen. Dann hat auch $1/g$ dieselben Eigenschaften. Wegen Satz 9 ist der Nenner von g dem Betrage nach kleiner oder gleich $C\,|\,z\,|^n$, wobei $n = n_1 + \cdots + n_r$. Daraus folgt zusammen mit $|\,f(z) - w_0\,| \geq \varepsilon$ für alle $|\,z\,| \geq R \geq 1$, daß

$$\left|\frac{1}{g}(z)\right| \leq \frac{C}{\varepsilon}\,|\,z\,|^n\,, \quad |\,z\,| \geq R\,.$$

Wegen Satz 8 ist dann $1/g$ ein Polynom vom Grad $\leq n$. Da diese Funktion aber keine Nullstellen besitzt, kann sie aufgrund des Hauptsatzes der Algebra nur konstant sein. Damit ist f ein Polynom vom Grade n. □

Mit Hilfe dieses Satzes kann man noch eine Charakterisierung von Polynomen wie in Satz 8, jedoch mit Abschätzungen nach unten, geben.

Satz 9.14 *Es sei f eine ganze holomorphe Funktion mit*

$$|\,f(z)\,| \geq M\,|\,z\,|^n \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \textit{mit} \quad |\,z\,| \geq R\,.$$

Dann ist f ein Polynom vom Grade $\geq n$.

Beweis. Nach Voraussetzung ergibt sich $|\,f(z)\,| \geq M\,R^n$ für alle z mit $|\,z\,| \geq R$. Damit können die Funktionswerte dem Wert 0 nicht beliebig nahe kommen, so daß nach Satz 13 die Funktion f ein Polynom sein muß. Ist nun $\deg f = m$, so folgt nach dem obigen Lemma $|\,f(z)\,| \leq \widetilde{M}\,|\,z\,|^m$ und deshalb auch

$$M\,|\,z\,|^n \leq \widetilde{M}\,|\,z\,|^m$$

für große $|\,z\,|$. Dies ist offensichtlich nur möglich, wenn $m \geq n$. □

10 Laurent - Reihen

Wir betrachten in diesem Kapitel holomorphe Funktionen auf Mengen der Form

$$K_{r,R}(a) := \{ z \in \mathbb{C} : r < |z - a| < R \} ,$$

wobei stets $0 \le r < R \le \infty$ vorausgesetzt wird. Für $r > 0$, $R < \infty$ ist $K_{r,R} = D_R(a) \setminus \overline{D}_r(a)$, also ein *Kreisring*. Für $r = 0$, $R < \infty$ haben wir es dagegen mit einer *punktierten Kreisscheibe* zu tun: $K_{0,R}(a) = D_R^*(a) := \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < R \}$. Für $R = \infty$ sind alle Bezeichnungen entsprechend zu modifizieren. Der Einfachheit halber werden wir im folgenden in allen Fällen kurz von „Kreisringen" reden.

Wie in der allgemeinen Theorie holomorpher Funktionen müssen wir uns geeignete „vollberandete" relativ kompakte Teilmengen von $K_{r,R}(a)$ suchen. Es bieten sich dazu selbstverständlich *relativ kompakte* Kreisringe

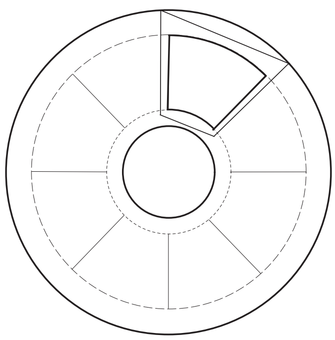
$$K_{\rho_1,\rho_2}(a) , \quad r < \rho_1 < \rho_2 < R$$

an. Die Bedingungen $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ seien im folgenden als Konvention festgeschrieben, ohne jedesmal neu erwähnt zu werden.

Ist nun $f \in \mathcal{C}(K_{r,R}(a))$, so setzen wir mit der obigen Konvention gemäß unserer Definition von Rand–Integralen längs glatt berandeten Kompakta:

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} f(z)\,dz := \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} f(z)\,dz - \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} f(z)\,dz ,$$

versehen also (korrekterweise) den „äußeren" Rand mit der positiven und den „inneren" mit der negativen Orientierung. Betrachtet man nun Zerlegungen der folgenden Art



Figur 10.1

so sieht man sofort, daß bei geeigneter feiner Unterteilung alle geschlossenen Teilwege in sternförmigen (sogar konvexen) Mengen liegen, auf denen f definiert ist. Infolgedessen erhält man sofort die folgende Aussage (die wir in den Kapiteln über homologische und homotopische Fassungen des Integralsatzes (siehe meinen Text *Funktionentheorie I*) konzeptioneller ableiten werden):

Satz 10.1 *Es sei f holomorph in dem Kreisring $K_{r,R}(a)$. Dann gilt der Cauchysche Integralsatz in der Form*

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} f(z)\,dz = 0 .$$

Mit anderen Worten: Es ist

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} f(z)\,dz = \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} f(z)\,dz$$

für alle zulässigen ρ_1, ρ_2.

Genauso können wir den Beweis der Integralformel imitieren. Dazu ist lediglich das Integral

$$\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für} \quad \rho_1 < |z - a| < \rho_2$$

zu berechnen, das sich aber unmittelbar zu

$$\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} - \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i - 0 = 2\pi i$$

ergibt. - Es folgt:

Satz 10.2 *Es sei f holomorph in dem Kreisring $K_{r,R}(a)$. Dann gilt die Cauchysche Integralformel in der Form*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $r < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < R$.

Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht mehr schwer, das folgende Resultat zu beweisen, das eine wesentliche Verallgemeinerung des Satzes über die Entwickelbarkeit einer holomorphen Funktion in Potenzreihen darstellt.

Satz 10.3 (Laurent - Trennung) *Für jedes $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(a))$ gibt es eindeutig bestimmte holomorphe Funktionen*

$$f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)), \quad f_2 \in \mathcal{O}(D_R(a))$$

mit

$$f = f_1 + f_2$$

auf $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)) \cap D_R(a) = K_{r,R}(a)$ und

$$\lim_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0\,.$$

Beweis. Setze

$$f_2^{(\rho_2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad |z - a| < \rho_2 < R,\ r < \rho_2\,.$$

Dies ist eine holomorphe Funktion auf $D_{\rho_2}(a)$. (Man differenziere einfach unter dem Integralzeichen nach $\overline{z}$). Nach der obigen Fassung des Integralsatzes ist

$$f_2^{(\rho_2)} = f_2^{(\rho_2')} \quad \text{auf} \quad D_{\rho_2}(a) \quad \text{für} \quad \rho_2 < \rho_2' < R\,.$$

Da $\bigcup_{r<\rho_2<R} D_{\rho_2}(a) = D_R(a)$ gilt, wird somit durch

$$f_2(z) = f_2^{(\rho_2)}(z)\,, \quad |z - a| < \rho_2 < R\,, \quad r < \rho_2\,,$$

eine holomorphe Funktion auf $D_R(a)$ auf eindeutige Weise erklärt. Ebenso liefert

$$f_1^{(\rho_1)} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad r < \rho_1 < |z - a|$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{ |z - a| \le \rho_1 \}$ und deshalb wie oben eine holomorphe Funktion f_1 auf

$$\bigcup_{r<\rho_1<R} (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{\rho_1}(a)) = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a) \quad \text{mit} \quad \lim_{z\to\infty} |f_1(z)| = 0\,.$$

Ist nun $z \in K_{r,R}(a)$, so existieren ρ_1, ρ_2 mit $r < \rho_1 < |z - a| < \rho_2 < R$, und es ist nach der Cauchyschen Integralformel für Kreisringe

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_{\rho_1,\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_{\rho_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$
$$= f_2^{(\rho_2)}(z) + f_1^{(\rho_1)}(z) = f_2(z) + f_1(z)\,.$$

Es ist noch die *Eindeutigkeit* dieser Zerlegung zu zeigen: Aus $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ mit f_1, $g_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a))$, f_2, $g_2 \in \mathcal{O}(D_R(a))$ und f_1, $g_1 \longrightarrow 0$ für $z \to \infty$ folgt $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ auf $K_{r,R}(a)$, und damit wird durch

$$h = \begin{cases} f_1 - g_1 & \text{auf} \quad \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a) \\ g_2 - f_2 & \text{auf} \quad D_R(a) \end{cases}$$

eine holomorphe Funktion h auf ganz $\mathbb{C}$ erklärt, für die $\lim_{z\to\infty} |h| = \lim_{z\to\infty} |f_1 - g_1| = 0$ gilt. Damit ist h beschränkt und nach dem Satz von Liouville $h = \text{const.} = 0$. Also ist $f_1 = g_1$, $f_2 = g_2$.
□

Definition. In der eindeutigen Zerlegung $f = f_1 + f_2$ von Satz 3 heißt f_1 der *Hauptteil*, f_2 der *Nebenteil* von f. Man bezeichnet die Zerlegung selbst auch als LAURENT–*Trennung* von f.

Man kann den Nebenteil natürlich in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f_2(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z - a)^j\,, \quad \text{wobei} \quad |z - a| < R$$

und

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{j+1}}\, d\zeta$$

unabhängig von ρ mit $r < \rho < R$ ist. Entsprechend folgt für $r < |\zeta - a| = \rho < |z - a| < R$:

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{-1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{z - a}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}}$$
$$= \frac{1}{z - a}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^j\,,$$

und also:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} f(\zeta)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\zeta - a)^j}{(z - a)^{j+1}}\, d\zeta = \sum_{j=-1}^{-\infty} a_j\,(z - a)^j$$

mit von ρ unabhängigen Koeffizienten

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{j+1}}\, d\zeta\,, \quad j \le -1\,.$$

Zusammenfassend ergibt sich der spektakuläre

Satz 10.4 (Laurent - Entwicklung) *Jede Funktion* $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(a))$ *läßt sich in eine* Laurent–Reihe *entwickeln* :

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(z - a)^j\,,$$

wobei die Koeffizienten

$$a_j \;=\; \frac{1}{2\,\pi\,i}\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{f\,(\zeta)}{(\zeta\,-\,a)^{j+1}}\,d\zeta$$

unabhängig von ρ *mit* $r < \rho < R$ *sind. Die Potenzreihe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j\,(z\,-\,a)^j$$

konvergiert lokal gleichmäßig auf $D_R(a)$ *gegen den* Nebenteil f_2 *von* f, *die Reihe*

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} a_j\,(z\,-\,a)^j$$

auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r(a)$ *gegen den* Hauptteil f_1 *von* f.

Besitzt umgekehrt $f \in \mathcal{O}(K_{r,R}(a))$ *eine auf* $K_{r,R}(a)$ *lokal gleichmäßige Entwicklung dieser Art, so sind die Koeffizienten* a_j *eindeutig (durch die obigen Formeln) bestimmt.*

Beweis. Nur die Eindeutigkeitsaussage über die Laurent–Entwicklung bedarf einer besonderen Erklärung. Zu zeigen ist also: Konvergiert die Reihe $\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(z\,-\,a)^j$ lokal gleichmäßig auf $K_{r,R}(a)$ gegen 0, so verschwinden notwendig alle Koeffizienten a_j. Wir wählen dazu ein festes k und bemerken, daß mit der Voraussetzung auch die Reihe

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+k+1}\,(z\,-\,a)^j$$

lokal gleichmäßig auf $K_{r,R}(a)$ konvergiert. Da alle Funktionen $(z\,-\,a)^j$, $j \neq -1$ globale Stammfunktionen auf $K_{r,R}(a)$ besitzen, ergibt sich für jedes ρ zwischen r und R sofort die Behauptung wegen

$$\begin{aligned} 2\,\pi\,i\,a_k \;&=\; a_k\int_{\partial D_\rho(a)} \frac{dz}{z\,-\,a} \;=\; \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+k+1}\int_{\partial D_\rho(a)} (z\,-\,a)^j\,dz \\ &=\; \int_{\partial D_\rho(a)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{j+k+1}\,(z\,-\,a)^j\,dz \;=\; 0\,, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Wir wenden in dem zweiten Teil dieses Kapitels die vorstehenden Überlegungen auf die Untersuchung *isolierter Singularitäten* von holomorphen Funktionen an.

Definition. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, U eine (offene) Umgebung von z_0 und f holomorph auf $U \setminus \{\,z_0\,\}$. Dann heißt z_0 eine *isolierte Singularität* von f.

Wir werden die möglichen Typen solcher isolierten Singularitäten klassifizieren und mit Hilfe der Laurent–Entwicklung charakterisieren.

Definition. Es sei $f : U \setminus \{\,z_0\,\} \to \mathbb{C}$ holomorph.

i) Ist f lokal um z_0 beschränkt, so heißt z_0 eine *hebbare* Singularität von f;

ii) gilt $\lim_{z \to z_0} |\,f\,(z)\,| \;=\; \infty$, so heißt z_0 ein *Pol* von f;

iii) ist z_0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol von f, so heißt z_0 eine *wesentliche* Singularität von f.

Beispiele. 1. Die Funktion $\dfrac{\sin z}{z}$ besitzt eine isolierte Singularität in 0. Aus der Entwicklung

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} \pm \cdots$$

entnimmt man unmittelbar, daß es sich um eine *hebbare* Singularität handelt.

2. Die Funktion $e^{1/z}$ hat eine *wesentliche* Singularität im Nullpunkt (Beweis weiter unten).

3. Die Funktion $\dfrac{1}{z\,(z+1)}$ besitzt isolierte Singularitäten in 0 und -1, und zwar *Pole*.

Bemerkungen. 1. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz (Satz 7.8) ist eine hebbare Singularität dadurch gekennzeichnet, daß sich die in Frage stehende Funktion f nach z_0 *holomorph fortsetzen* läßt.

2. Hat f einen Pol in z_0, so kann per definitionem f keine Nullstellen in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 annehmen. Damit ist $1/f$ dort definiert und erfüllt $\lim_{z\to z_0}(1/f)(z) = 0$. Die Funktion $g = 1/f$ läßt sich daher durch die Festsetzung $g(z_0) = 0$ holomorph nach z_0 fortsetzen, und es gilt

$$g(z) = (z - z_0)^n\, h(z)\,, \quad n \geq 1\,,$$

mit einer Funktion h, die nahe z_0 holomorph ist und in z_0 nicht verschwindet. Anders ausgedrückt:

$$f(z) = \frac{H(z)}{(z - z_0)^n}\,, \quad z \neq z_0\,,$$

wobei H um z_0 holomorph ist und nirgends verschwindet. Die Zahl n ist selbstverständlich eindeutig bestimmt und heißt die *Vielfachheit* oder *Ordnung* des Poles. Man spricht manchmal auch von einer *Nullstelle der Ordnung* $-n$.

Satz 10.5 *f hat in z_0 einen Pol n–ter Ordnung genau dann, wenn es Konstanten $0 < M_1 < M_2$ gibt, so daß*

$$M_1\,|\,z - z_0\,|^{-n} \leq |\,f(z)\,| \leq M_2\,|\,z - z_0\,|^{-n}$$

für alle $z \in D_\varepsilon(z_0) \setminus \{\,z_0\,\}$, ε hinreichend klein.

Beweis. a) Hat f einen Pol n–ter Ordnung und schreibt man dementsprechend $f(z) = (z - z_0)^{-n}\, g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g nahe z_0 und $g(z_0) \neq 0$, so ist in einer hinreichend kleinen ε–Umgebung von z_0 die Abschätzung $M_1 \leq |\,g(z)\,| \leq M_2$ erfüllt, aus der die Behauptung sofort folgt.

b) Ist umgekehrt die Abschätzung des Satzes erfüllt, so ist die Funktion

$$g(z) := f(z)\,(z - z_0)^n \in \mathcal{O}(U \setminus \{\,z_0\,\})$$

nach oben und nach unten dem Betrage nach durch eine positive Konstante beschränkt. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz ist dann aber g eine holomorphe Funktion auf ganz U ohne Nullstellen. □

Bei Annäherung an eine wesentliche Singularität ist das Verhalten viel (also „wesentlich“) komplizierter: Bei einer wesentlichen Singularität kommen die Funktionswerte jedem komplexen Wert beliebig nahe. Dies besagt der folgende Satz (man beachte die Analogie zu Satz 9.12, die nicht zufällig ist, da ganze transzendente Funktionen eine wesentliche Singularität „im Unendlichen“ besitzen).

Satz 10.6 (Casorati - Weierstraß) *Eine isolierte Singularität z_0 der Funktion f ist genau dann wesentlich, wenn es für alle $w_0 \in \mathbb{C}$ eine unendliche Folge (z_j) mit $z_j \to z_0$ und $f(z_j) \to w_0$ gibt.*

Beweis. a) Ist das Kriterium des Satzes erfüllt, so kann f weder beschränkt sein, noch kann $\lim_{z\to z_0} |\, f(z)\,| = \infty$ gelten. Also muß eine wesentliche Singularität vorliegen.

b) Wir nehmen an, daß das Kriterium des Satzes nicht erfüllt ist, also für mindestens eine offene Umgebung $V = V(z_0)$ die Bildmenge $f(V \setminus \{ z_0 \})$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ liegt. M. a. W.: Wir setzen voraus, daß es eine Umgebung V, eine Zahl $w_0 \in \mathbb{C}$ und ein positives ε gibt mit

$$|\, f(z) - w_0\,| \geq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad z \in V\,.$$

Bilde dann $g(z) = (f(z) - w_0)^{-1}$. Nach Konstruktion ist g holomorph auf $V \setminus \{ z_0 \}$ und nach oben durch $1/\varepsilon$ beschränkt. Also ist g zu einer Funktion $G \in \mathcal{O}(V)$ fortsetzbar. Aus der Entwicklung

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{G(z)}$$

schließt man dann, daß f in z_0 eine hebbare Singularität bzw. einen Pol besitzt, je nachdem, ob $G(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z)$ von Null verschieden oder gleich Null ist. □

Bemerkung. In der Tat gilt auch hier der *Große Satz von Picard*: In jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität wird jeder Wert mit höchstens einer Ausnahme angenommen.

Der nächste Satz gibt nun die versprochene Charakterisierung durch Laurent–Reihen.

Satz 10.7 *Es sei*

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(z - z_0)^j$$

die Laurent–Entwicklung der Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{ z_0 \})$. *Dann gilt* : z_0 *ist*

i) *eine hebbare Singularität genau dann, wenn* $a_j = 0$ *für alle* $j < 0$;

ii) *ein Pol der Ordnung* $n \geq 1$ *genau dann, wenn* $a_j = 0$ *für alle* $j < -n$, $a_{-n} \neq 0$;

iii) *eine wesentliche Singularität genau dann, wenn* $a_j \neq 0$ *für unendlich viele negative* j.

Beweis. i) Wir wissen schon, daß f genau dann eine hebbare Singularität in z_0 besitzt, wenn f nach z_0 holomorph fortsetzbar ist. Folglich ist die Voraussetzung äquivalent zu der Tatsache, daß f lokal um z_0 in eine Potenzreihe entwickelbar ist:

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\,(z - z_0)^j\,.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Laurent–Entwicklung folgt dann aber $a_j = b_j = 0$ für alle $j < 0$ und damit die Behauptung.

ii) Wir schreiben $f(z) = (z - z_0)^{-n}\, g(z)$ und

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\,(z - z_0)^j\,, \quad b_0 \neq 0\,.$$

Dann hat man auf $D_\varepsilon^*(z_0)$ die lokal gleichmäßige Darstellung

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} b_j\,(z - z_0)^j = \sum_{j=-n}^{\infty} b_{j+n}\,(z - z_0)^j\,.$$

Wieder wegen der Eindeutigkeit der Laurent–Entwicklung ist dies gleichbedeutend mit $a_j = 0$, $j < -n$, $a_{-n} \neq 0$. Die Umkehrung ist genauso leicht einzusehen.

iii) Dies ist schlicht die verbleibende Alternative. □

Beispiel. Aus der Potenzreihen–Entwicklung der Exponentialfunktion deduziert man unmittelbar die Laurent–Entwicklung

$$e^{1/z} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \frac{1}{z^j} = \sum_{j=-\infty}^{0} \frac{1}{(-j)!} z^j$$

nahe Null. Daraus liest man wegen des vorigen Satzes ab, daß die Funktion $\exp(1/z)$ im Nullpunkt eine wesentliche Singularität besitzt, wie wir früher schon behauptet haben. Ferner ergibt sich sofort mit dem Koeffizienten $a_{-1} = 1/1! = 1$, daß

$$\int_{\partial D_r(0)} e^{1/z}\, dz = 2\pi i\, a_{-1} = 2\pi i\,.$$

Ein für spätere Untersuchungen grundlegender Begriff ist der folgende:

Definition. Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, N sei eine diskrete Teilmenge von G und f sei auf $G \setminus N$ definiert und holomorph derart, daß f in den Punkten von N nur (höchstens) Pole besitzt. Dann heißt f eine *meromorphe Funktion auf* G.

Bemerkungen. 1. Wir sprechen von meromorphen Funktionen <u>auf</u> G, obwohl die in Rede stehenden Funktionen nur auf der Teilmenge $G \setminus N$ definiert sind. Wir werden aber später sehen (Kapitel 18), daß solche „Funktionen" tatsächlich als wohlbestimmte *Abbildungen* von G in die Riemannsche *Zahlenkugel* $\mathbb{P}_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ aufgefaßt werden können.

2. Die Menge $\mathcal{M}(G)$ der meromorphen Funktionen auf G kann aufgrund der vorigen Bemerkung leicht mit einer Addition und Multiplikation versehen werden. Außerdem gilt auf $\mathcal{M}(G)$ auch der *Identitätssatz* (loc. cit.). Daraus folgert man sofort, daß diese Menge die kanonische Struktur eines *Körpers* besitzt (siehe auch Satz 8.6).

11 Der lokale Residuensatz mit Anwendungen

Die Funktion f möge eine isolierte Singularität im Punkte z_0 besitzen. Dann ist $f \in \mathcal{O}(D_r^*(z_0))$ für geeignetes $r > 0$, und f besitzt dort eine Laurent–Entwicklung

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\,(z - z_0)^j\ .$$

Man schreibt

$$\mathrm{res}_{z_0}\, f = a_{-1}$$

und nennt diesen Koeffizienten das *Residuum* der Funktion f an der Stelle z_0. Nach Definition ist

$$\mathrm{res}_{z_0}\, f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho(z_0)} f\,(\zeta)\, d\zeta\ ,$$

wobei $D_\rho(z_0)$ einen Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius $0 < \rho < r$ bezeichnet.

Bemerkung und *Beispiel*. Bekommt man die Laurent–Entwicklung einer holomorphen Funktion f um eine isolierte Singularität z_0 irgendwie geschenkt (was oft wegen der Eindeutigkeit der Laurent–Entwicklung auf sozusagen algebraische Weise zu bewerkstelligen ist), so kann man aus diesem speziellen Koeffizienten Integrale einfach ablesen. Als Beispiel haben wir schon das Integral

$$\int_{\partial D_\rho(0)} e^{1/z}\, dz = 2\,\pi\, i$$

auf diesem Wege berechnet.

Ein besonders einfaches Verfahren kann man anwenden, wenn die betrachtete Funktion f in dem Punkte z_0 einen *Pol erster Ordnung* besitzt. Es ist dann offenbar

$$\mathrm{res}_{z_0}\, f = \lim_{z \to z_0} f\,(z)\,(z - z_0)\ .$$

Etwas komplizierter wird die Berechnung, wenn ein *Pol n–ter Ordnung* in z_0 vorliegt. In diesem Fall ist

$$\mathrm{res}_{z_0}\, f\,(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!}\, \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\,((z - z_0)^n\, f\,(z))\ .$$

Ist nämlich ohne Einschränkung $z_0 = 0$, so lautet die Laurent–Entwicklung von f um den Ursprung

$$f\,(z) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-n+1}}{z^{n-1}} + \cdots = \sum_{k \geq -n} a_k\, z^k\ ,$$

so daß also

$$z^n\, f\,(z) = z^n \sum_{k \geq -n} a_k\, z^k = \sum_{k \geq -n} a_k\, z^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n}\, z^k\ .$$

Durch $(n - 1)$–faches Differenzieren fallen in dieser Potenzreihe alle Glieder mit $k = 0, \ldots, n - 2$ fort, und aus dem $(n - 1)$–tem Term

$$a_{-1}\, z^{n-1} \quad \text{wird} \quad (n-1)!\, a_{-1}\ .$$

Wir wollen jetzt gleich den *Residuensatz* in einer vorläufigen (lokalen) Version formulieren und beweisen. Die „Lokalität“ der Formulierung drückt sich wie früher in der Tatsache aus, daß wir vorerst topologische Komplikationen vermeiden und das Gebiet G, in dem sich alles abspielt, als *konvex* oder zumindest *sternförmig* voraussetzen. Wir benötigen außerdem noch den Begriff der *Umlaufzahl* $n(\gamma, z)$ einer geschlossenen Kurve γ um einen Punkt $z \notin \operatorname{spur}\gamma$, die durch das Integral

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

definiert ist. Wir werden in einem späteren Kapitel beweisen, daß diese Umlaufzahl konstant und ganzzahlig ist auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \operatorname{spur}\gamma$. Ferner ist auf der *unbeschränkten* Komponente von $\mathbb{C}\setminus\operatorname{spur}\gamma$ die Umlaufzahl gleich 0. Die Umlaufzahl mißt tatsächlich, wie oft die Kurve γ (unter Berücksichtigung der Orientierung) um den Punkt z herumläuft. Wir wissen zumindest von früher, daß dies für positiv umlaufene Kreisränder richtig ist:

$$n(\partial D_r(0), z) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad z \in D_r(0)\,, \\ 0 & \text{falls} \quad z \notin \overline{D}_r(0)\,. \end{cases}$$

Satz 11.1 (Lokaler Residuensatz) *Es sei G ein sternförmiges Gebiet, und f sei in G holomorph mit Ausnahme von isolierten Singularitäten. Ferner sei γ eine geschlossene Kurve in G, auf deren Spur keine Singularitäten von f liegen. Dann gilt:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{z\in G} n(\gamma, z)\operatorname{res}_z f\,.$$

Bemerkung. Der Beweis wird zeigen, daß die Summe auf der rechten Seite in Wahrheit endlich ist.

Beweis. Die Menge $A = \{z_0 \in G : f \text{ hat in } z_0 \text{ eine isolierte Singularität}\}$ ist nach Definition diskret in G und besitzt deshalb mit jeder relativ kompakten Teilmenge $K \subset G$ einen höchstens *endlichen* Durchschnitt. Wir werden am Ende des Beweises zeigen, daß es ein sternförmiges Teilgebiet $G' \subset\subset G$ gibt, für welches $\operatorname{spur}\gamma \subset G'$ gilt. Nach dem lokalen Cauchyschen Integralsatz für das Gebiet G' ergibt sich sofort, daß $n(\gamma, z) = 0$ für $z \in G \setminus G'$ gilt. Indem wir in der Formulierung des Satzes G durch G' ersetzen, können wir also ohne Einschränkung die Menge A als endlich annehmen, wie wir in der obigen Bemerkung schon angekündigt haben.

Wir setzen also $A = \{z_1, \ldots, z_m\}$ und bezeichnen den Hauptteil von f an der Stelle z_k, $k = 1, \ldots, m$, mit h_k. Dieser ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_k\}$, und $f - \sum_{k=1}^m h_k$ hat in allen Punkten $z_j \in A$ hebbare Singularitäten. Es folgt nach der lokalen Fassung des Integralsatzes für sternförmige Gebiete:

$$0 = \int_\gamma \Big(f(z) - \sum_{k=1}^m h_k(z) \Big)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_k \int_\gamma h_k(z)\,dz\,.$$

Mit

$$h_k(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a_{-n}^{(k)}}{(z - z_k)^n}\,, \quad a_{-1}^{(k)} = \operatorname{res}_{z_k} f$$

ergibt sich aber

$$\int_\gamma h_k(z)\,dz = \int_\gamma \frac{a_{-1}^{(k)}}{z - z_k}\,dz = 2\pi i\, n(\gamma, z_k)\, a_{-1}^{(k)}\,.$$

Damit ist der Satz bewiesen für den Fall, daß die Singularitätenmenge A endlich ist, was ohnehin für die meisten Anwendungen ausreicht.

Um den Allgemeinfall abzuhandeln, müssen wir noch die oben angekündigte Reduktion auf *endliche* Singularitätenmengen A erläutern. Es sei also G bzgl. a sternförmig; man wähle dann endlich viele Kreisscheiben D_j mit

$$\operatorname{spur}\gamma \cup \{a\} \subset \bigcup D_j \quad \text{und} \quad \overline{D}_j \subset G\,.$$

Es sei $\overline{C}_j \subset G$ die (kompakte) konvexe Hülle von $D_j \cup \{ a \}$ und C_j ihr Inneres. Dann ist $G' := \cup C_j$ ein (bzgl. a) sternförmiges Gebiet, welches die Spur von γ enthält und wegen

$$G' \subset \bigcup \overline{C}_j \subset G$$

relativ kompakt in G liegt. □

Bemerkung. Diese Version des Residuensatz enthält alle bisherigen (lokalen) Integralsätze. Ist nämlich $f \in \mathcal{O}(G)$, so sind alle Residuen von f in G gleich Null, und damit ergibt sich der *Cauchysche Integralsatz* für sternförmige Gebiete. Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, $z_0 \in G$, $z_0 \notin \operatorname{spur}\gamma$, so hat $f(z)/(z - z_0)$ höchstens eine isolierte Singularität in z_0. Da es sich bei dieser höchstens um einen Pol 1. Ordnung handeln kann, ergibt sich sofort

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0}(z - z_0) = f(z_0) \, ,$$

also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = n(\gamma, z_0)\, f(z_0) \, ,$$

d. h. die *Cauchysche Integralformel* in einer verschärften Version für sternförmige Gebiete.

Bevor wir den Residuensatz zur Bestimmung einiger Integrale heranziehen, wollen wir kurz auf eine Anwendung eingehen, die oft als die Methode des *Null– und Polstellen zählenden Integrals* bezeichnet wird. Diese bezieht sich auf eine (nichttriviale) *meromorphe* Funktion f, deren vereinigte Null– und Polstellenmenge notwendig diskret in dem Definitionsgebiet G liegt. Die entscheidende Rolle spielt hier die logarithmische Ableitung f'/f von f, die offensichtlich in Punkten, in denen f holomorph und von Null verschieden ist, wieder holomorph ist. Ist z_0 dagegen eine Nullstelle der Ordnung n, so setzen wir wie immer $f(z) = (z - z_0)^n\, g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$ und erhalten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = n\, \frac{1}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \, .$$

Also hat f'/f eine Polstelle erster Ordnung in z_0 mit dem Residuum n. Hat dagegen f eine *Polstelle* der Ordnung n, so leitet man auf die gleiche Weise ab, daß f'/f ebenfalls eine Polstelle erster Ordnung besitzt, diesmal aber mit dem Residuum $-n$. Wir sehen also:

Satz 11.2 *Ist die Funktion f meromorph und nicht identisch Null auf dem sternförmigen Gebiet G, und ist γ ein geschlossener Integrationsweg in G, auf dessen Spur weder Null– noch Polstellen von f liegen, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta = \sum_{z \in G} n(\gamma, z) \operatorname{ord}_z f \, ,$$

wobei $\operatorname{ord}_z f$ *die Nullstellenordnung bzw. die negative Polstellenordnung von f im Punkte z bezeichnet.*

Hieraus läßt sich leicht die nachfolgende Konsequenz in einer topologisch sehr einfachen Situation ableiten.

Satz 11.3 *Es seien f, g meromorph auf dem Gebiet G, und ∂D sei der Rand einer Kreisscheibe $D \subset\subset G$, auf dem keine Polstellen von f und g liegen. Es bezeichne ferner N_f, P_f, N_g, P_g die totalen Null– bzw. Polstellenordnungen von f bzw. g in D, und es sei*

$$(*) \qquad |f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \textit{für} \quad z \in \partial D \, .$$

Dann gilt

$$N_f - P_f = N_g - P_g \, .$$

Beweis. Nach Voraussetzung $(*)$ können weder f noch g Nullstellen auf ∂D besitzen, und es gilt

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} + 1 \right| < \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| + 1 \, , \quad z \in \partial D \, .$$

Wäre $\lambda = f(z)/g(z) \in \mathbb{R}_+$, so würde der Unsinn $\lambda + 1 = |\lambda + 1| < \lambda + 1$ folgen. Also bildet f/g den Rand ∂D nach $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ ab. Auf Ω existiert aber ein Zweig $\log$ des Logarithmus, so daß $\log(f/g)$ eine wohldefinierte Stammfunktion für die Funktion $(f/g)'(f/g)^{-1}$ in einer Umgebung von ∂D darstellt. Hieraus schließt man

$$\begin{aligned}(N_f - P_f) - (N_g - P_g) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\partial D} \frac{f'}{f} \, dz - \int_{\partial D} \frac{g'}{g} \, dz \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} (f/g)' (f/g)^{-1} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \left(\log \frac{f}{g} \right)' dz = 0 \, ,\end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Hinweis. Diese Form des *Satzes von Rouché* (siehe unten) stammt von I. Glicksberg. Der Beweis wurde dem Buch von John B. Conway entnommen.

Aus dem letzten Satz folgt weiter

Folgerung 11.4 (Satz von Rouché) *Es seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$, und für eine Kreisscheibe $D \subset\subset G$ gelte $|f(z) + g(z)| < |g(z)|$ auf ∂D. Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in D.*

Bemerkung. Auch der *Fundamentalsatz der Algebra* läßt sich hieraus noch einmal gewinnen, denn für ein (ohne Einschränkung) normiertes Polynom $P(z)$ vom Grad $n \geq 1$ ist für $|z| = R >> 0$ natürlich $|P(z) - z^n| < |z^n|$, so daß P und $Q(z) := z^n$ gleich viele Nullstellen auf der Kreisscheibe $D_R(0)$ für alle $R >> 0$ besitzen.

Beispiel. Es sei $\lambda > 1$. Dann besitzt die Gleichung

$$e^{-z} + z = \lambda$$

in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine Lösung, die überdies reell ist.

Wir betrachten nämlich einen Halbkreis in der rechten Halbebene, der bei $-iR$ beginnt und bei iR endet, wobei $R > 0$ ist, und schließen diesen Weg durch Verbindung mit einer Strecke auf der imaginären Achse zu dem geschlossenen Weg γ_R. Unter Verwendung des Satzes von Rouché, der selbstverständlich auch für das Innere von einfach geschlossenen Kurven anstelle von Kreisrändern gültig ist, werden wir sehen, daß die Funktion $f(z) = e^{-z} + z - \lambda$ bei großem R genauso viele Nullstellen im Inneren dieser Kurve besitzt wie die Funktion $g(z) = z - \lambda$, also genau eine. Da mit z auch $\overline{z}$ eine Lösung der Gleichung ist, muß notwendig $z = \overline{z}$ gelten, z also *reell* sein. Schließlich ist unmittelbar klar, daß die Gleichung keine rein imaginären Lösungen besitzen kann.

Nach der eben angemerkten Verallgemeinerung des Satzes von Rouché ist nur zu zeigen, daß auf γ_R die Abschätzung

$$|e^{-z}| < |z - \lambda|$$

besteht. Nun ist aber auf der rechten Halbebene

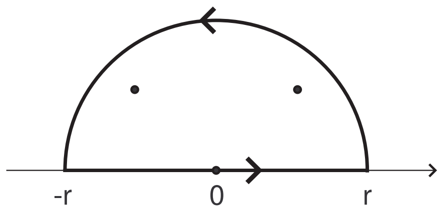
$$|e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq 1$$

und, wegen $\lambda > 1$, $|z - \lambda| > 1$ auf γ_R, sofern nur z. B. $R > \lambda + 1$.

Der Residuensatz ist auch schon in seiner lokalen Formulierung ein hervorragendes Hilfsmittel zur *konkreten Berechnung von Integralen*. Wir wollen im zweiten Teil dieses Kapitels einige wichtige Beispiele und Beispielklassen exemplarisch vorstellen, ohne auch nur annähernd ein vollständiges Bild vermitteln zu können. Wie verweisen den interessierten Leser auf die umfangreiche Lehrbuchliteratur.

Beispiel 1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

Betrachte hierzu die Funktion $R(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^4}$ mit den Polstellen 1. Ordnung bei ζ_8, ζ_8^3, ζ_8^5 und ζ_8^7. Bei dem folgenden Weg γ_r kommen für hinreichend großen Radius r nur die Residuen an den ersten beiden Polen ins Spiel:



Figur 11.1

Man berechnet leicht das Residuum bei ζ_8 zu
$$\lim_{z \to \zeta_8} (z - \zeta_8) \frac{z^2}{(z - \zeta_8)(z - \zeta_8^3)(z - \zeta_8^5)(z - \zeta_8^7)} = \frac{1 - i}{4\sqrt{2}}$$
und entsprechend bei ζ_8^3 zu
$$\frac{-1 - i}{4\sqrt{2}} .$$
Daraus folgt
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{z^2\, dz}{1 + z^4} = \mathrm{res}_{\zeta_8} R(z) + \mathrm{res}_{\zeta_8^3} R(z) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} .$$
Andererseits ist das volle Wegintegral Summe der Integrale über die reelle Strecke $[-r, r]$ und den Halbkreis κ_r in der oberen Halbebene. Die Standard–Abschätzung liefert für das zweite Integral aber
$$\left| \int_{\kappa_r} f(z)\, dz \right| \le \max_{|z|=r} \left| \frac{z^2}{1 + z^4} \right| \pi r \le \frac{C}{r^2}\, r \underset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0 .$$
Also folgt
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

Offensichtlich funktioniert die Methode zur Berechnung dieses Beispiels in einer viel allgemeineren Situation, die wir sogleich als Satz formulieren können[7].

Satz 11.5 *Besitzt die rationale Funktion* $R(z)$ *keine Polstellen auf* $\mathbb{R}$, *und ist ihr Nennergrad um mindestens zwei größer als der Zählergrad, d. h. ist* $\deg R \le -2$, *so gilt* :
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx = \sum_{\mathrm{Im}\, z > 0} \mathrm{res}_z R(z) = - \sum_{\mathrm{Im}\, z < 0} \mathrm{res}_z R(z) ,$$

[7] Man beachte, daß aufgrund der Beweismethode unter der linken Seite der „Hauptwert“ des betreffenden uneigentlichen Integrals zu verstehen ist. Dies ist aber unerheblich, da das Integral selbst absolut konvergiert (man ziehe das CAUCHY–*Kriterium* für uneigentliche Integrale heran).

Beispiel 2. Das Polynom $P(z) := (z^2 + 1)(z^2 + 4)$ hat in der oberen Halbebene die (einfachen) Nullstellen i und $2i$, so daß die rationale Funktion $R(z) := 1/P(z)$ an diesen beiden Stellen die Residuen

$$\mathrm{res}_i \frac{1}{P(z)} = \lim_{z\to i} \frac{z - i}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z + i)(z^2 + 4)} = \frac{1}{6i} = -\frac{i}{6}$$

bzw.

$$\mathrm{res}_{2i} \frac{1}{P(z)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z - 2i}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 2i)} = \frac{-1}{12i} = \frac{i}{12}$$

besitzt. Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = (2\pi i) \sum_{\mathrm{Im}\, z>0} \mathrm{res}_z R(z) = (2\pi i)\left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{12}\right) = \frac{\pi}{6} .$$

Beispiel 3. Etwas mühsamer ist die Berechnung des Integrals

$$I := \int_0^{\infty} \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 13} .$$

Da der Integrand eine *gerade* Funktion ist, kann man auch über die gesamte reelle Achse integrieren und die Residuen der Funktion $z^2/(z^4 + 6z^2 + 13)$ in der oberen Halbebene berücksichtigen. Dazu muß man wegen

$$z^4 + 6z^2 + 13 = (z^2 + 3 + 2i)(z^2 + 3 - 2i)$$

die Wurzeln aus $-3 \pm 2i$ ziehen. Es sei also $a + bi$ eine Wurzel von $-3 \pm 2i$. Dann ist notwendig $a^2 - b^2 = -3$ und $ab = 1$. Also erfüllt b^2 die quadratische Gleichung

$$(b^2)^2 - 3(b^2) - 1 = 0 ,$$

so daß

$$b^2 = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} .$$

Für die Wurzel mit $b > 0$ ist folglich

$$b = \frac{\sqrt{\sqrt{13} + 3}}{\sqrt{2}} .$$

Der zugehörige Wert von a ergibt sich daraus zu

$$a = \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{13} + 3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{13} + 3}} \frac{\sqrt{\sqrt{13} - 3}}{\sqrt{\sqrt{13} - 3}} = \frac{\sqrt{\sqrt{13} - 3}}{\sqrt{2}} .$$

In der Tat sind $\pm(a + bi)$ die Quadrat–Wurzeln von $-3 + 2i$ und $\pm(a - bi)$ die Quadrat–Wurzeln von $-3 - 2i$. Somit ist

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{a+bi} \frac{z^2}{z^4 + 6z^2 + 13} &= \lim_{z\to a+bi} \frac{z^2}{(z + a + bi)(z - a + bi)(z + a - bi)} \\ &= \frac{-3 + 2i}{2(a + bi)\,2bi\,2a} = \frac{(3 - 2i)(a - bi)i}{8(a^2 + b^2)} .\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man

$$\mathrm{res}_{-a+bi} \frac{z^2}{z^4 + 6z^2 + 13} = \lim_{z\to -a+bi} \frac{z^2}{(z - a - bi)(z + a + bi)(z - a + bi)} = \frac{(3 + 2i)(a + bi)i}{8(a^2 + b^2)} .$$

Damit findet man sofort

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4 + 6\,x^2 + 13} &= (\pi\,i) \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \left(\frac{z^2}{z^4 + 6\,z^2 + 13} \right) \\ &= (\pi\,i)\, \frac{i}{8\,(a^2 + b^2)}\, \{(3 - 2\,i)\,(a - b\,i) + (3 + 2\,i)\,(a + b\,i)\} \\ &= \frac{\pi}{4\,(a^2 + b^2)}\,(2\,b - 3\,a) \\ &= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{13} - 3}\ ,\end{aligned}$$

da

$$a^2 + b^2 = \frac{\sqrt{13} - 3}{2} + \frac{\sqrt{13} + 3}{2} = \sqrt{13}$$

und

$$2\,b - 3\,a = a\,(2\,b^2 - 3) = a\sqrt{13} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{13} - 3}\ .$$

Bemerkung. Wir werden weiter unten eine andere Methode vorstellen, die den obigen Rechenaufwand wesentlich reduziert.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Satz 5 ist die Summe *aller* Residuen der rationalen Funktion R gleich Null. Dies ist ein Spezialfall des ebenfalls so genannten *Residuensatzes für meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen* (siehe meinen Text *Funktionentheorie II*), da R als meromorphe Funktion auf $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ im Unendlichen keinen Pol besitzt (tatsächlich sogar eine Nullstelle der Ordnung 2).

Bemerkung. Die Formel

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} R\,(x)\,dx = \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z R\,(z)$$

aus Satz 5 bleibt sogar dann richtig, wenn die Funktion R nur in einer Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{H} := \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \ge 0 \}$ holomorph ist bis auf höchstens abzählbar viele isolierte Singularitäten, die sich nicht häufen und nicht auf $\mathbb{R}$ liegen, und wenn es eine Folge $r_k \ge 0$ mit $r_k \to \infty$ gibt, so daß

$$|\,R\,(z)\,| \le C\,r_k^{-(1+\varepsilon)} \quad \text{für} \quad z \in \overline{H}\,,\ |\,z\,| = r_k\ ,$$

mit von k unabhängigen positiven Konstanten C und ε. Ist die Menge der Singularitäten (notwendig abzählbar) *unendlich*, so ist die rechts stehende Reihe automatisch konvergent, wenn man die Singularitäten nach der Größe ihrer Beträge anordnet.

Beispiel 4. Wir berechnen nach der vorigen Bemerkung das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{x + i}}{x^2 + 1}\,dx\ ,$$

wobei derjenige Zweig der Wurzel $\sqrt{z + i}$ auf $\overline{H}$ gewählt werde, der in $z = 0$ den Wert $e^{\pi i/4}$ besitzt, sehr einfach zu

$$2\pi i \operatorname{res}_i \frac{\sqrt{z + i}}{(z - i)(z + i)} = 2\pi i\, \frac{\sqrt{2i}}{2i} = \pi\,(1 + i)\ .$$

Auch gewisse *eigentliche* Integrale lassen sich mit dem Residuensatz gewinnen.

Beispiel 5.
$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + \cos\theta}\,, \quad a > 1\,.$$

Es ist naheliegend, $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$, zu substituieren. Dabei durchläuft z aber nur einen Halbkreis. Integriert man stattdessen bis 2π, so wird das in Rede stehende Integral I wegen der Periodizitätseigenschaften von $\cos\theta$ verdoppelt. Weiter gilt für $z = e^{i\theta}$:

$$a + \cos\theta = a + \frac{1}{2}\,(z + \overline{z}) = a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 2\,a\,z + 1}{2\,z}\,,$$

so daß mit $dz = i\,z\,d\theta$ das Integral berechnet werden kann durch

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a + \cos\theta} = \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2\,a\,z + 1}$$

bezüglich des Weges $\gamma = \partial D_1(0)$. Nun ist $z^2 + 2\,a\,z + 1 = (z - c_1)\,(z - c_2)$, $c_1, c_2 = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, so daß $|\,c_1\,| < 1$, $|\,c_2\,| > 1$. Damit ergibt sich endlich

$$I = \frac{2\,\pi\,i}{i}\,\mathrm{res}_{c_1}\,\frac{1}{(z - c_1)(z - c_2)} = 2\,\pi\,\frac{1}{c_1 - c_2} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\,.$$

Bemerkung. Hinter dem vorigen Beispiel verbirgt sich eine ganz allgemeine Methode, mit der man jedes Integral der Gestalt

$$\int_0^{2\pi} R\,(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta\,, \quad R = R\,(x, y) \quad \text{eine rationale Funktion}\,,$$

durch die Transformation $z := e^{i\theta}$ mit Hilfe des Residuensatzes (zumindest prinzipiell) bestimmen kann. Es ist dann wegen $z\overline{z} = |\,z\,|^2 = 1$:

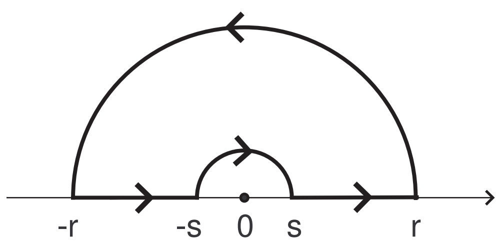
$$\cos\theta = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin\theta = \frac{z - \overline{z}}{2\,i} = \frac{1}{2\,i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

und folglich mit $dz = i\,e^{i\theta}\,d\theta = i\,z\,d\theta$:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R\,(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta &= \frac{1}{i}\int_{\partial D_1(0)} R\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}\\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \mathrm{res}_z\left(\frac{1}{z}\,R\left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Beispiel 6.
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wähle hier den folgenden komplizierteren Weg $\gamma_{r,s}$



Figur 11.2

und die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}\,,$$

die nur einen Pol bei Null besitzt. Dann gilt (da wir den Integralsatz für die längs der negativen imaginären Achse aufgeschlitzten Ebene zur Verfügung haben):

$$0 = \int_{\gamma_{r,s}} f(z)\,dz = \int_s^r \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\kappa_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-r}^{-s} \frac{e^{ix}}{x}\,dx - \int_{\kappa_s} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

und damit

$$\int_s^r \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2\,i}\int_s^r \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2\,i}\int_s^r \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \frac{1}{2\,i}\int_{-r}^{-s} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\,i}\int_{\kappa_s} \frac{e^{iz}}{z}\,dz - \frac{1}{2\,i}\int_{\kappa_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\,.$$

Eine leichte Abschätzung liefert dann:

$$\Big|\int_{\kappa_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\Big| \le \int_0^\pi e^{-r\sin\theta}\,d\theta \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

wobei wir die letzte Konvergenzaussage in allgemeinerem Zusammenhang erst im Beweis von Satz 7 begründen werden. Des weiteren hat die Funktion

$$\frac{e^{iz} - 1}{z}$$

eine hebbare Singularität bei 0, so daß

$$\Big|\frac{e^{iz} - 1}{z}\Big| \le M \quad \text{für} \quad |z| \le 1$$

und folglich

$$\Big|\int_{\kappa_s} \frac{e^{iz} - 1}{z}\,dz\Big| \le M\,\pi\,s \underset{s\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

Auf der anderen Seite liefert eine leichte Rechnung

$$\int_{\kappa_s} \frac{dz}{z} = \pi\,i\,,$$

und damit gilt

$$\int_{\kappa_s} \frac{e^{iz}}{z}\,dz \underset{s\to 0}{\longrightarrow} \pi\,i\,.$$

Division durch $2\,i$ ergibt dann, wie anfangs behauptet,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{r\to\infty\\ s\to 0}} \int_s^r \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Wir wollen das vorige Beispiel noch wesentlich verschärfen.

Satz 11.6 *Es sei f holomorph auf einer Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{H}$ bis auf abzählbar viele isolierte Singularitäten in H und evtl. einen einzigen Pol erster Ordnung auf $\mathbb{R}$, etwa in $a \in \mathbb{R}$. Für große $|z|$ gelte $|f(z)| \le C\,|z|^{-(1+\varepsilon)}$ auf $\overline{H}$ mit positiven Konstanten C, ε. Dann gilt*

$$\lim_{\rho\searrow 0}\Big(\int_{-\infty}^{a-\rho} f(z)\,dz + \int_{a+\rho}^{\infty} f(z)\,dz\Big) = (2\,\pi\,i)\sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f(z) + (\pi\,i)\operatorname{res}_a f(z)\,.$$

Beweis. Nach Voraussetzung sind die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{a-\rho} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{a-\rho} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{a+\rho}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{a+\rho}^{R} f(x)\,dx$$

absolut konvergent (CAUCHY–Kriterium für uneigentliche Integrale). Wir betrachten nun ähnlich wie in Beispiel 6 den geschlossenen Integrations–Weg $\gamma_{\rho,r}$, bestehend aus den Strecken $[-r, a-\rho]$ und $[a+\rho, r]$ und den Halbkreisen κ_r um 0 und (negativ orientiert) κ_ρ um a in der oberen Halbebene mit $r >> \rho$. Ist dann ρ hinreichend klein und r so gewählt, daß auf der Spur von κ_r keine Singularitäten von f liegen, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\rho,r}} f(z)\,dz = \sum_{\substack{|z|<r \\ \operatorname{Im} z>0}} \operatorname{res}_z f(z) .$$

Auf der linken Seite geht aufgrund der Standard–Abschätzung für Integrale und der Wachstumsvoraussetzung an f das Integral über κ_r gegen Null. Dagegen trägt das Integral über κ_ρ, wie in der Begründung zu Beispiel 6 erläutert, exakt das halbe Residuum an der Stelle a (mit negativem Vorzeichen) bei. Es folgt damit

$$\lim_{\rho\searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{a-\rho} f(x)\,dx + \int_{a+\rho}^{\infty} f(x)\,dx \right) = (2\pi i) \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f(z) + (\pi i) \operatorname{res}_a f(z) .$$

In der unter Umständen auf der rechten Seite entstehenden (abzählbar) unendlichen Reihe sind die Singularitäten $z_1, z_2, \ldots$ so anzuordnen, daß $|z_1| \le |z_2| \le \cdots$. Sie ist aufgrund des Beweises in jeder solchen Anordnung automatisch konvergent. $\square$

Beispiel 7. Man berechnet hiermit leicht nacheinander für $t > 0$:

$$\lim_{\rho\searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{1-e^{itx}}{x^2}\,dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{1-e^{itx}}{x^2}\,dx \right) ,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos tx}{x^2}\,dx , \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx .$$

Denn wegen $e^{itz} = e^{itx}\,e^{-ty}$ ist $|e^{itz}| \le e^{-ty} \le 1$ auf der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z = y \ge 0$. Damit kann man das Ergebnis von Satz 6 auf die Funktion

$$f(z) = \frac{1-e^{itz}}{z^2}$$

anwenden. Mit der Potenzreihen–Entwicklung von $1-e^{itz}$ um 0 (bei festem t) liest man unmittelbar

$$\operatorname{res}_0 f(z) = -i\,t$$

ab. Also ist

$$\lim_{\rho\searrow 0} \left(\int_{-\infty}^{-\rho} \frac{1-e^{itx}}{x^2}\,dx + \int_{\rho}^{\infty} \frac{1-e^{itx}}{x^2}\,dx \right) = (\pi i)(-i\,t) = \pi\,t .$$

Mit der Variablen–Transformation $u = -x$ ergibt sich aus der Substitutionsregel allgemein (bei $a = 0$):

$$\int_{-\infty}^{-\rho} f(x)\,dx = -\int_{\infty}^{\rho} f(-x)\,dx = \int_{\rho}^{\infty} f(-x)\,dx$$

und folglich

$$\lim_{\rho\searrow 0} \left(\int_{\rho}^{\infty} (f(x) + f(-x))\,dx \right) = (2\pi i) \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname{res}_z f(z) + (\pi i) \operatorname{res}_0 f(z) .$$

Da

$$e^{itx} + e^{-itx} = 2\cos tx$$

und die Funktion

$$\frac{2 - 2\cos tx}{x^2}$$

stetig in den Nullpunkt fortgesetzt werden kann, folgt aus der allgemeinen Formel zusammen mit der früheren Berechnung des Residuums an der Stelle $a = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos tx}{x^2}\, dx = \lim_{\rho \searrow 0} \int_\rho^\infty \frac{1 - \cos tx}{x^2}\, dx = \frac{\pi t}{2} \, .$$

Schließlich ergibt sich für $t = 2$ wegen $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \, .$$

Bemerkung. Zu einer Herleitung des letzten Resultats mit *„reellen Methoden"* siehe zum Beispiel Timmann, *Repetitorium der Analysis*, Teil 1, Aufgabe 5.5.5 E.

Anstelle eines spezifischen Beispiels formulieren wir als nächstes sogleich wieder einen allgemeinen Satz über die Berechnung von Integralen eines ganzen *Beispieltyps*.

Satz 11.7 *Es sei* $R(z)$ *eine rationale Funktion, die auf* $\mathbb{R}$ *keine Polstellen besitze, und es gelte* $\deg R \le -1$ *. Dann ist für alle* $\alpha > 0$ *:*

$$\int_{-\infty}^\infty R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \left(R(z)\, e^{i\alpha z}\right) .$$

Entsprechend hat man für $\alpha < 0$ *:*

$$\int_{-\infty}^\infty R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z < 0} \operatorname{res}_z \left(R(z)\, e^{i\alpha z}\right) .$$

Beweis. Wir wählen im Falle $\alpha > 0$ den Weg $\gamma_r = [-r, r] \circ \kappa_r$ aus der Figur 1, wobei $r > 0$ so groß sein möge, daß alle singulären Stellen der Funktion R in der oberen Halbebene im Inneren von γ_r liegen. Es braucht dann nur noch nachgewiesen zu werden, daß

$$I_r := \int_{\kappa_r} R(z)\, e^{i\alpha z}\, dz \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0 \, .$$

Nun wird der Halbkreis κ_r parametrisiert durch $z = r\, e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0 \le \theta \le \pi$, so daß die Identität

$$I_r = \int_0^\pi R(r\, e^{i\theta})\, e^{i\alpha r\cos\theta}\, e^{-\alpha r\sin\theta}\, i\, r\, e^{i\theta}\, d\theta$$

und folglich wegen $|R(z)| \le A\,|z|^{-1}$ die Abschätzung

$$|I_r| \le A \int_0^\pi e^{-\alpha r\sin\theta}\, d\theta = 2A \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r\sin\theta}\, d\theta$$

besteht.

Das letzte Integral konvergiert mit $r \to \infty$ gegen Null, wie man unmittelbar aus dem Satz von Beppo Levi schließt. Will man diesen Satz nicht heranziehen, muß man weiter sorgfältig abschätzen. In dem Intervall $0 \le \theta \le \pi/4$ ist

$$\cos\theta \ge \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$$

und damit

$$\int_0^{\pi/4} e^{-\alpha r \sin\theta}\, d\theta \;\leq\; \sqrt{2} \int_0^{\pi/4} e^{-\alpha r \sin\theta} \cos\theta \, d\theta \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\alpha r} \int_0^{\alpha r/\sqrt{2}} e^{-t}\, dt \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\alpha r} \left(1 - \exp\left(\frac{-\alpha r}{\sqrt{2}}\right)\right) .$$

Auf dem Intervall $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ beachten wir

$$\sin\theta \geq \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2 ,$$

woraus sich unmittelbar

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin\theta}\, d\theta \;\leq\; \int_{\pi/4}^{\pi/2} \exp\left(\frac{-\alpha r}{\sqrt{2}}\right) d\theta \;=\; \frac{\pi}{4} \exp\left(\frac{-\alpha r}{\sqrt{2}}\right)$$

ergibt. Zusammen erhält man hiermit positive Konstanten C_1, C_2, β, so daß

$$|\, I_r \,| \;\leq\; \frac{C_1}{r} + C_2\, e^{-\beta r} .$$

Dies impliziert die Behauptung.

Im Falle $\alpha < 0$ funktioniert ein entsprechendes Verfahren, wenn man den Weg γ_r an der reellen Achse spiegelt und damit durch die negative imaginäre Halbebene geht. □

Bemerkung. Ist insbesondere die rationale Funktion R auf der reellen Achse $\mathbb{R}$ reellwertig, so ergibt sich aus Satz 7 z. B. für positives α sofort:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \alpha x \, dx \;=\; \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx \;=\; -2\pi \operatorname{Im} \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \left(R(z)\, e^{i\alpha z}\right) .$$

Beispiel 8. Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + a^2} \;&=\; \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + a^2} \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, e^{ix}\, dx}{x^2 + a^2} \\
&=\; \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left((2\pi i) \sum_{\operatorname{Im} z > 0} \operatorname{res}_z \left(\frac{z\, e^{iz}}{z^2 + a^2}\right)\right) \\
&=\; \pi \operatorname{Re} \left(\operatorname{res}_{ai} \frac{z\, e^{iz}}{z^2 + a^2}\right) .
\end{aligned}$$

Mit

$$\operatorname{res}_{ai} \frac{z\, e^{iz}}{z^2 + a^2} \;=\; \lim_{z \to ai} \frac{z\, e^{iz}\,(z - a\,i)}{(z - a\,i)\,(z + a\,i)} \;=\; \frac{a\,i\, e^{-a}}{2\,a\,i} \;=\; \frac{1}{2}\, e^{-a}$$

ergibt sich folglich

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x \, dx}{x^2 + a^2} \;=\; \frac{\pi}{2}\, e^{-a} .$$

Beispiel 9. Mit der Formel aus Satz 7 berechnet man zum Beispiel auch

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\, x}{(1 + x^2)^2}\, dx \;=\; \frac{\pi\,(a + 1)\, e^{-a}}{4} .$$

Dies ist ein Spezialfall der Identität

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos a\, x \, dx}{(x^2 + b^2)^2} \;=\; \frac{\pi}{4}\, \frac{a\, b + 1}{b^3}\, e^{-ab} \quad \text{für} \quad a > 0 ,\ \operatorname{Re} b > 0 .$$

Das letzte Integral formen wir mit der Substitution $u = a\,x$ wie folgt um:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2 + b^2)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos u\,du}{a\,\left(u^2/a^2 + b^2\right)^2} \\ &= \frac{a^3}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x^2 + a^2\,b^2)^2} = \frac{a^3}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{(x^2 + a^2\,b^2)^2}\,dx \\ &= \frac{a^3}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\,dx}{(x^2 + a^2\,b^2)^2} + \frac{a^3}{4}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ix}\,dx}{(x^2 + a^2\,b^2)^2}\ .\end{aligned}$$

Die Funktion $1/(z^2 + a^2\,b^2)^2$ besitzt nur die Polstelle (zweiter Ordnung) $a\,b\,i$ in der oberen Halbebene und entsprechend $-\,a\,b\,i$ in der unteren Halbebene. Infolgedessen ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{a^3\,\pi\,i}{2}\left(\mathrm{res}_{abi}\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2\,b^2)^2} - \mathrm{res}_{-abi}\frac{e^{-iz}}{(z^2 + a^2\,b^2)^2}\right)\ .$$

Durch Betrachtung der LAURENT–*Entwicklungen* sieht man nun ganz allgemein, daß

$$\mathrm{res}_c f\,(z) = -\,\mathrm{res}_{-c} f\,(-z)\ .$$

Damit wird in unserem Spezialfall

$$\int_0^\infty \frac{\cos a\,x\,dx}{(x^2 + b^2)^2} = (a^3\,\pi\,i)\,\mathrm{res}_{abi}\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2\,b^2)^2}\ .$$

Um die Bemerkung zu Beginn des Kapitels über die Berechnung von Residuen in Polstellen höherer Ordnung anzuwenden, müssen wir die Funktion

$$(z - a\,b\,i)^2\,\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2\,b^2)^2} = \frac{e^{iz}}{(z + a\,b\,i)^2}$$

differenzieren. Es ergibt sich sofort

$$\left(\frac{e^{iz}}{(z + a\,b\,i)^2}\right)' = e^{iz}\,\frac{(z + a\,b\,i)\,i - 2}{(z + a\,b\,i)^3}$$

und folglich

$$\mathrm{res}_{abi}\frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2\,b^2)^2} = \lim_{z\to abi} e^{iz}\,\frac{(z + a\,b\,i)\,i - 2}{(z + a\,b\,i)^3} = -\,e^{-ab}\,\frac{a\,b + 1}{4\,a^3\,b^3}\,i\ .$$

Damit folgt die Behauptung.

Beispiel 10. Satz 7 läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß R höchstens *einfache* Polstellen auf $\mathbb{R}$ besitzt. Wie in Satz 6 folgt dann bei positivem α:

$$\int_{-\infty}^\infty R\,(x)\,e^{i\alpha x}\,dx = 2\,\pi\,i\sum_{\mathrm{Im}\,z>0}\mathrm{res}_z\,(R\,(z)\,e^{i\alpha z}) + \pi\,i\sum_{\mathrm{Im}\,z=0}\mathrm{res}_z\,(R\,(z)\,e^{i\alpha z})\ .$$

Daraus bekommt man Beispiel 6 als Spezialfall zurück:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \mathrm{Im}\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \mathrm{Im}\,\left(\pi\,i\,\mathrm{res}_0\,e^{iz}\,z^{-1}\right) = \pi\ .$$

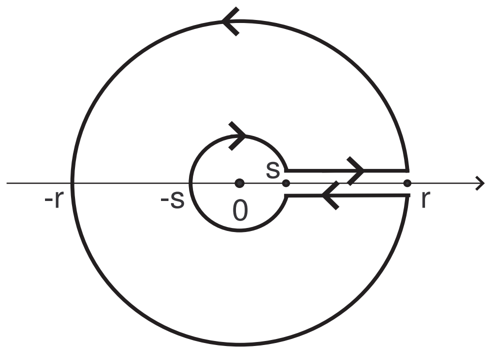
Man beachte aber, daß erst die im Beweis von Satz 7 hergeleitete Abschätzung für die Integrale I_r die Behandlung des Beispiels 6 abschließt.

Als nächstes machen wir uns auf geschickte Weise die Mehrdeutigkeit der Logarithmusfunktion für uneigentliche Integrale über die positive reelle Achse zu Nutze. - Wir beweisen gleich wieder ein allgemeines Resultat.

Satz 11.8 *Es sei* R *eine rationale Funktion vom Grad* ≤ -2 *, die keine Polstellen auf der positiven reellen Achse* $[0, \infty)$ *besitzt, und* $\log z$ *bezeichne irgendeinen Zweig des Logarithmus auf* $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_+$ *. Dann gilt* :

$$\int_0^\infty R(x)\, dx = -\sum \operatorname{res}_z (R(z) \log z)\,.$$

Beweis. $\gamma = \gamma_{r,s}$ sei die folgende Kurve



Figur 11.3

und $\lambda^\pm = \lambda^\pm_{r,s}$ bezeichne die (leicht nach oben bzw. unten verschobene) Strecke $\lambda_{r,s} = [s, r]$, so daß (im Wesentlichen) $\gamma = \kappa_r (\lambda^-)^{-1} \kappa_s^{-1} \lambda^+$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum \operatorname{res}_z (R(z) \log z) &= \int_{\gamma_{r,s}} R(z) \log z\, dz \\ &= \int_{\kappa_r} R(z) \log z\, dz + \int_{\lambda^+_{r,s}} R(z) \log^+ z\, dz - \\ &\quad \int_{\kappa_s} R(z) \log z\, dz - \int_{\lambda^-_{r,s}} R(z) \log^- z\, dz \end{aligned}$$

und damit durch Grenzübergang, da das erste und das dritte Integral wegen

$$\lim_{s \to 0} s \log s = \lim_{r \to \infty} \frac{\log r}{r} = 0$$

gegen Null gehen:

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum \operatorname{res}_z (R(z) \log z) &= \lim \int_{\lambda_{r,s}} R(z) (\log^+ z - \log^- z)\, dz \\ &= -2\pi i \lim \int_{\lambda_{r,s}} R(z)\, dz = -2\pi i \int_0^\infty R(x)\, dx\,. \end{aligned}$$ □

Beispiel 11. Ein konkretes Beispiel zu Satz 8 ist das folgende Resultat:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\,.$$

Man braucht hierzu nur zu beachten, daß der Integrand einfache Pole in $\zeta_6, \zeta_6^3 = -1$ und $\zeta_6^5 = \overline{\zeta_6}$ besitzt. Man wählt dann den Zweig des Logarithmus mit $0 < \operatorname{Im} \log z < 2\pi$ und bestimmt ohne große Mühe die Residuen der Funktion $\log z/(1 + z^3)$ an diesen Stellen sukzessive zu

$$\frac{\sqrt{3} - i}{18} \, , \quad \frac{\pi i}{3} \quad \text{und} \quad - \, \frac{5\,(\sqrt{3} + i)}{18} \; .$$

Beispiel 12. Man kann das vorstehende Ergebnis sofort verallgemeinern auf die Bestimmung <u>aller</u> Integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n}\, dx \, , \quad n \ge 2 \, .$$

Die rationale Funktion $R(z) = (1 + z^n)^{-1}$ besitzt Pole erster Ordnung an den Stellen

$$z_k := \zeta_{2n}^{2k-1} = \exp\left(\frac{(2k-1)\,\pi\, i}{n} \right) , \quad k = 1, \ldots, n \, .$$

Wegen $z_k^n = -1$ ist weiter

$$\frac{1}{z^n - z_k^n} = \frac{1}{z - z_k}\, \frac{z - z_k}{z^n - z_k^n} = \frac{1}{z - z_k}\, \frac{1}{n\, z_k^{n-1}} + \cdots = \frac{1}{z - z_k}\, \frac{-z_k}{n} + \cdots \, .$$

Infolgedessen ist das Residuum von R an der Stelle z_k gleich $-z_k/n$. Ferner ist

$$\log z_k = \frac{(2k-1)\,\pi\, i}{n} \, ,$$

und folglich besitzt die Funktion $R(z)\log z$ im Punkte z_k das Residuum

$$- \, \frac{(2k-1)\,\pi\, i}{n^2}\, \exp\left(\frac{(2k-1)\,\pi\, i}{n} \right) .$$

Nach Satz 8 ist schließlich

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n}\, dx = \frac{\pi}{n}\, S_n \, , \quad \text{wobei} \quad S_n := i \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n}\, \exp\left(\frac{(2k-1)\,\pi\, i}{n} \right) .$$

Eine leichte (aber tatsächlich, wie in [3], p. 215, apostrophiert, „lästige“ und daher weiter unten nachgetragene) Rechnung ergibt

$$(*) \qquad \sin \frac{\pi}{n} \cdot S_n = 1$$

und damit die schöne Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^n}\, dx = \frac{\dfrac{\pi}{n}}{\sin \dfrac{\pi}{n}} \, .$$

Wir müssen noch die Beziehung $(*)$ nachrechnen. Nach Umschreiben der linken Seite vermittels der Eulerschen Formeln und leichten Umformungen wird diese zu

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_{2n} - \zeta_{2n}^{-1}}{2n} \sum_{k=1}^n (2k-1)\, \zeta_{2n}^{2k-1} &= \frac{1}{2n} \Big(\sum_{k=1}^n (2k-1)\, \zeta_{2n}^{2k} - \sum_{k=1}^n (2k-1)\, \zeta_{2n}^{2k-2} \Big) \\
&= \frac{1}{2n} \Big(\sum_{k=1}^n (2k-1)\, \zeta_{2n}^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\, \zeta_{2n}^{2k} \Big) \\
&= \frac{1}{2n} \left((2n-1) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \zeta_n^k - 1 \right) .
\end{aligned}$$

Mit $A := \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_n^k$ ist aber auch $\zeta_n A = A$ und damit $A = 0$, also $\sum_{k=1}^{n-1} \zeta_n^k = -1$. Dies beweist die Formel $(*)$. □

Bemerkung. Es gibt tatsächlich eine Methode, mit der man die umständliche Summation in dem obigen Beispiel vermeiden kann. Siehe dazu Beispiel 18.

Die gleiche Methode wie in Satz 8 funktioniert auch für Integrale der Gestalt

$$\int_0^\infty R(x) \log x \, dx$$

mit rationalem $R(x)$ von geeignetem Grad. Man wendet hierbei den Residuensatz auf den obigen Weg und die Funktion

$$R(z) \log^2 z$$

an und berechnet die Differenz

$$(\log^+ z)^2 - (\log^- z)^2 = (\log^+ z)^2 - (\log^+ z + 2\pi i)^2 = -4\pi i \log^+ z + 4\pi^2 .$$

Dies reduziert die Berechnung des in Rede stehenden Integrals auf die von

$$\int_0^\infty R(x) \, dx .$$

Als Ergebnis können wir notieren:

Satz 11.9 *Es sei* R *eine rationale Funktion vom Grad* $\deg \le -2$ *ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse* $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, *und* $\log z$ *bezeichne irgendeinen Zweig des Logarithmus auf* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. *Dann gilt* :

$$\int_0^\infty R(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z(R(z) \log^2 z) - i \int_0^\infty R(x) \, dx .$$

Bemerkung. Ist R auf $\mathbb{R}$ *reellwertig*, so braucht man das Integral auf der rechten Seite gar nicht zu bestimmen, da es in dem betrachteten *reellen* Integral als rein–imaginärer Summand auftritt. Es ist dann also

$$\int_0^\infty R(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \, \mathrm{Re} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z(R(z) \log^2 z) .$$

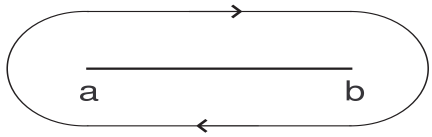
Beispiel 13. Als konkretes Integral notieren wir:

$$\int_0^\infty \frac{\log x \, dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi \log a}{2a} \quad \text{für } a > 0 .$$

Beispiel 14. Die Mehrdeutigkeit des Logarithmus kann man sogar für die Auswertung von Integralen über kompakte reelle Intervalle $[a, b]$ nutzbringend einsetzen. Durch Subtraktion je eines Zweiges von $\log(z - b)$ auf $\mathbb{R} \setminus (-\infty, b]$ und $\log(z - a)$ auf $\mathbb{R} \setminus (-\infty, a]$ gewinnt man einen Zweig der Funktion

$$\log \frac{z - b}{z - a} ,$$

der auf $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ holomorph ist und beim Durchgang durch das Intervall $[a, b]$ von der unteren in die obere Halbebene additiv um den Betrag $2\pi i$ wächst. Es sei nun R eine rationale Funktion mit $\deg R \le -1$, die auf dem Intervall $[a, b]$ holomorph sei. Dann gibt es einen Weg γ der folgenden Art, so daß die Singularitäten von R alle außerhalb dieses Weges liegen.



Figur 11.4

Da nach Voraussetzung an ihren Grad die rationale Funktion $z \mapsto R(z)$ im Unendlichen verschwindet (was bedeutet, daß die Funktion $w \mapsto R(1/w)$ im Nullpunkt holomorph durch Null ergänzbar ist) und auch die Funktion $\log(z - b)/(z - a)$ diese Eigenschaft hat, sieht man sofort, daß ihr Produkt im Unendlichen kein Residuum besitzt. Genauer ist (siehe die Bemerkung im Anschluß an Satz 10):

$$\operatorname{res}_\infty \left(R(z) \log \frac{z - b}{z - a} \right) = -\operatorname{res}_{w=0} \left(\frac{1}{w^2} R\left(\frac{1}{w}\right) \log \frac{1 - b\,w}{1 - a\,w} \right) = 0 .$$

Damit gilt der Residuensatz, wie man sich verhältnismäßig leicht durch Spiegelung an einem geeigneten Kreis überlegt, in der Form

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R(z) \log \frac{z - b}{z - a}\, dz = \sum_{z \notin [a,b]} \operatorname{res}_z \left(R(z) \log \frac{z - b}{z - a} \right) .$$

Läßt man nun den Abstand r des Weges γ zu dem Intervall $[a, b]$ gegen Null gehen, so gehen die Integrale über die beiden Halbkreise wie $r \log(1/r)$ gegen Null, und die Summe der beiden restlichen Integrale konvergiert gegen

$$2\pi i \int_{[a,b]} R(x)\, dx .$$

Zusammenfassend erhalten wir den folgenden

Satz 11.10 *Hat die rationale Funktion R einen Grad ≤ -1 und besitzt sie keine Polstellen auf dem reellen Intervall $[a, b]$, so gilt für jeden Zweig der Logarithmusfunktion $\log \frac{z - b}{z - a}$ auf $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ die Beziehung* :

$$\int_{[a,b]} R(x)\, dx = \sum_{z \notin [a,b]} \operatorname{res}_z \left(R(z) \log \frac{z - b}{z - a} \right) .$$

Bemerkung. Ist f eine holomorphe Funktion im *Äußeren* einer Kreisscheibe um den Ursprung, so definiert man sinnvollerweise ihr Residuum *im Unendlichen* als das Integral

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa_r^{-1}} f(z)\, dz ,$$

wobei κ_r^{-1} der im *Uhrzeigersinn* orientierte Kreis um Null mit hinreichend großem Radius r bezeichnet. Es ist dann mit $\rho := 1/r$:

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{-i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(r\, e^{-i\vartheta})\, r\, e^{-i\vartheta}\, d\vartheta = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\rho\, e^{i\vartheta}}\right) \frac{1}{\rho\, e^{i\vartheta}}\, d\vartheta = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\kappa_\rho} f\left(\frac{1}{w}\right) \frac{dw}{w^2} .$$

Hieraus folgt ganz allgemein die oben benutzte Formel

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{res}_{w=0} \frac{f(1/w)}{w^2} .$$

Im folgenden Abschnitt untersuchen wir uneigentliche Integrale von Produkten aus rationalen und *Potenzfunktionen*.

Satz 11.11 *Es sei* R *eine rationale Funktion vom Grad kleiner oder gleich* -2 *, die auf* $(0, \infty)$ *keine Pole und in* 0 *höchstens einen Pol erster Ordnung besitzt. Ferner sei* α *eine reelle Zahl mit* $0 < \alpha < 1$ *. Ist dann* z^α *der Zweig der Potenzfunktion*

$$z^\alpha = e^{\alpha \log |z| + i\alpha \arg z} \quad \textit{mit} \quad 0 < \arg z < 2\pi \, ,$$

so gilt

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x)\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z \left(z^\alpha R(z) \right) .$$

Beweis. Man wählt dazu den Weg γ wie in Figur 3. Dann schließt man wie oben, daß die Residuensumme

$$2\pi i \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z \left(z^\alpha R(z) \right) = \int_{\gamma_{r,s}} z^\alpha R(z)\, dz$$

gleich

$$\int_{\kappa_r} z^\alpha R(z)\, dz - \int_{\kappa_s} z^\alpha R(z)\, dz + \int_{\lambda^+_{r,s}} x^\alpha R(x)\, dx - \int_{\lambda^-_{r,s}} x^\alpha R(x)\, dx$$

ist. Die Werte von z^α unterscheiden sich aber am oberen und unteren Ufer durch

$$(z^\alpha)^- = (z^\alpha)^+ e^{2\pi i\alpha} .$$

Damit ergibt sich nach Grenzübergang

$$2\pi i \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z \left(z^\alpha R(z) \right) = \left(1 - e^{2\pi i\alpha}\right) \int_0^\infty x^\alpha R(x)\, dx . \qquad \square$$

Beispiel 15.
$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}\, dx}{(x+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \, , \quad 0 < \alpha < 1 .$$

Beispiel 16. Wir behandeln mit diesem Resultat noch einmal Beispiel 3. Mit der Substitution $u := x^2$ wird $du = 2x\, dx$ und damit

$$I := \int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{u}\, du}{u^2 + 6u + 13} .$$

Mit dem Zweig der Wurzel

$$z^{1/2} = e^{(1/2)\log|z| + (i/2)\arg z} \text{ auf } \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \, , \text{ also } 0 < \arg z < 2\pi \, ,$$

wird dann nach dem obigen Resultat

$$I = \frac{\pi i}{1 - e^{\pi i}} \sum_{z \neq 0} \operatorname{res}_z \frac{z^{1/2}}{z^2 + 6z + 13} .$$

Nun ist $z^2 + 6z + 13 = (z - z_1)(z - z_2)$ mit den beiden Nullstellen $z_{1,2} = -3 \pm 2i$, also

$$(*) \qquad I = \frac{\pi i}{2} \left(\frac{z_1^{1/2}}{z_1 - z_2} + \frac{z_2^{1/2}}{z_2 - z_1} \right) = \frac{\pi}{8} \left(z_1^{1/2} - z_2^{1/2} \right) .$$

Weiter ist $|z_{1,2}| = \sqrt{13}$, und für die Winkel $\vartheta_{1,2} = \arg z_{1,2}$ hat man

$$\tan \vartheta_2 = -\tan \vartheta_1 = \frac{2}{3} .$$

Mit der Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan(\alpha/2)}{1 - \tan^2(\alpha/2)}\,, \quad \text{also } \tan^2(\alpha/2) + \frac{2}{\tan \alpha} \tan(\alpha/2) - 1 = 0\,,$$

gewinnt man $\tan \vartheta_1/2 = 3/2 \pm \sqrt{9/4 + 1}$ und $\tan \vartheta_2/2 = -3/2 \pm \sqrt{9/4+1}$. Nun muß offenbar der erste Wert positiv und der zweite Wert negativ sein. Es ergibt sich

$$\tan \vartheta_1/2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\,, \quad \tan \vartheta_2/2 = -\,\frac{3+\sqrt{13}}{2}\,.$$

Damit ist $\cos \vartheta_1/2 = -\cos \vartheta_2/2 > 0$ und $\sin \vartheta_1/2 = \sin \vartheta_2/2$, und auf der rechten Seite von $(*)$ verschwindet, wie es sein muß, der Imaginärteil. Wir erhalten schließlich

$$I = \frac{\pi}{4} \sqrt[4]{13} \cos(\vartheta_1/2)\,.$$

Ein vollständiges Ergebnis gewinnt man mit

$$\cos \vartheta_1/2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta_1/2}} = \frac{2}{\sqrt{4 + (3 + \sqrt{13})^2}} = \frac{2}{\sqrt{26 + 6\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{13}\sqrt{3+\sqrt{13}}}\,.$$

Erweitert man hier noch mit $\sqrt{\sqrt{13} - 3}$, so lautet die Antwort erneut

$$\int_0^\infty \frac{x^2\, dx}{x^4 + 6x^2 + 13} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{13} - 3}\,.$$

Bemerkung. Allgemeiner kann man auf die gleiche Weise Integrale der Gestalt

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) \log x \, dx$$

und sogar

$$\int_0^\infty x^\alpha R(x) \log^n x \, dx$$

mit rationalen Funktionen $R(x)$ von geeignetem Grad behandeln.

Wir beschränken uns auf die Behandlung des Falles $n = 1$ und behaupten:

Satz 11.12 *Es sei R eine rationale Funktion vom Grad ≤ -2, die auf $(0, \infty)$ keine Pole und im Ursprung höchstens einen Pol erster Ordnung besitzt. Ferner sei $0 < \alpha < 1$. Dann gilt mit dem Zweig $z^\alpha := \exp(\alpha \log |z| + i\alpha \arg z)$ der Potenzfunktion und dem Zweig $\log z := \log|z| + i \arg z$ des Logarithmus auf der entlang der positiven reellen Achse aufgeschlitzten Ebene ($0 < \arg z < 2\pi$):*

$$\int_0^\infty R(x)\, x^\alpha \log x \, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z(R(z)\, z^\alpha \log z) + \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)} \sum_{z\neq 0} \mathrm{res}_z(R(z)\, z^\alpha)\,.$$

Beweis. Der Beweis der Formel folgt denselben Überlegungen wie zu den Integralen über $R(z)\, z^\alpha$. Wir benötigen dazu das Verhalten der Zweige des Logarithmus und der Potenzfunktion beim Übergang von dem oberen Ufer zum unteren Ufer der positiven reellen Achse. Mit sich selbst erklärenden Bezeichnungen gilt

$$\log_- x = \log_+ x + 2\pi i = \log x + 2\pi i\,, \quad (x^\alpha)_- = e^{2\pi i \alpha} (x^\alpha)_+ = e^{2\pi i\alpha} x^\alpha\,.$$

Mit dem Residuensatz folgt dann:

$$
\begin{aligned}
(2\pi i) \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z (R(z)\, z^\alpha \log z) &= \int_0^\infty R(x)\,(x^\alpha \log x)_+ dx - \int_0^\infty R(x)\,(x^\alpha \log x)_- dx \\
&= \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha \log x\, dx - e^{2\pi i\alpha} \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha (\log x + 2\pi i)\, dx \\
&= (1 - e^{2\pi i\alpha}) \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha \log x\, dx - (2\pi i) \cdot e^{2\pi i\alpha} \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha\, dx \, .
\end{aligned}
$$

Durch Auflösung nach dem von uns untersuchten uneigentlichen Integral kommt dann

$$
(+) \quad \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha \log x\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z (R(z)\, z^\alpha \log z) + \frac{2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \int_0^\infty R(x)\, x^\alpha\, dx \, .
$$

Das ganz rechts stehende Integral ist aber mit der gleichen Methode behandelbar und ergibt

$$
\int_0^\infty R(x)\, x^\alpha\, dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z (R(z)\, z^\alpha) \, .
$$

Es braucht somit nur noch nachgewiesen zu werden, daß der in der Formel angegebene Faktor vor der zweiten Residuensumme den richtigen Wert besitzt. In der Tat liefert eine einfache Rechnung

$$
\frac{2\pi i\, e^{2\pi i\alpha}}{1 - e^{2\pi i\alpha}} \, \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i\alpha}} = \pi^2 \left(\frac{2i}{e^{-i\pi\alpha} - e^{i\pi\alpha}} \right)^2 = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi\alpha} \, . \qquad \square
$$

Beispiel 17. Wir bestimmen die Integrale

$$
\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x}} \, , \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + 1)\sqrt{x}}\, dx \, ,
$$

die beide wegen

$$
\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x(x^2 + 1)}\, dx \, , \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + 1)\sqrt{x}}\, dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, \log x}{x(x^2 + 1)}\, dx
$$

nach oben bereitgestellten Methoden behandelt werden können. Wir werden zeigen, daß man unter geschickter Ausnutzung der Formel (+) im Beweis des vorigen Satzes beide Integrale gleichzeitig bei minimalem Rechenaufwand gewinnen kann.

Wir beginnen mit dem zweiten Integral. Es ist $\alpha = 1/2$ und damit $e^{2\pi i\alpha} = e^{\pi i} = -1$. Auf der rechten Seite der Formel (+) ist damit der zweite Summand rein imaginär und kann folglich unberücksichtig bleiben. Wir erhalten somit das gesuchte Integral I als *Realteil* des Ausdrucks

$$
\frac{2\pi i}{2} \sum_{z \neq 0} \mathrm{res}_z (R(z)\, z^{1/2} \log z) \quad \text{mit} \quad R(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)} \, ,
$$

d. h.

$$
I = -\pi \, \mathrm{Im} \left(\mathrm{res}_i \frac{z^{1/2} \log z}{z(z^2 + 1)} + \mathrm{res}_{-i} \frac{z^{1/2} \log z}{z(z^2 + 1)} \right) \, ,
$$

da die zu betrachtende Funktion nur (von 0 verschiedene) Singularitäten an den Stellen $\pm i$ besitzt. Diese sind Pole von erster Ordnung. Daher brauchen wir im Wesentlichen nur die Funktionswerte von $z^{1/2}$, $\log z$ und $z(z \pm i)$ an diesen Stellen auszurechnen. Wegen

$$
i^{1/2} = \frac{i + 1}{\sqrt{2}} \, , \quad \log i = i\, \frac{\pi}{2} \, , \quad (-i)^{1/2} = \frac{i - 1}{\sqrt{2}} \, , \quad \log(-i) = i\, \frac{3\pi}{2} \, ,
$$

bekommt man augenblicklich

$$I = -\pi \operatorname{Im}\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{i}{i\,(2\,i)} + \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,\frac{3\,\pi}{2}\,\frac{i}{-i\,(-2\,i)}\right)$$
$$= -\frac{\pi^2}{4\sqrt{2}}\operatorname{Im}(-i + 3\,i) = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}\ .$$

Selbstverständlich kann man das Ergebnis auch (mit doppeltem Aufwand) erhalten, wenn man die Formel (+) direkt anwendet. Bei unserem Vorgehen bekommt man aber auch das erste Integral gleich mitgeschenkt, indem man in der Formel (+) auf beiden Seiten zu den Imaginärteilen übergeht:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x^2+1)} = \operatorname{Re}\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{i}{i\,(2\,i)} + \frac{i-1}{\sqrt{2}}\,\frac{3\,\pi}{2}\,\frac{i}{-i\,(-2\,i)}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,(1+3) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\ .$$

Beispiel 18. Wir kommen noch einmal auf die Integrale in Beispiel 12 zu sprechen und betrachten in diesem Zusammenhang generell Integranden der Form $R\,(z^n)\,,\ n \geq 2\,,$ mit einer rationalen Funktion R. Durch die Koordinatentransformation $u = x^n$ erhält man die Beziehung

$$\int_0^\infty R\,(x^n)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{R\,(u)}{u}\,u^{1/n}\,du\ ,$$

und das letzte Integral läßt sich gegebenenfalls mit der Methode von Satz 12 ausrechnen.

Wir wenden diese Bemerkung auf die Funktion $R\,(w) := (w+1)^{-1}$ an. Die Funktion

$$\frac{R\,(w)}{w}\,w^{1/n}$$

besitzt in $\mathbb{C}\setminus[\,0,\,\infty)$ nur eine Polstelle in $w_0 = -1$ mit Residuum $-\exp(\pi i/n)$. Somit kommt, diesmal ohne längere Rechnung, erneut

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^n+1} = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{R\,(u)}{u}\,u^{1/n}\,du = \frac{1}{n}\,\frac{2\,\pi\,i}{1-e^{2\pi i/n}}\,\operatorname{res}_{w=-1}\left(w^{1/n}\,\frac{R\,(w)}{w}\right)$$
$$= \frac{-\dfrac{2\pi i}{n}\,e^{\pi i/n}}{1-e^{2\pi i/n}} = \frac{\dfrac{\pi}{n}}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\ .$$

Zum Abschluß dieses Kapitels behandeln wir noch die sogenannten FRESNELschen *Integrale*, die in der Theorie der *Lichtbeugung* auftreten. Sie sind, bis auf gelegentlich verwendete besondere Normierungsfaktoren, von der Gestalt

$$C\,(t) := \int_0^t \cos x^2\,dx \quad \text{und} \quad S\,(t) := \int_0^t \sin x^2\,dx\ .$$

Die Kurve

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto (C\,(t),\,S\,(t))\ ,$$

die erste der sogenannten „Klothoiden“, hat ein äußerst attraktives Erscheinungsbild. Sie besitzt insbesondere Grenzwerte für $t \to \pm\infty$, um die sie sich unendlich oft herumwindet. Die unendlich vielen Maxima und Minima entsprechen gewissen Beugungsmustern.

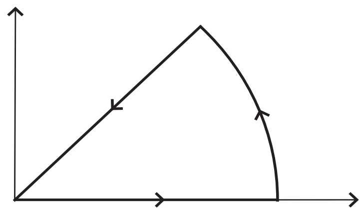
Wir wollen in diesem Abschnitt nur den Grenzwert für $t \to \infty$ bestimmen, also die uneigentlichen Integrale

$$C := \int_0^\infty \cos x^2\,dx \quad \text{und} \quad S := \int_0^\infty \sin x^2\,dx\ ,$$

die ebenfalls in der Literatur als Fresnelsche Integrale bezeichnet werden. Man kann sie auf einen Schlag erhalten als Real– und Imaginärteil des Integrals

$$C + i\,S = \int_0^\infty e^{ix^2}\,dx\ .$$

Zu seiner Berechnung integrieren wir die Funktion $f(z) := e^{iz^2}$ über einen Weg von dem folgenden Typ:



Figur 11.5

Ähnlich wie im Beweis von Satz 7 gewinnt man für das Teil–Integral über den „Achtelbogen“ κ_r vom Radius r eine Abschätzung der Gestalt

$$\Big| \int_{\kappa_r} e^{iz^2}\,dz \Big| \le \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2 \sin\theta}\,d\theta \le \frac{C_1}{r} + C_2\,r\,e^{-\beta r^2}\ ,$$

so daß wir diesen Anteil beim Grenzübergang $r \to \infty$ vergessen dürfen. Wir brauchen uns also nur noch um das Integral auf der „Winkelhalbierenden“ im ersten Quadranten zu kümmern, die die Parametrisierung

$$t \longmapsto t\,\zeta_8\ , \quad t \in [\,0,\,r\,]\ ,$$

besitzt. Somit impliziert der Cauchysche Integralsatz wegen $\zeta_8^2 = \zeta_4 = i$ die Gleichung

$$C + i\,S = \zeta_8 \lim_{r\to\infty} \int_0^r e^{-t^2}\,dt\ ,$$

und mit

$$\zeta_8 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \text{und dem bekannten Integral} \quad \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ergibt sich sofort

$$C = S = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\ .$$

Bemerkung. Die in diesem Kapitel behandelten (uneigentlichen) Integrale lassen sich natürlich auch mit reellen Methoden ausrechnen, was aber oft mit erheblich größerem Aufwand und Tricks verbunden ist. Wir wollen dies stellvertretend an einem der beiden Fresnelschen Integrale demonstrieren. Zuerst beachtet man, daß mit geeigneter Substitution

$$S = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$$

wird. Des weiteren gewinnt man aus dem auch oben schon herangezogenen Integral

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{sofort} \quad \int_0^\infty e^{-u^2 t}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} \quad \text{für} \quad t > 0$$

und folglich für den Integranden des Fresnelintegrals die Integral–Darstellung

$$\frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, du \quad \text{für} \quad t > 0 \, ,$$

was aber auch noch für $t = 0$ bei richtiger Interpretation gültig bleibt. Das rechts stehende Integral ist aber gleichmäßig konvergent für $t \geq 0$, da der Integrand für alle diese t und alle $u > 0$ dem Betrage nach $\leq u^{-2}$ bleibt. Somit ist die in der folgenden Zeile durchgeführte Vertauschung von Integrationen gerechtfertigt:

$$\int_0^\tau \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\tau \left(\int_0^\infty e^{-u^2 t} \sin t \, du \right) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\int_0^\tau e^{-u^2 t} \sin t \, dt \right) du \, .$$

Nun ist weiter aus der reellen Analysis bekannt, daß

$$\int e^{at} \sin(\alpha t + \beta) \, dt = \frac{a \sin(\alpha t + \beta) - \alpha \cos(\alpha t + \beta)}{a^2 + \alpha^2} \, e^{at} \, .$$

Dies, mit $a = -u^2$, $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ in die obige Beziehung eingesetzt, liefert

$$\int_0^\tau \frac{\sin t}{\sqrt{t}} \, dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{-\cos\tau - u^2 \sin\tau}{1 + u^4} \, e^{-\tau u^2} \, du + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1 + u^4} \, du \, .$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist dem Betrage nach höchstens gleich

$$2 \int_0^\infty e^{-\tau u^2} \, du = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}$$

und geht daher gegen Null, wenn τ nach ∞ strebt. - Insgesamt ergibt sich also

$$S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{du}{1 + u^4} \, .$$

Das ganz rechts stehende Integral haben wir (wieder mit dem Residuensatz!) weiter oben ausgerechnet: Es ist gleich

$$\frac{\dfrac{\pi}{4}}{\sin \dfrac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \, , \quad \text{und folglich ist} \quad S = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \, .$$

Will man vollständig im Reellen bleiben, so ist auch das zuletzt benutzte Resultat noch aus der Partialbruch–Zerlegung der Funktion $1/(1 + u^4)$ herzuleiten. Es ist offensichtlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + u^4} = \; & \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2u + \sqrt{2}}{u^2 + \sqrt{2}\, u + 1} - \frac{2u - \sqrt{2}}{u^2 - \sqrt{2}\, u + 1} \right) + \\ & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\left(u - 1/\sqrt{2}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2\left(u + 1/\sqrt{2}\right)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$\int \frac{du}{1 + u^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{u^2 + \sqrt{2}\, u + 1}{u^2 - \sqrt{2}\, u + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}\, u + 1) + \arctan(\sqrt{2}\, u - 1) \right] ,$$

woraus das obige Ergebnis noch einmal abgelesen werden kann:

$$\int_0^\infty \frac{du}{1 + u^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \arctan 1 - \arctan(-1) \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \, .$$

Anhang: Bernoulli - Zahlen und Residuenkalkül

Die BERNOULLI–*Zahlen* spielen eine wichtige Rolle in einigen Bereichen der Analysis und der analytischen Zahlentheorie. Sie treten auf als (Laurent–) Entwicklungskoeffizienten der Cotangens–Funktion und der Funktion

$$f(z) := \frac{1}{e^z - 1}\ .$$

Die wichtigsten Eigenschaften haben wir schon in Kapitel 14 des Manuskripts *Analysis II* dargestellt; sie sollen hier kurz wiederholt werden. Das eigentliche Ziel des vorliegenden Anhangs ist die Herleitung der sogenannten EULERschen *Relationen*.

Die Funktion f hat einen Pol erster Ordnung im Punkte 0 und in allen Punkten der Form $z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$, und ist sonst holomorph. Durch Multiplikation mit z gewinnt man somit die in $D_{2\pi}(0)$ holomorphe Funktion

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} \quad \text{mit} \quad g(0) = 1\ .$$

Die Funktion $h(z) := g(z) + z/2 = z\,(e^z + 1)/2\,(e^z - 1)$ ist *gerade*, wie eine leichte Rechnung zeigt:

$$h(-z) = -\frac{z\,(e^{-z} + 1)}{2\,(e^{-z} - 1)} = \frac{z\,(e^{-z} + 1)}{2\,(1 - e^{-z})}\,\frac{e^z}{e^z} = h(z)\ .$$

Infolgedessen hat die Funktion g um den Ursprung eine Potenzreihen–Entwicklung der Gestalt

$$g(z) = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n}\ .$$

Man nennt die Koeffizienten B_{2n} die BERNOULLI–*Zahlen*[8]. Aus der Beziehung

$$g(z) \cdot \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell!}\, z^{\ell} = z$$

gewinnt man *Rekursionsgleichungen* für die Bernoulli–Zahlen (siehe loc. cit.), aus denen man insbesondere ablesen kann, daß sie *rational sind und alternierende Vorzeichen besitzen*. Die ersten Elemente dieser Folge lauten:

$$B_2 = \frac{1}{6}\,, \quad B_4 = -\frac{1}{30}\,, \quad B_6 = \frac{1}{42}\,, \quad B_8 = -\frac{1}{30}\,, \quad B_{10} = \frac{5}{66}\,, \quad B_{12} = -\frac{691}{2730}\,, \quad B_{14} = \frac{7}{6}\ .$$

Wir wollen jetzt mit Hilfe des Residuen–Kalküls nachweisen, daß die folgenden Beziehungen bestehen.

Satz 11.13 (Eulersche Relationen) *Für alle* $n \in \mathbb{N}^*$ *gelten die Relationen* :

$$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n+1}\,(2\pi)^{2n}}{2\,(2n)!}\, B_{2n}\ .$$

Bemerkung. Man kann also die Werte der Riemannschen ζ–Funktion an allen geradzahligen Stellen explizit durch die Bernoulli–Zahlen ausdrücken. Insbesondere sind diese Werte *transzendent*. Es ist zum Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}\,, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}\ .$$

[8] Und schreibt für diese manchmal auch B_n anstelle von B_{2n}. Manche Autoren benutzen die Schreibweise B_n für die Absolutbeträge dieser Zahlen.

Beweis von Satz 9. Wir führen die weiteren Hilfsfunktionen

$$f_n(z) \;=\; \frac{1}{z^n}\, f\,(z) \;=\; \frac{1}{z^{n+1}}\, g\,(z)$$

ein. Aufgrund der Potenzreihen–Entwicklung von $g\,(z)$ besitzt f_{2n} im Nullpunkt einen Pol der Ordnung $2n + 1$ mit dem Residuum

$$\mathrm{res}_0 f_{2n} \;=\; \frac{B_{2n}}{(2n)!}\;.$$

Des weiteren haben alle Funktionen f_n an den Stellen $z_k = 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}^*$, Pole erster Ordnung mit

$$\mathrm{res}_{z_k} f_n \;=\; \lim_{z\to z_k}\,(z - z_k)\,\frac{1}{z^n\,(e^z - 1)} \;=\; \lim_{z\to z_k}\,\frac{1}{z^n}\,\frac{1}{\dfrac{e^{z-z_k} - 1}{z - z_k}} \;=\; \frac{1}{z_k^n}\;.$$

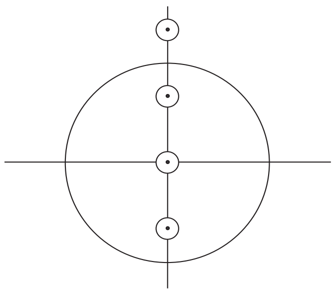
Somit liefert der Residuensatz, angewandt auf den (positiv orientierten) Kreisrand κ_m mit Mittelpunkt 0 und Radius $(2m + 1)\,\pi$:

$$(*)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\kappa_m} f_{2n}(z)\,dz \;=\; \frac{B_{2n}}{(2n)!} \;+\; 2\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n}}\;.$$

Es ist nun nicht schwer zu sehen (siehe z. B. Behnke - Sommer [3], p. 222), daß die Funktion f auf

$$\mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} D_1(z_k)$$

beschränkt ist.



Figur 11.6

Daher geht das Integral in $(*)$ bei festem n und wachsendem m wie

$$\frac{2\pi\,(2m + 1)\,\pi}{(2m + 1)^{2n}\,\pi^{2n}} \;=\; \frac{2\pi}{(2m + 1)^{2n-1}\,\pi^{2n-1}}$$

gegen Null. $\square$

12 Reell - analytische und harmonische Funktionen

In diesem Kapitel wenden wir Ergebnisse der komplexen Analysis auf Probleme reell–analytischer Funktionen an. Dies betrifft u. a. die *Charakterisierung* dieser Funktionen, einen Zusammenhang zwischen der *Fourier–Entwicklung* von solchen Funktionen und der *Laurent–Entwicklung* geeigneter holomorpher Funktionen in Kreisringen und das *Dirichlet–Problem* für *harmonische Funktionen* auf Kreisscheiben.

a) Charakterisierung analytischer Funktionen

Wir beginnen mit einem (offenen) Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ und einer reellwertigen Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und stellen uns die Frage: Wann gibt es ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und eine *holomorphe* Funktion $F : G \to \mathbb{C}$, so daß $I = G \cap \mathbb{R}$ und $F_{|I} = f$? Mit anderen Worten: *Wann läßt sich f holomorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen?*

Wenn eine solche Fortsetzung möglich ist, so existiert notwendigerweise für alle $x_0 \in I$ eine in einer komplexen Umgebung von x_0 konvergente Potenzreihen–Entwicklung

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, (z - x_0)^j$$

und damit eine nahe x_0 in $\mathbb{R}$ konvergente Entwicklung

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \, (x - x_0)^j \; .$$

Da f reellwertig ist, müssen auch die Taylor–Koeffizienten a_j reell sein. Also ist zur Lösung unserer Frage notwendig, daß f a priori eine *reell–analytische* Funktion ist. - Diese Bedingung ist auch hinreichend:

Satz 12.1 *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung, wenn f reell–analytisch ist.*

Beweis. Sei f analytisch auf I, sei $x_0 \in I$ fest und bezeichne r_{x_0} den (positiven) Konvergenz–Radius der Taylorreihe von f um x_0. Da die Hadamardsche Formel sowohl im Reellen als auch im Komplexen gültig ist, ist damit die Taylor–Reihe

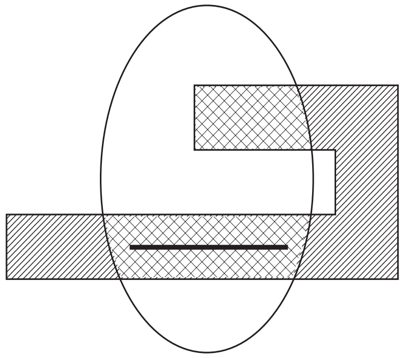
$$F^{(x_0)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \, (z - x_0)^j$$

in $U_{x_0} = D_{r_{x_0}}(x_0) \subset \mathbb{C}$ konvergent und stellt dort also eine holomorphe Funktion dar, die f lokal, d. h. genauer auf dem Intervall $\{\, |x - x_0| < r_{x_0} \,\}$, fortsetzt. Wir brauchen nur noch zu zeigen, daß sich diese lokalen Fortsetzungen eindeutig zu einer globalen Funktion zusammensetzen lassen. Sei dazu ein weiterer Punkt $x_1 \in I$ gewählt und $U_{x_0} \cap U_{x_1} \neq \emptyset$. Dann enthält der Durchschnitt ein offenes nichtleeres Teilintervall von (a, b), auf denen die beiden Fortsetzungen mit f und damit auch miteinander übereinstimmen. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ist dann aber auch $F^{(x_0)}{}_{|U_{x_0} \cap U_{x_1}} = F^{(x_1)}{}_{|U_{x_0} \cap U_{x_1}}$, da die Menge $U_{x_0} \cap U_{x_1}$ zusammenhängend ist. Also wird durch

$$F : G = \bigcup_{x_0 \in I} U_{x_0} \longrightarrow \mathbb{C} \, , \quad F_{|U_{x_0}} := F^{(x_0)}$$

eine holomorphe Funktion $F \in \mathcal{O}(G)$ auf dem Gebiet G mit $F_{|I} = f$ und $G \cap \mathbb{R} = I$ erklärt. □

Bemerkung. Zwei holomorphe Fortsetzungen derselben Funktion f auf demselben Gebiet G stimmen wegen des Identitätssatzes überein. Trotzdem kann es „verschiedene“ Fortsetzungen $F_j : G_j \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2$ von f wie in der folgenden Skizze geben (selbstverständlich stimmen F_1 und F_2 überein auf der *Zusammenhangskomponente* des Durchschnitts $G_1 \cap G_2$, die das reelle Intervall I enthält, nicht aber notwendigerweise auf den anderen Zusammenhangskomponenten):



Figur 12.1

Mit Hilfe der Cauchyschen Ungleichungen kann man die reell–analytischen unter den beliebig oft differenzierbaren Funktionen charakterisieren.

Satz 12.2 *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ eine beliebig oft differenzierbare reellwertige Funktion. Dann gilt: f ist reell–analytisch (in Zeichen $f \in C^\omega(I, \mathbb{R})$) genau dann, wenn für alle $x_0 \in I$ Konstanten $K > 0$ und $\delta > 0$ existieren, so daß für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I \cap U_\delta(x_0)$ gilt :*

$$| f^{(j)}(x) | \leq K \cdot \frac{j!}{\delta^j} .$$

Beweis. a) Die Richtung $\Longleftarrow$ wird in jedem Standardlehrbuch der reellen Analysis gezeigt. (Unter dieser Voraussetzung ist die Taylorreihe konvergent gegen f, da das Restglied nach Lagrange gegen Null geht).

b) $\Longrightarrow$ Diese Richtung kann mit Mitteln der reellen Analysis jedoch nicht bewiesen werden. Sei $2r$ der Konvergenzradius von f um x_0, und sei $\delta = r/2$. Ferner sei F eine holomorphe Fortsetzung von f nach $D_{2r}(x_0)$. Dann gilt wegen der Cauchyschen Ungleichungen

$$| F^{(j)}(z) | \leq 2 \frac{j!}{\delta^j} \max_{|\zeta - z_0| = r} | F(\zeta) |$$

für alle $z \in \overline{D}_\delta(x_0)$. Setze nun $K := 2 \max_{|\zeta - z_0| = r} | F(\zeta) |$ (wozu man eben ins Komplexe gehen muß), und beachte $f^{(j)}(x) = F^{(j)}(x)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in I \cap U_\delta(x_0)$. $\square$

b) Fourier - Reihen für analytische Funktionen

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) sei analytisch und periodisch (ohne Einschränkung mit Periode 2π): $f(x + 2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Man überlegt sich leicht, daß dann eine holomorphe Fortsetzung F von f in ein *Streifengebiet* $G = \{ z \in \mathbb{C} : | \operatorname{Im} z | < \delta \}$, $\delta > 0$, möglich ist. Mit dem Identitätssatz ergibt sich sofort auch die Periodizität der Fortsetzung: $F(z + 2\pi) = F(z)$. Man betrachte nun die Abbildung $w = e^{iz}$; diese bildet den obigen Streifen auf einen Kreisring K um $\partial D_1(0)$ ab. (Siehe die Zeichnung auf der nächsten Seite).

Wegen der Periodizität von F existiert dann eine wohldefinierte stetige Funktion $g = g(w)$ auf K mit $F(z) = g(w)$, falls $w = e^{iz}$. Da die Abbildung $z \mapsto e^{iz}$ lokal biholomorph ist, ist notwendigerweise auch g holomorph auf K. Für g haben wir aber die Laurent–Entwicklung

$$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n , \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_1(0)} \frac{g(\omega)}{\omega^{n+1}} \, d\omega .$$

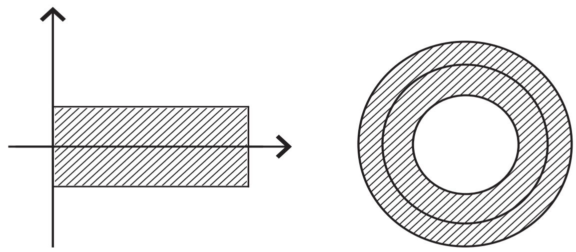
Daraus deduziert man für $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = F(x) = g(e^{ix}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nix} ,$$

d. h. die *Fourier–Entwicklung* der (analytischen) Funktion f, wobei sich die *Fourier–Koeffizienten* c_n aus den Laurent–Koeffizienten vermittels $\omega = e^{ix}$, $d\omega = i e^{ix} dx$ korrekt in der Form

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{e^{i(n+1)x}} i e^{ix} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

ergeben.



Figur 12.2

c) Harmonische Funktionen

Zum dritten wollen wir den schon früher skizzierten Zusammenhang zwischen *holomorphen* Funktionen in einer komplexen Veränderlichen und *harmonischen* Funktionen in zwei reellen Veränderlichen genauer erläutern und zur Ableitung von Aussagen über harmonische Funktionen benutzen. Wir wissen nunmehr, daß holomorphe Funktionen $f \in \mathcal{O}(G)$ tatsächlich beliebig oft reell differenzierbar sind. Damit sind unsere früheren Überlegungen gerechtfertigt: Wir dürfen den *Laplace–Operator* Δ auf f anwenden und erhalten mit

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \, \partial \overline{z}}$$

und $f = g + i h$ sofort, daß

$$\Delta g + i \Delta h = \Delta f = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial z \, \partial \overline{z}} = 0$$

und damit

$$\Delta g = \Delta h = 0 ;$$

d. h. $g = \mathrm{Re}\, f$ und $g = \mathrm{Im}\, f$ sind *harmonisch*. - Wir zeigen jetzt umgekehrt:

Satz 12.3 *Sei G ein sternförmiges Gebiet, und $g : G \to \mathbb{R}$ sei harmonisch, d. h. zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta g = 0$. Dann existiert eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}\, f = g$.

Beweis. Bilde mit

$$\omega = g_x \, dx + g_y \, dy = dg$$

die folgende reelle 1–Form:

$$*\omega := -g_y \, dx + g_x \, dy .$$

Da g harmonisch ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} d(*\omega) &= -(g_{yx}\,dx + g_{yy}\,dy) \wedge dx + (g_{xx}\,dx + g_{xy}\,dy) \wedge dy \\ &= (g_{xx} + g_{yy})\,dx \wedge dy = (\Delta g)\,dx \wedge dy = 0\,. \end{aligned}$$

Nach dem Poincaréschen Lemma gibt es dann auf G eine differenzierbare Funktion h mit $dh = *\omega$, d. h. $h_x = -g_y$, $h_y = g_x$. Dies bedeutet aber gerade, daß die Funktion $f := g + i\,h$ komplex differenzierbar ist mit $\mathrm{Re}\, f = g$. □

Folgerung 12.4 *Harmonische Funktionen (in zwei Veränderlichen) sind beliebig oft differenzierbar (und sogar reell analytisch).*

Weiter kann man den *Identitätssatz* und das *Maximumprinzip* für harmonische Funktionen aus den entsprechenden Aussagen für holomorphe Funktionen ableiten.

Satz 12.5 *Es sei g harmonisch auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$, und es sei $g_{|U} \equiv 0$ auf einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subset G$. Dann ist $g = 0$.*

Beweis. Es sei $V := \{\, z \in G : \text{ es existiert } U = U(z) \subset G \text{ mit } g_{|U} \equiv 0 \,\}$. Dann ist per definitionem V offen und nach Voraussetzung nicht leer, so daß es wegen des Zusammenhanges von G genügt, die relative Abgeschlossenheit von V in G zu zeigen. Sei also $z_0 \in \overline{V} \cap G$; dann existiert eine Kreisscheibe $D = D_r(z_0) \subset G$ und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D)$, so daß $g_{|D} = \mathrm{Re}\, f$. Da z_0 ein Randpunkt von V ist, gibt es auch einen Punkt $z_1 \in V \cap D$. Also verschwindet $\mathrm{Re}\, f$ in einer Umgebung von z_1, und wegen des Satzes über die Gebietstreue muß $f = \text{const.}$ nahe z_1 sein. Der Identitätssatz impliziert dann $f = \text{const.}$ auf D. Also ist schließlich auch g konstant (gleich Null) auf D und folglich $z_0 \in V$. □

Bemerkung. Für harmonische Funktionen genügt für das Verschwinden von g nicht, daß $g_{|N} = 0$ auf einer nichtdiskreten Teilmenge $N \subset G$ wie im Falle von *holomorphen* Funktionen! Als Beispiel dazu braucht man nur die Funktion $g(x,\, y) \equiv x$ zu betrachten, die selbstverständlich harmonisch und $\not\equiv 0$ ist, aber auf der nichtdiskreten Menge $N = \{\, x = 0 \,\}$ verschwindet.

Satz 12.6 *Harmonische Funktionen besitzen die Mittelwerteigenschaft und genügen daher sowohl dem Maximumprinzip als auch dem Minimumprinzip.*

Beweis. Es sei $D_r(z_0) \subset\subset G$ und $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $D_{r+\varepsilon}(z_0) \subset G$. Ferner sei $f \in \mathcal{O}(D_{r+\varepsilon})$ eine holomorphe Funktion mit $\mathrm{Re}\, f = g_{|D_{r+\varepsilon}}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} g(z_0) &= \mathrm{Re}\, f(z_0) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,e^{it})\,dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, f(z_0 + r\,e^{it})\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + r\,e^{it})\,dt\,, \end{aligned}$$

was gerade die Mittelwerteigenschaft von g ausdrückt. Besitzt nun g in z_0 ein lokales Maximum, ist also $g(z) \le g(z_0)$ für alle $|\, z - z_0\,| \le R$, so ist für alle $0 \le r \le R$:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + r\,e^{it})\,dt \le 2\pi\, \frac{1}{2\pi}\, g(z_0) = g(z_0)\,,$$

und Gleichheit kann nur gelten, wenn $g(z_0 + r\,e^{it}) = g(z_0)$ für alle t und alle $r \le R$, so daß $g_{|D_R(z_0)} = \text{const.}$ und damit nach dem Identitätssatz $g = \text{const.}$ ist. - Das Minimumprinzip für g folgt aus dem Maximumprinzip für die ebenfalls harmonische Funktion $-g$. □

Schließlich schlachten wir noch die Cauchysche Integralformel für harmonische Funktionen aus: Ist $g = \operatorname{Re} f$ für eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(D_{R+\varepsilon})$, wobei ohne Einschränkung $z_0 = 0$ gesetzt sei, so gilt mit

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad z \in D_R\,,$$

wenn man ferner $\zeta = \mathrm{Re}^{i\theta}$ und damit $\zeta\,\overline{\zeta} = R^2$, $d\zeta = R\,i\,e^{i\theta}\,d\theta = i\,\zeta\,d\theta$ setzt, daß

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,R^2}{R^2 - \overline{\zeta}\,z}\, d\theta\,.$$

Nun ist die Funktion

$$\frac{f(\zeta)}{R^2 - \zeta\,\overline{z}}$$

für festes $z \in D_R$ in $D_{R+\delta}$ bezüglich ζ holomorph. Also ist die obige Formel anwendbar, und wir erhalten mit

$$\frac{f(z)}{R^2 - |\,z\,|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)\,R^2}{(R^2 - \zeta\,\overline{z})\,(R^2 - \overline{\zeta}\,z)}\, d\theta \quad \text{mit} \quad \zeta = \mathrm{Re}^{i\theta}$$

sofort

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, \frac{R^2\,(R^2 - |\,z\,|^2)}{|\,R^2 - \overline{\zeta}\,z\,|^2}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta)\, \frac{R^2 - |\,z\,|^2}{|\,\zeta - z\,|^2}\, d\theta\,.$$

Offensichtlich ist der sogenannte *Poisson–Kern*

$$\frac{1}{2\pi}\, \frac{R^2 - |\,z\,|^2}{|\,\zeta - z\,|^2} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\,R\,r\,\cos(\theta - t) + r^2}\,, \quad \zeta = R\,e^{i\theta}\,,\ z = r\,e^{it}\,,$$

reell und (bis auf den Faktor 2π) Realteil der holomorphen Funktion

$$\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,,$$

also selbst harmonisch. Dies liefert sofort

Satz 12.7 *Sei* g *sei auf* $\overline{D}_R(0)$ *stetig und auf* $D_R(0)$ *harmonisch. Dann gilt die* Poissonsche Integralformel

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\zeta)\, \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2\,R\,r\,\cos(\theta - t) + r^2}\, d\theta\,,$$

wobei $\zeta = R\,e^{i\theta}$ *und* $z = r\,e^{it}$, $r < R$, *d. h.* $z \in D_R(0)$.

Differentiation unter dem Integralzeichen liefert dann die erste Aussage des folgenden Satzes.

Satz 12.8 *Sei* $h : \partial D_R \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion. Dann wird durch*

$$g(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\zeta)\, \mathrm{Re}\, \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\theta\,, & z \in D_R\,, \quad \zeta \in \partial D_R \\ h(z) & , \quad z \in \partial D_R \end{cases}$$

eine Funktion $g : \overline{D}_R \to \mathbb{R}$, $D_R = D_R(0)$ *erklärt mit den folgenden Eigenschaften* :

a) g *ist auf* D_R *harmonisch* ;

b) g *ist auf* $\overline{D}_R$ *stetig* ;

c) $g_{|\partial D_R} = h$.

Bemerkungen. 1. Es handelt sich bei diesem Satz um die Lösung des *Dirichlet–Problems* für Kreisscheiben bei beliebig vorgegebenen stetigen Randwerten, also um eine Randwertaufgabe einer bestimmten partiellen Differentialgleichung. Zum *Beweis* von Teil b) siehe Satz III.10.7 in Fischer–Lieb.

2. Man beachte, daß eine entsprechende Aussage für *holomorphe* Funktionen nicht gültig ist. Selbstverständlich wird z. B. durch

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\partial D$ erklärt. (Differentiation nach $\overline{z}$ und Vertauschung mit dem Integral). Ebenso direkt ergibt sich $F(0) = 0$, da der Integrand an dieser Stelle eine Stammfunktion besitzt. Für $z \neq 0$ können wir mit Partialbruch–Entwicklung arbeiten:

$$\frac{1}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{z}\left\{-\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta - z}\right\},$$

woraus wir mit Hilfe der bekannten Werte der Umlaufzahl außerhalb eines Kreisrandes das folgende Ergebnis ziehen:

$$z\,F(z) = \begin{cases} -1 + 1 = 0\,, & \text{also } F(z) = 0 \quad\text{für } |z| < 1\,,\\[1ex] -1 + 0 = -1\,, & \text{also } F(z) = -\dfrac{1}{z} \quad\text{für } |z| > 1\,.\end{cases}$$

Somit ist die Funktion F nach $\overline{D}$ stetig fortsetzbar, nimmt aber bei Annäherung an den Rand des Einheitskreises von *innen* die Randwerte 0 an, obwohl man doch wohl eher die Werte $1/z$ erwarten würde. Von *außen* werden dagegen die Randwerte $-1/z$ angenommen.

Dieses Beispiel ist *typisch* für das Randverhalten der durch ein Cauchy–*Integral* definierten Funktion

$$F(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{auf} \quad \mathbb{C}\setminus\partial D\,,$$

wobei f zunächst eine nur *stetige* Funktion auf ∂D bezeichnet[9]. Hierbei ist noch wichtig, ob die Definition von F (in einem abgeschwächten Sinne) auch noch für Punkte z auf dem *Kreisrand* ∂D sinnvoll ist. Wir definieren hierzu

$$\mathrm{Hw}_{z_0}\,F(z)$$

als den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D\setminus D_\varepsilon(z_0)}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

sofern er existiert. Hierbei steht natürlich aus naheliegenden Gründen Hw abkürzend für *Hauptwert* (Englisch: “principal value”). - Zu einem guten Ergebnis brauchen wir noch eine stärkere Voraussetzung an die Funktion f.

Definition. Eine Funktion f heißt auf einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ *gleichmäßig Hölder–stetig* vom Exponenten $\mu > 0$ (oder kurz *μ–Hölder–stetig*), wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt, so daß für alle $z, z' \in M$ gilt:

$$|\,f(z) - f(z')\,| \le K\,|\,z - z'\,|^{\mu}\,.$$

Bemerkungen. 1. Ist M *kompakt*, so braucht diese Bedingung nur lokal, d. h. für alle $z, z' \in M$ mit $|\,z - z'\,| \le \delta$ für festes $\delta > 0$ erfüllt zu sein. Dann impliziert *μ–Hölder–Stetigkeit* auch die *μ'–Hölder–Stetigkeit* für alle $0 < \mu' < \mu$.

2. Stetig differenzierbare Funktionen sind Hölder–stetig vom Exponenten 1.

In unserem Kontext gilt nun der folgende Satz von Plemelj.

[9] Allgemeiner sind die im folgenden dargestellten Aussagen mutatis mutandis auch richtig für *einfach zusammenhängende* Gebiete G mit *beliebig oft differenzierbarer* positiv orientierter Randkurve ∂G.

Satz 12.9 *Es sei* $0 < \mu < 1$, *und* f *sei* μ*–Hölder–stetig auf* ∂D. *Dann ist die Funktion*

$$\partial D \ni z \longmapsto \mathrm{Hw}_z F(z)$$

ebenfalls μ*–Hölder–stetig. Die Funktionen* $F|_D$ *bzw.* $F|_{\mathbb{C}\setminus\overline{D}}$ *sind zu stetigen Funktionen* F^+ *bzw.* F^- *nach* $\overline{D}$ *bzw.* $\mathbb{C}\setminus D$ *fortsetzbar, und für* $z \in \partial D$ *gelten die folgenden Beziehungen :*

$$F^+(z) + F^-(z) = 2\,\mathrm{HW}_z F(z)\,, \quad F^+(z) - F^-(z) = f(z)\,.$$

Zum *Beweis* siehe z. B. Fischer - Lieb [23], §12* . □

Wir wollen uns noch davon überzeugen, daß dieser Satz zu unserem Beispiel am Anfang dieses Abschnitts nicht im Widerspruch steht. Hier ist $f(z) = 1/z$, $F^+(z) = 0$, $F^-(z) = -f(z)$, und man kann den Hauptwert von F an einer Stelle $z \in \partial D$ mit den Methoden aus dem Kapitel 11 bestimmen (oder direkt ausrechnen). Die Funktion

$$\zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta(\zeta - z)}$$

besitzt für $z \in \partial D$ Polstellen erster Ordnung in z und dem Ursprung 0 mit den Residuen

$$\mathrm{Res}_z := \lim_{\zeta \to z} \frac{\zeta - z}{\zeta(\zeta - z)} = \frac{1}{z} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{Res}_0 := \lim_{\zeta \to 0} \frac{\zeta}{\zeta(\zeta - z)} = -\frac{1}{z}\,,$$

und damit folgt

$$\mathrm{HW}_z F(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Res}_z + \mathrm{Res}_0 = -\frac{1}{2z}$$

in perfekter Übereinstimmung mit Satz 9.

Aufgaben

1. Welche Teilmengen von $\mathbb{C}$ werden durch

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| < 1 \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right| < 1 \,, \quad z_0 \text{ fest mit } |\, z_0 \,| < 1$$

beschrieben?

2. Man zeige: $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ liegen genau dann auf einer (reellen) Geraden, wenn

$$z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_3} + z_3 \overline{z_1}$$

reell ist.

3. Man zeige, daß für $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, die Punktmenge

$$M := \{ z \in \mathbb{C} : a z \overline{z} + b z + \overline{b z} + c = 0 \}$$

eine Kreislinie ist oder eine Gerade, falls

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ \overline{b} & c \end{pmatrix} < 0$$

gilt. Wie sieht M aus, wenn diese Determinante gleich 0 oder positiv ist?

4. Man stelle die folgenden Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar und berechne ihre Argumente und Beträge:

a) $$\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^3 ,$$

b) $$\frac{1}{(3 - i)^2} ,$$

c) $$\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3} .$$

5. Für welche z existieren die folgenden Limites?

a) $$\lim_{j \to \infty} z^j ,$$

b) $$\lim_{j \to \infty} j! z^j ,$$

c) $$\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} z^j .$$

6. Die folgenden Funktionen sind (bei festem z_0) stetig in $\mathbb{C} \setminus \{ z_0 \}$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \{ 0, z_0 \}$. (Warum?) Lassen sie sich auch in z_0 so definieren, daß sie dort stetig sind?

$$\text{i)} \quad f(z) = \frac{z}{|\, z \,|} \,, \quad z_0 = 0 \,, \qquad \text{ii)} \quad f(z) = \frac{z^4 - z_0^4}{z - z_0} \,,$$

$$\text{iii)} \quad f(z) = \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2} \right) , \quad z_0 \neq 0 \,.$$

7. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Bereich. Man konstruiere eine abzählbare Punktmenge $M \subset G$ mit $\overline{M} \cap G = M$ und $\overline{M} = M \cup \partial G$.

8. Wo sind die folgenden Funktionen reell differenzierbar, wo komplex differenzierbar, wo holomorph?

$$\text{i)} \quad f(z) = |z|^2 , \qquad \text{ii)} \quad f(z) = z^2 \cdot \overline{z} ,$$
$$\text{iii)} \quad f(z) = \operatorname{Re} z , \qquad \text{iv)} \quad f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \quad , \quad z = x + i\,y .$$

9. Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, $U \subset \mathbb{C}$ offen, und $f = g + i\,h$ sei die Zerlegung von f in Real– und Imaginärteil. Setze

$$J_f^{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} f_z & f_{\overline{z}} \\ \overline{f}_z & \overline{f}_{\overline{z}} \end{pmatrix} , \quad J_f^{\mathbb{R}} := \begin{pmatrix} g_x & g_y \\ h_x & h_y \end{pmatrix}$$

(komplexe bzw. reelle Funktionalmatrix). Man zeige:

$$\det J_f^{\mathbb{C}} = \det J_f^{\mathbb{R}}$$

und folgere: Ist f auf U holomorph, f' stetig und $f'(z_0) \neq 0$, so ist f lokal um $f(z_0)$ umkehrbar, und f^{-1} ist in einer Umgebung von $f(z_0)$ holomorph.

10. Man zeige mittels der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen: Ist f holomorph auf dem Gebiet G und gilt eine der folgenden Bedingungen:

$$\text{i) } \operatorname{Re} f = \text{const.} , \quad \text{ii) } \operatorname{Im} f = \text{const.} , \quad \text{iii) } |f| = \text{const.} ,$$

so ist f konstant.

11. Man zeige: Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

bildet sowohl $G_1 = D \setminus \{0\}$ als auch $G_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ umkehrbar holomorph auf das „Schlitzgebiet"

$$\mathbb{C} \setminus \{ z = x + i\,y \in \mathbb{C} : |x| \leq 1 ,\ y = 0 \}$$

ab. Hierbei bezeichnet D den offenen Einheitskreis $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$. Man zeichne die Niveaulinien $\operatorname{Re} f = \text{const.}$, $\operatorname{Im} f = \text{const.}$.

12. Man zeige für eine zweimal stetig differenzierbare komplexwertige Funktion die Identität

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) .$$

Man folgere hieraus: Ist f komplex differenzierbar (und zweimal reell differenzierbar) auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$, so sind $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ reelle harmonische Funktionen. Man wende außerdem diese Aussage auf die Frage an, unter welchen Bedingungen an $a, b, c \in \mathbb{R}$ das reelle Polynom $a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2$ Realteil eines komplexen Polynoms ist.

13. Man betrachte die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ mit

$$f_n(z) = \frac{z^{2^n}}{\prod_{j=0}^{n} (1 + z^{2^j})} .$$

Man berechne den Grenzwert der Reihe für $|z| \neq 1$ und zeige die kompakte Konvergenz in $\{|z| < 1\}$ bzw. $\{|z| > 1\}$.

14. Für die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ existiere der Grenzwert

$$R = \lim_{j \to \infty} \left| \frac{a_j}{a_{j+1}} \right|$$

in $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Man zeige, daß dann R der Konvergenzradius der Potenzreihe ist.

15. a) Man bestimme alle $z \in \mathbb{C}$ mit

$$e^z = i\,, \quad e^z = 1 + i\sqrt{3}\,, \quad \sin z = 2\,, \quad \cos^2 z = -1\,.$$

b) Man betrachte $w = \sin z$ als Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und bestimme die Bilder der Parallelen zu den Achsen.

16. Man bestimme alle möglichen Werte von i^i, 2^{-i}, $(-1)^{\sqrt{i}}$.

17. a) Man beweise die Relation

$$4 \sin^3 z - 3 \sin z + \sin 3z = 0\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

b) Man löse unter Verwendung von Teil a) die allgemeine Gleichung dritten Grades

$$w^3 + a\,w^2 + b\,w + c = 0\,.$$

18. Man zeige, daß die Funktion $f(z) := \operatorname{Re} z$ in $\mathbb{C}$ keine Stammfunktion besitzt.

19. Es sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,,\ t \mapsto a \exp(it) + b \exp(-it)\,,\ a > b > 0$. Man bestimme Anfangs– und Endpunkt sowie die Spur von γ und berechne

$$\int_\gamma z\, dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma z^2\, dz\,.$$

Ferner berechne man

$$\int_\gamma \operatorname{Im} z\, dz$$

für $\gamma := [a, b]\,,\ a, b \in \mathbb{C}$, bzw. den positiv orientierten Kreisrand $\gamma := \partial D_r(z_0)$.

20. Man beweise: Besitzt die stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ lokale Stammfunktionen, so gilt für jedes in G gelegene abgeschlossene Dreieck Δ:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0\,.$$

21. Es sei U in $\mathbb{C}$ offen, L sei eine Gerade, und f sei auf U stetig und auf $U \setminus L$ holomorph. Man zeige, daß $f \in \mathcal{O}(U)$.

22. Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformeln berechne man folgende Integrale:

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z+1)(z-1)^3} \quad \text{und} \quad \int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1} \right)^n dz\,.$$

23. Es sei ∂D der positiv orientierte Rand des Einheitskreises D um den Nullpunkt. Die Funktion f sei holomorph in einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{D}$. Dann stellt

$$g(z) := \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

eine auf $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ holomorphe Funktion dar (Beweis!). Man bestimme g.

Man setze weiter

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta(\zeta - z)}$$

und zeige, daß F in $\mathbb{C} \setminus \partial D$ holomorph ist. Man bestimme F im Inneren und Äußeren des Einheitskreises.

24. Welche der folgenden Funktionen sind in den Nullpunkt hinein holomorph fortsetzbar?

$$\text{a)} \quad z \cot z\,, \qquad \text{b)} \quad \frac{z}{e^z - 1}\,, \qquad \text{c)} \quad z^2 \sin \frac{1}{z}\,.$$

25. Man bestimme die Nullstellen und die entsprechenden Ordnungen der Funktionen $\sin z$, $\sin^2 z$, $\sin z^2$, $\tan z$, $\sinh z$, $\tanh z$.

26. Es seien f und g holomorphe Funktionen auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, so daß auch $\overline{f} g$ holomorph ist. Man zeige, daß dann f konstant oder g identisch 0 ist.

27. Es sei $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ eine ganze Funktion, zu der positive Konstanten M, N, R und $n \in \mathbb{N}$ existieren mit

$$M\,|z|^n \le |f(z)| \le N\,|z|^n \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| \ge R\,.$$

Man zeige, daß f ein Polynom vom Grad n ist.

28. Es seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}^*$. Man zeige:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_1^n + \cdots + a_k^n|} = \max_{j=1,\ldots,k} |a_j|\,.$$

(Hinweis: Setze $s_j = a_j^{-1}$ und entwickle die Funktion

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{s_j}{s_j - z}$$

um Null in die Taylorreihe).

29. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Man zeige:

a) Ist $f \in \mathcal{O}(G)$, so strebt f bei Annäherung an den Rand von G nicht gleichmäßig gegen ∞.

b) Sind die Funktionen f_j, $j \in \mathbb{N}$, stetig auf $\overline{G}$ und holomorph auf G, und ist die Folge der f_j gleichmäßig konvergent auf ∂G, so auch auf $\overline{G}$; insbesondere ist die Grenzfunktion $f := \lim_{j \to \infty} f_j$ in $\mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}^0(\overline{G})$.

30. Man berechne die Laurent–Reihen der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten:

a) $\dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ für $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, und $|z| > 2$;

b) $\left(\dfrac{z-z_0}{z-a}\right)^2$ für $|z-z_0| > |a-z_0|$;

c) $\dfrac{1}{z\,(z-3)^2}$ für $1 < |z-1| < 2$;

d) $\dfrac{e^z}{z\,(z-1)}$ für $|z| > 1$.

31. Für die folgenden Funktionen f und Punkte z_0 bestimme man die Art der Singularität von f in z_0. Bei hebbaren Singularitäten bestimme man den Grenzwert von f, für Pole gebe man den Hauptteil an.

a) $\dfrac{z^3+3z+2i}{z^2+1}$ in $z_0 = -i$; b) $\dfrac{1}{1-e^z}$ in $z_0 = 0$;

c) $\dfrac{\cos z - 1}{z^4}$ in $z_0 = 0$; d) $\cos(1/z)$ in $z_0 = 0$;

e) $\tan z$ in $z_0 = \pi/2$; f) $\sin(\pi/(z^2+1))$ in $z_0 = i$.

32. Man bestimme die Residuen der folgenden Funktionen an der Stelle $z_0 = 0$:

$$z \cdot e^{1/z}\,, \qquad \frac{1}{\sin \pi z}\,, \qquad \frac{1-\cos z}{z^3}\,,$$

$$\frac{z^{n-1}}{\sin^n z}\,, \qquad \frac{\sin 2z - 2\sin z}{\sin z\,(\sin z - z)}\,, \qquad \frac{\tan z - z}{(1-\cos z)^2}\,.$$

33. Man bestimme (nach Möglichkeit durch eine einzige Rechnung) die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+x^2+1} \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^4-x^2+1}\,.$$

34. Man berechne die Integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\,dt}{1-2a\cos t+a^2} \qquad \text{für} \qquad a \in \mathbb{R}\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 2t\,dt}{1-2a\cos t+a^2} \qquad \text{für} \qquad |a| < 1\,.$$

35. Man berechne das Integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\alpha}\,d\theta\,, \quad \alpha \in (0, \pi)\,.$$

(Hinweis: Man ergänze das gegebene reelle Integral geschickt zu einem komplexen Integral, so daß komplizierte trigonometrische Formeln vermieden werden).

36. Man finde alle möglichen Werte der Integrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}\,,$$

wobei γ die Menge aller geschlossenen Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{ i, -i \}$ durchläuft.

37. Man beweise den WEIERSTRASSschen *Approximationssatz* mit Hilfe der Theorie harmonischer und holomorpher Funktionen. (*Hinweis*: Aufgabe 11 in Paragraph 10* von FISCHER - LIEB).

38. Man zeige: Die Funktion $\log |z|$ ist harmonisch auf $\{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1 \}$. Ist sie dort Realteil einer holomorphen Funktion?

39. Es sei f holomorph. Man zeige: Die Funktion $\log |f|$ ist außerhalb der Nullstellen von f harmonisch.

40. Es sei f in $D \setminus \{ 0 \}$ harmonisch und beschränkt. Man folgere, daß f nach 0 harmonisch fortsetzbar ist.

Hinweis: f darf als stetig auf $\overline{D} \setminus \{ 0 \}$ angenommen werden. Man löse das Dirichlet–Problem in D mit Randwerten $f_{|\partial D}$ durch eine Funktion g und zeige, daß $f = g$ ist. Betrachte dazu für $\varepsilon > 0$:

$$h_\varepsilon := g - f + \varepsilon \log |z|$$

und wende das Maximum–Prinzip auf h_ε an. Daraus folgere man $g - f \leq 0$ und analog $g - f \geq 0$.

41. Man zeige für den Poisson–Kern:

$$\frac{R - r}{R + r} \leq 2\pi \, P_R(\zeta, z) := \frac{R^2 - r^2}{|\zeta - z|^2} \leq \frac{R + r}{R - r} ,$$

wobei ζ, z komplexe Zahlen mit $|z| = r < R = |\zeta|$ sind. Hieraus folgere man: Ist f eine harmonische Funktion auf $D_R(0)$ mit $f \geq 0$, so gilt für alle z mit $|z| = r < R$:

$$\frac{R - r}{R + r} f(0) \leq f(z) \leq \frac{R + r}{R - r} f(0) .$$

42. Es sei $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ eine monotone Folge harmonischer Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Es gebe einen Punkt $z_0 \in G$ und eine positive reelle Konstante M mit $f_j(z_0) \leq M$ für alle j. Man zeige: Es existiert

$$f(z) = \lim_{j \to \infty} f_j(z)$$

für jeden Punkt $z \in G$, und die Grenzfunktion f ist harmonisch auf G. (*Hinweis*: Aufgabe 41).