

Differentialgeometrie II

Manuskript der Vorlesung

Sommersemester 2001

Oswald Riemenschneider

Hamburg, 2002

Stand: 26. 8. 2002

Adresse des Autors:

Professor Dr. Oswald Riemenschneider
Mathematisches Seminar
Schwerpunkt Analysis und Differentialgeometrie
Bundesstraße 55
D-20149 HAMBURG
e-mail: riemenschneider@math.uni-hamburg.de

Diese Prosa ist nicht als ein Versuch zu werten, irgendwelche Geschichten zu erzählen, sondern als ein notwendiger Versuch, mit sich selbst etwas auszufechten, oder, wie ich vielleicht besser, nachträglich, sage, einen Kampf zu führen, der nur dann einen Sinn haben kann, wenn man ihn verlor.

(Friedrich Dürrenmatt: Nachwort zum Sammelband *Die Stadt*, Zürich 1952).

Vorwort

Es handelt sich bei dem vorliegenden Text um eine mit Ergänzungen versehene Ausarbeitung des zweiten Teils meines zweisemestrigen Kurses über *Differentialgeometrie*, den ich in ähnlicher Form schon vom Wintersemester 1995 bis Sommersemester 1996 im Anschluß an meine Lehrveranstaltung *Mathematik für Physiker I bis IV* angeboten hatte. Meiner nachlassenden Spannkraft Tribut zollend, bin ich diesmal allerdings etwas langsamer vorangekommen und konnte deshalb einige Kapitel aus dem früheren Durchlauf nicht mehr präsentieren; sie wurden in das Manuskript als Kapitel 13 bis 15 eingefügt.

Als Voraussetzungen sollten die Teilnehmer/innen (und damit auch die Leserin und der Leser dieser Seiten) mathematische Grundlagen im Umfang der Anfängervorlesungen *Analysis I bis III* und *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I, II* mitbringen. Unter dieser Annahme müßte das hier präsentierte Material auch ohne Kenntnis des ersten Teiles meines Kurses zu verstehen sein; allerdings diente meine Vorlesung *Differentialgeometrie I* (auch) dazu, am konkreten Beispiel von Kurven und Hyperflächen im euklidischen Raum \mathbb{E}^n einige zentrale Begriffe der Differentialgeometrie, wie z. B. den der *Krümmung* von Riemannschen Mannigfaltigkeiten, unter Einbeziehung von zahlreichen Abbildungen anschaulich faßbar einzuführen. Ich bedauere, daß ich aus Zeitgründen bisher nicht dazu gekommen bin, eine Ausarbeitung des ersten Teiles der Vorlesung vorzulegen. Ohne Kenntnis dieses Materials wird der hier dargebotene Stoff auf jeden Fall äußerst abstrakt anmuten; der große Grad von Abstraktion spiegelt sich insbesondere wider im weitestgehenden Fehlen von Illustrationen. Dennoch sollte dies alles für erfahrene Studierende der Mathematik und/oder Physik kein echtes Hindernis zu einer erfolgreichen Rezeption sein, zumal sie sich z. B. mit den Büchern [4] und [15] (siehe die Literaturliste auf den Seiten iii und iv) im Prinzip die erforderlichen Grundkenntnisse auch anderweitig aneignen können.

Die Auswahl des Stoffes für das vorliegende Manuskript ist selbstverständlich nicht kanonisch - der eine oder andere Leser wird in einigen Teilen der Vorlesung sogar keine *echte* Differentialgeometrie erkennen (und würde darin auch meine Zustimmung finden). Ein besserer Titel wäre vielleicht *Analysis und Tensoralkül auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*. Die einzige Rechtfertigung für den Inhalt der vorliegenden Noten ist, neben meiner nur „selektiven“ Kompetenz auf diesem Gebiet, der mir anvertraute inhomogene Zuhörerkreis von (wenigen) Mathematikern und (vorwiegend) Physikern, weshalb ich mich im Zweifelsfalle für die Studierenden der (*Mathematischen*) *Physik*, genauer: für deren Bedürfnisse entschieden habe. Es sei dem Leser überlassen zu entscheiden, ob ich dieser Intention mit dem vorliegenden Text gerecht werde.

Ich danke meinen Hörern¹ für ihre konstruktive Kritik an Vorlesung und Text und das sorgfältige „Korrekturlesen“, wodurch sinnentstellende Druckfehler und die gravierendsten Unstimmigkeiten (oder sagen wir präziser und ehrlicher: die größten Schnitzer) eliminiert werden konnten. Die verbleibenden Unzulänglichkeiten gehen ausnahmslos auf mein eigenes Konto.

Hamburg, den 20. 02. 2002

Oswald Riemenschneider

¹Es waren nur selten Hörerinnen zugegen - dies mag erklären, warum ich zumeist die männliche Form der Anrede benutze, auch wenn ich mir für die vorliegende Ausarbeitung gern viele Leserinnen wünschen würde.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
Inhaltsverzeichnis	ii
Literatur	iii
0 Topologie, topologische Mannigfaltigkeiten	1
1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten	5
2 Differenzierbare Abbildungen	7
3 Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen	11
4 Das Tangentialbündel	14
5 Vektorraum- und Faserbündel	19
Anhang: Überlagerungstheorie	26
6 Schnitte in Bündeln und algebraische Konstruktion von Vektorraumbündeln	31
Anhang: Derivationen und das Lemma von Hadamard	41
7 Das Tensorprodukt von Vektorräumen und Vektorbündeln	43
8 Untervektorraumbündel, Quotientenbündel und exakte Sequenzen	54
9 Symmetrische und alternierende Tensoren und der Differentialformenkalkül	62
10 Riemannsche, symplektische und Kähler - Mannigfaltigkeiten	75
Anhang 1: Analytische Mechanik	95
Anhang 2: Pseudometriken	102
11 Zusammenhänge auf Vektorraumbündeln und Parallelismus	103
12 Der Levi - Cività Zusammenhang und der Riemannsche Krümmungstensor	108
Anhang 1: Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung	114
Anhang 2: Bemerkungen zur Gravitationstheorie von Einstein	116
13 Liegruppen und Liealgebren	118
Anhang: Klassifikation von einfachen Liealgebren	127
14 Operationen von Liegruppen auf Mannigfaltigkeiten	129
Anhang: Gruppenaktionen	133
15 Homogene Räume	138
Index	143

Literatur

- [1] Arnold, V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1978.
- [2] Aubin, T.: *A Course in Differential Geometry*. AMS: Providence, R. I. 2000.
- [3] Bao, D., Chern, S. S., Shen, Z.: *An Introduction to Riemann–Finsler Geometry*. Springer: New York u. a. 1999.
- [4] Bär, Chr.: *Elementare Differentialgeometrie*. de Gruyter: Berlin–New York 2000.
- [5] Berndt, R.: *Einführung in die Symplektische Geometrie*. Vieweg: Braunschweig–Wiesbaden 1998.
- [6] Besse, A. L.: *Einstein manifolds*. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, vol. 10*. Springer: Berlin u. a. 1987.
- [7] Bishop, R. L., Goldberg, S. I.: *Tensor Analysis on Manifolds*. MacMillan: New York 1968.
- [8] Blaschke, W.: *Vorlesungen über Differentialgeometrie. 3. Auflage*. Springer: Berlin 1929. Nachdruck: Dover: New York 1945.
- [9] Brieskorn, E., Knörrer, H.: *Ebene algebraische Kurven*. Birkhäuser: Basel–Boston–Stuttgart 1981.
- [10] Bröcker, Th., Jänich, K.: *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [11] Chavel, I.: *Riemannian Geometry: A Modern Introduction*. Reprint. Cambridge University Press: Cambridge 1996.
- [12] Chern, S. S.: *Topics in Differential Geometry*. Princeton University Press: Princeton 1951.
- [13] Chern, S. S., Chen, W. H., Lam, K. S.: *Lectures on Differential Geometry. Series on University Mathematics - Vol. 1*. Reprinted. World Scientific: Singapore–New Jersey–London–Hong Kong 2000.
- [14] Dieudonné, J.: *Grundzüge der modernen Analysis. Bände 1 ff*. Vieweg: Braunschweig 1986 ff.
- [15] Do Carmo, M. P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Vieweg: Braunschweig–Wiesbaden 1983.
- [16] Do Carmo, M. P.: *Riemannian Geometry*. Birkhäuser: Boston–Basel–Berlin 1992.
- [17] Gray, A.: *Differentialgeometrie. Klassische Theorie in moderner Darstellung*. Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg–Berlin–Oxford 1994.
- [18] Gallot, S., Hulin, D., Lafontaine, J. : *Riemannian Geometry*. Springer: New York 1987.
- [19] Gromov, M.: *Metric Structures for Riemannian and Non–Riemannian Spaces*. Birkhäuser: Basel u. a. 1999.
- [20] Guillemin, V., Sternberg, S.: *Symplectic techniques in physics*. Reprint. Cambridge University Press: Cambridge 1996.
- [21] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R.: *The large scale structure of space–time*. Cambridge University Press: Cambridge etc. 1973.
- [22] Helgason, S.: *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Academic Press: New York etc. 1978.

- [23] Jänich, K.: Vektoranalysis. Springer: Berlin–Heidelberg–New York etc. 1992.
- [24] Jost, J.: Riemannian Geometry and Geometric Analysis. 2d edition. Universitext. Springer: Berlin u. a. 1998.
- [25] Jost, J.: Differentialgeometrie und Minimalflächen. Springer Lehrbuch. Springer: Berlin u. a. 1994.
- [26] Klingenberg, W.: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1973.
- [27] Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of Differential Geometry. 2 Volumes. Interscience: New York 1963 and 1969.
- [28] Lang, S.: Introduction to Differentiable Manifolds. Wiley: New York 1962.
- [29] Laugwitz, D.: Differential–Geometrie. Teubner: Stuttgart 1960.
- [30] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A.: Gravitation. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.
- [31] Petersen, P.: Riemannian Geometry. Graduate Texts in Mathematics, vol. 171. Springer: New York u. a. 1998.
- [32] von Querenburg, B.: Mengentheoretische Topologie. Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1976.
- [33] de Rham, G.: Variétés différentiables. Hermann: Paris 1955.
- [34] Sachs, R. K., Wu, H.: General Relativity for Mathematicians. Springer: New York–Heidelberg–Berlin 1977.
- [35] Sakai, T.: Riemannian Geometry. Translations of Math. Monographs, vol. 149. American Mathematical Society: Providence 1995.
- [36] Schottenloher, M.: Geometrie und Symmetrie in der Physik. vieweg Lehrbuch, Mathematische Physik. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig/Wiesbaden 1995.
- [37] Spivak, M.: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. 5 volumes. Publish or Perish: Berkeley 1970 etc.
- [38] Spivak, M.: Calculus on Manifolds. Benjamin: New York–Amsterdam 1965.
- [39] Stephani, H.: Allgemeine Relativitätstheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften: Berlin 1980.
- [40] Sternberg, S.: Lectures on Differential Geometry. Prentice–Hall: Englewood Cliffs 1964.
- [41] Stöcker, R., Zieschang, H.: Algebraische Topologie. Teubner: Stuttgart 1988.
- [42] Thirring, W.: Lehrbuch der Mathematischen Physik. Teil 1: Klassische Dynamische Systeme. Springer: Wien–New York 1977.
- [43] Warner, F. W.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups. Springer: New York–Berlin–Heidelberg 1983.

0 Topologie, topologische Mannigfaltigkeiten

Das Ziel dieses vorbereitenden Kapitels ist es, einige allgemeine topologische Aussagen zusammenzustellen. Als begleitende Literatur hierzu kommen insbesondere die bekannten Bücher von BODO VON QUERENBURG [32], BRÖCKER - JÄNICH [10], DIEUDONNÉ [14] etc. in Frage.

Im folgenden bezeichnet $X = (X, \mathfrak{T})$ stets einen *topologischen Raum* mit dem System \mathfrak{T} der *offenen* Mengen auf X . Hierbei ist die *Topologie* \mathfrak{T} eine Teilmenge der *Potenzmenge* von X , also eine Menge von Teilmengen von X , so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

0. $X, \emptyset \in \mathfrak{T}$;
1. ist $U_\iota \in \mathfrak{T}$ für alle ι in einer *beliebigen* Indexmenge I , so ist die *Vereinigungsmenge* $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota \in \mathfrak{T}$;
2. ist $U_j \in \mathfrak{T}$ für alle j in einer *endlichen* Indexmenge J , so ist auch der *Durchschnitt* der U_j in \mathfrak{T} enthalten.

Ist $Y \subset X$ eine Teilmenge eines topologischen Raumes X , so „erbt“ Y offensichtlich eine Topologie von X , indem man als offene Mengen von Y die Durchschnitte von Y mit offenen Mengen von X erklärt. Man bezeichnet diese Topologie auch als die (von X auf Y induzierte) *Relativtopologie* und nennt Y einen *topologischen Unterraum* von X .

Wir setzen grundsätzlich voraus (wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird), daß die untersuchten topologischen Räume die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

1. X ist *hausdorffsch*, d. h. X erfüllt das Trennungsaxiom T_2 : Zu je zwei verschiedenen Punkten $x_1, x_2 \in X$ gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
2. X erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*: es existiert eine abzählbare Teilmenge $\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}$, s. d. für alle $U \in \mathfrak{T}$ gilt:

$$U = \bigcup_{\substack{U_0 \in \mathfrak{T}_0 \\ U_0 \subset U}} U_0 .$$

Standardbeispiele topologischer Räume sind der reelle Vektorraum \mathbb{R}^n mit der üblichen, von der *euklidischen Metrik* herrührenden Topologie, und Teilmengen von \mathbb{R}^n mit der Relativtopologie. Hierbei ist eine Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, wenn es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Kugel $B_r(x)$ mit Mittelpunkt x und Radius r gibt, die ganz in U enthalten ist. Ein abzählbares System \mathfrak{T}_0 für \mathbb{R}^n wird gegeben durch alle Kugeln $B_r(x)$ mit *rationalen* Radien r und Mittelpunkten x mit *rationalen* Koordinaten x_1, \dots, x_n .

Definition. Ein topologischer Raum X heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit*, wenn er *lokal euklidisch* ist, d. h. wenn es für alle $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x)$ und einen Homöomorphismus

$$\psi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n, n = n(x)$, gibt. Das Tripel (U, ψ, V) heißt dann eine (n -dimensionale) *Karte* auf (oder für) X .

Bemerkung. Ich schreibe meist φ für den Umkehrhomöomorphismus $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U$ und die Karte (U, ψ, V) auch als (V, φ, U) (und nenne φ dann eine *Parametrisierung* von U).

Satz 0.1 *Es seien $(U_j, \psi_j, V_j), V_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, zwei Karten auf X mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann ist $n_1 = n_2$.*

Beweis. Die induzierte Abbildung

$$\mathbb{R}^{n_1} \supset V_{21} := \psi_1(U_2 \cap U_1) \xrightarrow{\psi_2 \circ \psi_1^{-1}} \psi_2(U_1 \cap U_2) =: V_{12} \subset \mathbb{R}^{n_2}$$

ist ein Homöomorphismus. Der *Satz von der Erhaltung der Dimension* unter Homöomorphismen impliziert dann $n_1 = n_2$. Der Beweis dieses Satzes ist allerdings schwer; eine Skizze haben wir im vorigen Semester mit Hilfe von *relativer Homologietheorie* geliefert. (Im *differenzierbaren* Fall, der uns in diesem Text vorwiegend beschäftigen wird, ist die Aussage aufgrund der *Kettenregel* völlig banal). \square

Folgerung 0.2 Die Funktion $x \mapsto n(x)$ ist eindeutig bestimmt.

Definition. $n(x)$ heißt die *Dimension* von X in x , in Zeichen: $\dim_x X = n(x)$.

Aufgrund der lokalen Struktur topologischer Mannigfaltigkeiten besitzen ihre Punkte (beliebig kleine) offene Umgebungen, die homöomorph zu offenen Kugeln im euklidischen Raum sind. Insbesondere ergibt sich hieraus:

Folgerung 0.3 *Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal wegweise zusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend.*

Bemerkung. Die zweite Aussage bedeutet: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine Umgebung U , in der sich jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammenziehen läßt. Topologische Räume mit diesen beiden Eigenschaften besitzen eine gute *Überlagerungstheorie* (siehe z. B. das Buch von STÖCKER und ZIESCHANG [41] über *Algebraische Topologie*).

Jeder topologische Raum „zerfällt“ in seine *Wegzusammenhangskomponenten*

$$Z = Z(x_0) := \{x \in X : x \text{ läßt sich mit } x_0 \text{ durch einen stetigen Weg verbinden}\}.$$

Aufgrund des lokalen wegweisen Zusammenhangs sind solche Komponenten von topologischen Mannigfaltigkeiten *offene* Mengen, deren Komplement ebenfalls offen ist. Da sie selbst wegzusammenhängend und damit *zusammenhängend* im topologischen Sinne sind (d. h. nicht disjunkt zerlegbar in mehrere nichtleere offene Mengen), kann man sie im vorliegenden Fall einfach als *Zusammenhangskomponenten* bezeichnen. – Klar ist aufgrund der ersten Folgerung:

Lemma 0.4 Die Dimensionsfunktion $x \mapsto n(x)$ ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von X . Insbesondere sind Zusammenhangskomponenten topologischer Mannigfaltigkeiten rein-dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung. Wir werden i. a. nur rein-dimensionale Mannigfaltigkeiten betrachten, aber nicht notwendig nur zusammenhängende.

Die lokal euklidische Struktur einer topologischen Mannigfaltigkeit impliziert aber noch wesentlich mehr.

Lemma 0.5 *Topologische Mannigfaltigkeiten sind lokal kompakt. (D. h.: jeder Punkt besitzt, sogar beliebig kleine, kompakte Umgebungen).*

Diese Eigenschaft kann man noch weiter ausbeuten. Lokal kompakte T_2 -Räume (nicht notwendig mit 2. Abzählbarkeits-Axiom) besitzen eine sogenannte *Einpunkt-Kompaktifizierung* $X' = X \cup \{\infty\}$. Es gilt der folgende

Satz 0.6 Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- X erfüllt das zweite Abzählbarkeits-Axiom ;
- die Kompaktifizierung $X' = X \cup \{\infty\}$ von X ist metrisierbar ;
- X ist metrisierbar und abzählbar im Unendlichen, d. h. $X = \bigcup_{j=0}^{\infty} K_j$ mit kompakten Mengen K_j , so daß $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$.

Folgerung 0.7 *Topologische Mannigfaltigkeiten X sind metrisierbar und abzählbar im Unendlichen. Insbesondere gilt: Topologische Mannigfaltigkeiten sind parakompakt; d. h. zu jeder offenen Überdeckung von X gibt es eine lokal endliche Verfeinerung und eine untergeordnete stetige Teilung der Eins.²*

Parakompakte Räume sind erst recht (*vollständig*) *regulär*: zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jeden Punkt $x_0 \in X \setminus A$ existiert eine stetige Funktion $f \in \mathcal{C}(X)$, s. d. $f(x_0) = 1$ und $f|_A \equiv 0$. In diesem Zusammenhang ist noch das folgende Ergebnis interessant.

Satz 0.8 (Urysohn) *Äquivalent sind:*

- a) X ist regulär und erfüllt das 2. Abzählbarkeits-Axiom;
- b) X besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge und ist metrisierbar.

Folgerung 0.9 *Topologische Mannigfaltigkeiten besitzen höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten.*

Wir kommen jetzt noch zu einem zentralen Begriff der Theorie der Mannigfaltigkeiten.

Definition. Ein Atlas \mathfrak{A} auf der topologischen Mannigfaltigkeit X ist ein System von Karten $\{(U_j, \psi_j, V_j)\}_{j \in I}$ mit

$$X = \bigcup_{j \in I} U_j.$$

Wir nennen den Atlas *abzählbar*, wenn die Indexmenge I (höchstens) abzählbar ist. Er heißt *hinreichend groß*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine Karte $(U_j, \psi_j, V_j) \in \mathfrak{A}$ gibt mit $x \in U_j \subset U$.

Aus dem zweiten Abzählbarkeits-Axiom folgt unmittelbar:

Lemma 0.10 *Jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt hinreichend große abzählbare Atlanten.*

Man kann eine topologische Mannigfaltigkeit wieder aus einem ihrer Atlasse durch „Zusammenkleben“ oder „Verheften“ von Karten rekonstruieren. Dies soll im folgenden näher erläutert werden.

Es sei also der Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_j, \psi_j, V_j) = (V_j, \varphi_j, U_j)\}_{j \in I}$ vorgegeben. Wir schreiben dann für zwei Indizes j, k :

$$V_{kj} := \psi_j(U_j \cap U_k).$$

Man achte hier auf die *Reihenfolge* der Indizes, die im folgenden noch sehr wichtig wird. Man kann sich die Reihenfolge dadurch merken, daß der zweite Index den Parameterbereich angibt, in dem V_{kj} liegt:

$$V_{kj} \subset V_j.$$

Entsprechend schreiben wir $U_{kj} = U_k \cap U_j$, wenn wir diesen Durchschnitt als Teilmenge von U_j ansehen wollen. Wegen $U_{jj} = U_j$ soll auch immer $V_{jj} := V_j$ sein. Wir haben dann Homöomorphismen

$$\varphi_{kj} := \varphi_k^{-1} \circ \varphi_j = \psi_k \circ \psi_j^{-1} : V_{kj} \longrightarrow V_{jk},$$

für die die folgenden Regeln gelten:

1. $\varphi_{jj} = \text{id}_{V_j}$;
2. $\varphi_{jk} = \varphi_{kj}^{-1}$;
3. $\varphi_{lk} \circ \varphi_{kj} = \varphi_{lj}$.

²Eine genaue Formulierung im *differenzierbaren* Fall geben wir in Kapitel 2, zumal wir später von der Existenz differenzierbarer Teilungen der Eins mehrfach Gebrauch machen werden.

Definition. Wir nennen ein solches System einen *abstrakten 1-Cozyklus* von Homöomorphismen. Die sogenannte *Cozykel-Bedingung 3.* gilt natürlich jeweils nur auf der Menge $V_{kj} \cap \varphi_{kj}^{-1}(V_{\ell k})$.

Man beachte, daß die Bedingungen 1. und 2. aus der dritten folgen. Wählt man nämlich $j = k = \ell$, so erhält man aus 3. auf $V_j = V_{jj}$:

$$\varphi_{jj} \circ \varphi_{jj} = \varphi_{jj}.$$

Da die φ_{jj} invertierbar sind, impliziert dies $\varphi_{jj} = \text{id}$. Die Bedingung 2. folgt hieraus und aus 3., wenn man dort $\ell = j$ setzt:

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{kj} = \varphi_{jj} = \text{id}.$$

Wir geben uns nun umgekehrt einen solchen 1-Cozyklus vor; also ein System $\{V_j\}_{j \in I}$ von offenen Teilmengen $V_j \subset \mathbb{R}^n$, zu jedem Paar $j, k \in I$ eine (eventuell leere) offene Teilmenge $V_{kj} \subset V_j$, wobei stets $V_{jj} = V_j$ gelten soll, und einen Homöomorphismus $\varphi_{kj} : V_{kj} \rightarrow V_{jk}$, so daß die Cozykelbedingung erfüllt ist, und fragen uns, ob es eine topologische Mannigfaltigkeit gibt, die zu diesem Cozyklus gehört.

Was wir zu tun haben, ist im Prinzip klar: wir haben für alle j und k die Menge V_j mit V_k entlang V_{kj} und V_{jk} zu „verheften“. Mathematisch exakt geht dies folgendermaßen. Es sei $\tilde{X} := \sqcup V_j$ die *disjunkte* mengentheoretische Vereinigung der Mengen V_j , die man als Teilmenge von $\mathbb{R}^n \times I$ auffassen kann. Versieht man I mit der *diskreten* Topologie und $\mathbb{R}^n \times I$ mit der *Produkttopologie*, so erbt \tilde{X} eine kanonische Topologie: $U \subset \tilde{X}$ ist genau dann offen, wenn alle Durchschnitte $U \cap V_j$ offen sind (man kann ja V_j als Teilmenge von \tilde{X} auffassen). Auf \tilde{X} erklären wir nun eine „Verheftungsvorschrift“:

$$x_j \sim x_k \iff x_j \in V_{kj}, x_k \in V_{jk}, x_k = \varphi_{kj}(x_j).$$

Dies ist genau deshalb eine Äquivalenzrelation, weil die Cozykelbedingungen erfüllt sein sollen. Wir bilden nun

$$X := \tilde{X} / \sim$$

und versehen diesen Raum mit der von der kanonischen Projektion $\pi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} / \sim = X$ herstammenden *Quotiententopologie*. Per definitionem ist diese so beschaffen, daß $U \subset X$ genau dann offen ist, wenn dies für $\pi^{-1}(U) \subset \tilde{X}$ zutrifft. Wegen $\pi^{-1}(\pi(V_j)) = \bigcup_{k \in I} V_{kj}$ ist $U_j := \pi(V_j)$ eine offene Teilmenge von X , und $\varphi := \pi|_{V_j} : V_j \rightarrow U_j$ ist ein Homöomorphismus. Somit wird X von den Karten $(U_j, \psi_j := \varphi^{-1}, V_j)$ überdeckt, und es ist sofort einzusehen, daß dieser Atlas genau zu dem vorgegebenen 1-Cozyklus zurückführt. Was jetzt aber noch nachgeprüft werden muß, sind unsere Standardvoraussetzungen *hausdorffsch* und *2. Abzählbarkeits-Axiom*. Beide sind nicht automatisch erfüllt. Die zweite ist auf jeden Fall gegeben, wenn der vorgegebene Cozyklus abzählbar ist, was wir ja ohnehin annehmen können. Für das 2. Trennungsaxiom kann man aber i. A. keine einfach nachprüfbareren Kriterien angeben. Startet man jedoch mit einer topologischen Mannigfaltigkeit X , gewinnt aus dieser einen 1-Cozyklus und konstruiert wie eben den Raum \tilde{X} / \sim , so ist dieser auf kanonische Weise *homöomorph* zu dem ursprünglichen Raum X .

Beispiel. Wählt man $V_1 = V_2 = \mathbb{R}$ und $V_{21} = V_{12} = \mathbb{R}^*$, und verheftet man diese beiden Mengen vermöge der Identität $\varphi_{21} = \varphi_{12} = \text{id}_{\mathbb{R}^*}$, so ist der entstehende Raum zwar lokal eine topologische Mannigfaltigkeit, aber nicht hausdorffsch.

1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Es sei X eine topologische Mannigfaltigkeit (mit allen unseren topologischen Zusatzbedingungen). Wir behalten die Bezeichnungen aus dem vorigen Kapitel bei.

Definition. 1. Zwei Karten $(U_1, \psi_1, V_1), (U_2, \psi_2, V_2)$ auf X heißen *differenzierbar verträglich*, wenn der Kartenwechsel $\varphi_{21} : V_{21} \rightarrow V_{12}$ (beliebig oft) differenzierbar ist.

2. Ein Atlas \mathfrak{A} auf X heißt *differenzierbar*, wenn je zwei Karten aus \mathfrak{A} miteinander differenzierbar verträglich sind.

3. Zwei differenzierbare Atlanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} auf X heißen *differenzierbar verträglich*, wenn jede Karte aus \mathfrak{A} mit jeder Karte aus \mathfrak{B} differenzierbar verträglich ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß auch $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ein differenzierbarer Atlas ist.

Bemerkung. Differenzierbare Verträglichkeit von Karten und von Atlanten sind Äquivalenzrelationen. Wir schreiben im letzteren Fall wie immer $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

Das folgende Lemma ist eine leichte Übungsaufgabe.

Lemma 1.1 *Ist \mathfrak{A} ein differenzierbarer Atlas auf X , so ist auch*

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{ (U, \psi, V) : (U, \psi, V) \text{ differenzierbar verträglich zu jeder Karte von } \mathfrak{A} \}$$

ein differenzierbarer Atlas, der zu \mathfrak{A} äquivalent ist und nicht mehr „erweitert“ werden kann. Es gilt ferner

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}.$$

Definition. Aus naheliegender Grund nennt man $\tilde{\mathfrak{A}}$ einen *maximalen Atlas*.

Definition. Eine *differenzierbare Struktur* auf der topologischen Mannigfaltigkeit X ist eine Äquivalenzklasse von differenzierbar verträglichen differenzierbaren Atlanten. Zusammen mit dieser Struktur heißt X eine *differenzierbare Mannigfaltigkeit*.

Bemerkungen. 1. Eine differenzierbare Struktur ist schon durch die Vorgabe eines einzigen differenzierbaren Atlas bestimmt. Diesen sollte man i. A. so klein wie möglich wählen.

2. Eine differenzierbare Struktur wird stets durch einen *abzählbaren* Atlas beschrieben.

3. Zwei durch Vorgabe je eines differenzierbaren Atlas definierte differenzierbare Strukturen (X, \mathfrak{A}) und (X, \mathfrak{B}) sind genau dann gleich, wenn $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}$.

4. Bei Bedarf gehen wir zu „größeren“ Atlanten $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}' \subset \tilde{\mathfrak{A}}$ über (z. B. nehmen wir mit $(U, \psi, V) \in \mathfrak{A}$ auch einige oder alle Karten $(U', \psi|_{U'}, V' = \psi(U'))$, $U' \subset U$ beliebige offene Teilmenge, hinzu und erlauben noch zusätzliche differenzierbare Koordinatenwechsel auf V'), d. h. wir arbeiten „nur im Prinzip“ mit dem maximalen Atlas. (Siehe hierzu auch die beiden anschließenden Beispiele).

5. Wie im vorigen Kapitel beweist man, daß ein differenzierbarer Atlas zu einem abstrakten 1-Cozyklus von C^∞ -Diffeomorphismen Anlaß gibt. Umgekehrt kann man aus einem solchen 1-Cozyklus wieder die differenzierbare Mannigfaltigkeit rekonstruieren.

Beispiele. 1. $\{(\mathbb{R}^n, \text{id}, \mathbb{R}^n)\} = \mathfrak{A}$ definiert eine differenzierbare Struktur auf \mathbb{R}^n . Der dazu gehörige maximale Atlas ist riesig groß; er ist gleich

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \{ (U, \psi, V) : U, V \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, } \psi : U \rightarrow V \text{ Diffeomorphismus} \}.$$

2. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathfrak{A} = \{(U_j, \psi_j, V_j)\}$ und ist $U \subset X$ offen, so ist

$$\mathfrak{A}|_U := \{ (U_j \cap U, \psi_j|_{U_j \cap U}, \psi_j(U_j \cap U)) \}$$

ein differenzierbarer Atlas auf U . Gilt $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, so auch $\mathfrak{A}|_U \sim \mathfrak{B}|_U$. Also wird auf U in eindeutiger Weise eine differenzierbare Struktur erklärt.

3. Jede *differenzierbare Untermannigfaltigkeit* $X \subset \mathbb{R}^n$ der Dimension k trägt die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Karten erhält man lokal mit Hilfe des *Satzes über implizite Funktionen* durch Projektionen in geeignete k -dimensionale Koordinatenebenen.

Warnungen. 1. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten ohne differenzierbare Struktur !

2. Es gibt topologische Mannigfaltigkeiten mit mehreren differenzierbaren Strukturen, sogenannte „exotische“ Strukturen. Die ersten wurden von MILNOR 1958 auf S^7 gefunden, und zwar, neben der „Standardstruktur“ von S^7 als Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^8 , genau 27 weitere. Am Ende des letzten Jahrhunderts wurde gezeigt, daß von den euklidischen Räumen \mathbb{R}^n nur der \mathbb{R}^4 exotische Strukturen trägt, aber dieser sogar überabzählbar viele.

Bemerkung. Im eindimensionalen Fall ist jede (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit diffeomorph (zu diesem Begriff siehe das nächste Kapitel) zu \mathbb{R} oder zu S^1 , jeweils mit der Standardstruktur. Diese Aussage ist jedoch falsch, wenn X nicht, wie wir stets voraussetzen, das 2. Abzählbarkeits-Axiom erfüllt !

Wie kann man weitere Mannigfaltigkeiten aus gegebenen konstruieren ? Es seien $(X, \mathfrak{A}), (Y, \mathfrak{B})$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Dann ist ihre *Summe* oder *disjunkte Vereinigung*

$$(X + Y, \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \text{ mit } X + Y := X \sqcup Y \text{ (disjunkte Vereinigung) und } \mathfrak{A} + \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \sqcup \mathfrak{B}$$

wieder eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Ebenso trägt das *kartesische Produkt* von zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten eine kanonische differenzierbare Struktur $(X \times Y, \mathfrak{A} \times \mathfrak{B})$, wobei $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ auf naheliegende Weise zu definieren ist. (Beachte aber, daß i. A. $\widetilde{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}} \neq \widetilde{\mathfrak{A}} \times \widetilde{\mathfrak{B}}$!). In diesem Fall ist $\dim_{(x,y)} X \times Y = \dim_x X + \dim_y Y$.

Bemerkung. *Untermannigfaltigkeiten* von abstrakten Mannigfaltigkeiten definieren wir später (Kapitel 3).

Bemerkung. Ersetzt man „differenzierbar verträglich“ durch „ C^κ -verträglich“, $0 \leq \kappa \leq \infty$ oder $\kappa = \omega$, so erhält man den Begriff der C^κ -Mannigfaltigkeit bzw. den der reell-analytischen Mannigfaltigkeit. Ist $n = 2m$ gerade und $\mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$, und sind die Kartenwechsel $\mathbb{C}^m \supset V_{kj} \rightarrow V_{jk}$ *biholomorph*, so spricht man von einer *komplex-analytischen* oder verkürzend von einer *komplexen Mannigfaltigkeit* der *komplexen* Dimension m .

2 Differenzierbare Abbildungen

Seien (X, \mathfrak{A}) und (Y, \mathfrak{B}) differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit hinreichend großen differenzierbaren Atlanten, und $f : X \rightarrow Y$ sei eine Abbildung.

Definition. f heißt *differenzierbar* in $x_0 \in X$, wenn folgendes gilt:

- a) f ist stetig in $x_0 \in X$;
- b) für alle Karten (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ von X bzw. Y mit $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0) \in \tilde{U}$ und $f(U) \subset \tilde{U}$ (solche gibt es nach a)) gilt:

$$(*) \quad \tilde{\psi} \circ f \circ \varphi : V \rightarrow \tilde{V}$$

ist differenzierbar in $\psi(x_0) \in V$.

Lemma 2.1 Für die Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in X$ genügt die Existenz von zwei Karten (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ mit $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0) \in \tilde{U}$, $f(U) \subset \tilde{U}$ und $(*)$ in b).

Beweis. Trivial. □

Definition. $f : X \rightarrow Y$ heißt *differenzierbar*, wenn f differenzierbar ist in jedem Punkt $x_0 \in X$, d. h. $\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi : V \rightarrow \tilde{V}$ ist differenzierbar für alle (U, ψ, V) und $(\tilde{U}, \tilde{\psi}, \tilde{V})$ mit $f(U) \subset \tilde{U}$. (Insbesondere ist f natürlich stetig). Wir schreiben $\mathcal{C}^\infty(X, Y)$ für die Menge der differenzierbaren Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, speziell $\mathcal{C}^\infty(X) := \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. Selbstverständlich existiert auch $\mathcal{C}^\infty(U, Y)$ und $\mathcal{C}^\infty(U)$ für alle offenen Teilmengen $U \subset X$.

Lemma 2.2 a) $\text{id}_X \in \mathcal{C}^\infty(X, X)$.

- b) Aus $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}^\infty(Y, Z)$ folgt $g \circ f \in \mathcal{C}^\infty(X, Z)$.

Lemma 2.3 Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig. Dann sind äquivalent:

- a) $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$;
- b) für alle $U \subset X$, $\tilde{U} \subset Y$ offen mit $f(U) \subset \tilde{U}$ und $h \in \mathcal{C}^\infty(\tilde{U})$ ist $h \circ f \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Beweis. Die Richtung von a) nach b) ist schon gezeigt worden. Für die umgekehrte Richtung beachte man, daß man diese nur in lokalen Karten zu begründen braucht und daß

$$f = (f_1, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

genau dann differenzierbar ist, wenn alle Funktionen f_1, \dots, f_n in $\mathcal{C}^\infty(U)$ liegen. Nun ist aber $f_j = \pi_j \circ f$ mit der j -ten Projektion $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, und diese ist eine \mathcal{C}^∞ -Funktion. □

Lemma 2.4 \mathcal{C}^∞ ist (in kanonischer Weise) eine kommutative \mathbb{R} -Algebra mit 1.

Definition. $f \in \mathcal{C}^\infty(X, Y)$ heißt ein *Diffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist und $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(Y, X)$. X und Y heißen *diffeomorph*, wenn es einen Diffeomorphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Klar ist: Diffeomorphie ist eine Äquivalenzrelation. Ferner gilt unmittelbar aufgrund der Definition von differenzierbaren Abbildungen vermittelt Karten:

Lemma 2.5 Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und (U, ψ, V) eine Karte, so sind $\psi : U \rightarrow V$ und $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U$ Diffeomorphismen.

Bemerkungen. Alle diese Aussagen gelten auch entsprechend für die Kategorien \mathcal{C}^k , \mathcal{C}^ω , \mathcal{O} (komplex-analytisch).

Satz 2.6 Die Identität $\text{id} : (X, \tilde{\mathfrak{A}}) \rightarrow (X, \tilde{\mathfrak{B}})$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn $\tilde{\mathfrak{A}} = \tilde{\mathfrak{B}}$.

Beweis. Übungsaufgabe. □

Hinweis. Man interpretiere diesen Satz in Bezug auf die 28 verschiedenen Strukturen auf S^7 .

Bemerkung. Man kann eine differenzierbare Struktur auf X unter einem Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ von X auf einen topologischen Raum Y offensichtlich so „transportieren“, daß Y eine differenzierbare Struktur erhält, für die f ein Diffeomorphismus wird.

Für $f \in C^\infty(X, Y)$ und $x_0 \in X$ definieren wir nun (gemäß $(*)$) den Rang von f an der Stelle x_0 durch

$$\text{rg}_{x_0} f = \text{rang } D_{\psi(x_0)}(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi).$$

Es ist zu zeigen, daß diese Definition von der Wahl der Karten unabhängig ist.

Lemma 2.7 Der Rang $\text{rg}_{x_0} f$ ist unabhängig von den Karten.

Beweis. Es seien (U_1, ψ_1, V_1) und $(\tilde{U}_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{V}_1)$ zwei weitere Karten wie in $(*)$ und ohne Einschränkung $U_1 = U$, $\tilde{U}_1 = \tilde{U}$. Dann gilt

$$\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1 = (\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi}) \circ (\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi) \circ (\psi \circ \varphi_1)$$

und damit nach der Kettenregel

$$D(\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1) = D(\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi}) \circ D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi) \circ D(\psi \circ \varphi_1).$$

Daraus folgt, da die Matrizen $D(\tilde{\psi}_1 \circ \tilde{\varphi})$, $D(\psi \circ \varphi_1)$ invertierbar sind, daß

$$\text{rg } D(\tilde{\psi}_1 \circ f \circ \varphi_1) = \text{rg } D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi)$$

(an entsprechenden Stellen). □

Bemerkung. Wir definieren im übernächsten Kapitel eine lineare Abbildung $(Df)_{x_0}$ zwischen den Tangentialräumen $T_{X, x_0} \rightarrow T_{Y, f(x_0)}$ mit $\text{rg}_{x_0} f = \text{rg } (Df)_{x_0}$. Wir schreiben deshalb auch schon jetzt

$$\text{rg}_{x_0} f =: \text{rg } (Df)_{x_0} = \text{rg}_{x_0} Df.$$

Satz 2.8 Es sei $\text{rg}_{x_0} f = \dim_{x_0} X = \dim_{f(x_0)} Y$. Dann ist f lokal um x_0 ein Diffeomorphismus.

Beweis. Umkehrsatz. □

Lemma 2.9 Für eine feste differenzierbare Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist die Abbildung $\text{rg}_f : X \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \text{rg}_x f$ von unten halbstetig, d. h., da \mathbb{Z} diskret ist: für alle $x_0 \in X$ existiert eine Umgebung $U = U(x_0)$ mit $\text{rg}_x f \geq \text{rg}_{x_0} f$ für alle $x \in U$.

Beweis. Für eine $m \times n$ -Matrix A reeller Zahlen ist $\text{rang } A \geq r$ genau dann, wenn eine $r \times r$ -Untermatrix von A existiert, deren Determinante nicht verschwindet. Wegen der Stetigkeit der Einträge in der Funktionalmatrix $D_{\psi(x)}(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi)$ ist ihr Rang in jedem Punkt einer Umgebung eines Punktes x_0 größer oder gleich r , wenn er dies nur im Punkte x_0 ist. □

Definition. Es sei $f \in C^\infty(X, Y)$, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0) \in Y$, $m = \dim_{x_0} X$, $n = \dim_{y_0} Y$.

a) f heißt eine Immersion in x_0 , wenn $\text{rg}_{x_0} f = m$ (die Tangentialabbildung ist dann injektiv).

b) f heißt eine Submersion in x_0 , wenn $\text{rg}_{x_0} f = n$ (die Tangentialabbildung ist dann surjektiv).

c) f heißt eine *Subimmersion* in x_0 , wenn es eine Umgebung $U = U(x_0)$ gibt mit

$$\operatorname{rg}_x f = r = \text{const.}, \quad x \in U.$$

Eine Abbildung f heißt eine *Immersion* bzw. *Submersion* bzw. *Subimmersion* (schlechthin), wenn die entsprechende Eigenschaft in jedem Punkt $x_0 \in X$ erfüllt ist.

Bemerkung. Der weiter unten zu findende *Rangatz* besagt, daß lokal eine Subimmersion geschrieben werden kann als die Komposition einer Submersion mit einer Immersion. Daher stammt die etwas kuriose Bezeichnung.

Satz 2.10 *Jede Immersion bzw. Submersion ist auch eine Subimmersion.*

Beweis. a) Ist f eine Immersion in x_0 , d. h. $\operatorname{rg}_{x_0} f = m$, so ist notwendig $m \leq n$. Da $\operatorname{rg}_x f \leq \min(m, n) = m$ ist und in einer Umgebung U von x_0 die Abschätzung $\operatorname{rg}_x f \geq \operatorname{rg}_{x_0} f$ gelten muß, ist auch $\operatorname{rg}_x f = m$, $x \in U$.

b) Ist $\operatorname{rg}_{x_0} f = n$, so folgt $n \leq m$. Der Rest erledigt sich wie im Teil a). □

Satz 2.11 (Rangatz) *Es sei $\operatorname{rg}_x f = \text{const.} = r$ lokal um $x_0 \in X$. Dann gibt es lokale Koordinaten x_1, \dots, x_m um „ $x_0 = 0$ “ in X und (y_1, \dots, y_n) um „ $y_0 = f(x_0) = 0$ “ in Y , so daß*

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Speziell hat man in solchen Koordinaten

a) $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ für eine Immersion, $m \leq n$,

bzw.

b) $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$ für eine Submersion, $m \geq n$.

Beweis. Wir führen lokal um $x_0 = 0$ und $y_0 = f(x_0) = 0$ Koordinaten ein, s. d. f gegeben wird durch

$$f(x_1, \dots, x_m) = (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)).$$

Ohne Einschränkung können wir (nach Verkleinerung der Karten und Umbenennung der Variablen) annehmen, daß überall

$$\det \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq r} \neq 0.$$

Betrachte zuerst die Abbildung

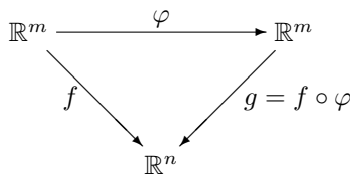
$$\varphi : (x_1, \dots, x_m) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_r(x_1, \dots, x_m), x_{r+1}, \dots, x_m).$$

Wegen

$$D\varphi = \left(\begin{array}{c|c} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq r} & * \\ \hline 0 & E_{m-r} \end{array} \right)$$

ist φ lokal um 0 ein Diffeomorphismus. Wir verkleinern wieder entsprechend die Umgebungen.

Mit dem (lokal um den jeweiligen Ursprung zu verstehenden) Diagramm



folgt aus der Beschreibung von f und φ sofort, daß g gegeben wird durch

$$g(\xi_1, \dots, \xi_m) = (\xi_1, \dots, \xi_r, g_{r+1}(\xi_1, \dots, \xi_m), \dots, g_n(\xi_1, \dots, \xi_m)),$$

und da φ ein Koordinatenwechsel auf X nahe x_0 ist, muß auch $\operatorname{rg} g = r = \operatorname{const.}$ sein. Wir können daher wieder x statt ξ schreiben und von vornherein annehmen an, daß f schon die Gestalt

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, f_{r+1}(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)), \quad \operatorname{rg}_x f = r = \operatorname{const.}$$

besitzt. Nun ist in diesem Fall

$$Df = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{\substack{j=r+1, \dots, n \\ k=1, \dots, m}} & \end{array} \right).$$

Wegen $\operatorname{rg}_x f = r$ muß daher

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{für } j = r+1, \dots, n, \quad k = r+1, \dots, m$$

gelten. Bei erneuter Verkleinerung der Umgebung (wähle z. B. einen geeigneten Würfel) gilt dann

$$f_j(x_1, \dots, x_m) = f_j(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) =: h_j(x_1, \dots, x_r).$$

Nun ist $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, lokal um 0 gegeben durch

$$y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_r, y_{r+1} - h_{r+1}(y_1, \dots, y_r), \dots, y_n - h_n(y_1, \dots, y_r)),$$

wiederum ein Diffeomorphismus im Bildbereich, und bzgl. dieser neuen Koordinaten wird f (bei erneuter Verkleinerung der Ursprungs-Karte) gegeben durch

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0). \quad \square$$

Folgerung 2.12 *Ist f eine Submersion, so ist f offen (d. h. $f(U)$ ist offen in Y für alle offenen Mengen $U \subset X$).*

Warnung. Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Immersion, so ist das Bild $f(X)$ nicht notwendig abgeschlossen in Y (auch nicht, wenn f injektiv ist). Siehe hierzu auch das nächste Kapitel.

Aus Gründen der späteren „Zitierbarkeit“ fügen wir hier noch eine exakte Definition des Begriffes *Teilung der Eins* an.

Definition. Es sei X eine C^κ -Mannigfaltigkeit und $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ eine offene Überdeckung. Eine *der Überdeckung \mathfrak{U} untergeordnete C^κ -Teilung der Eins* ist ein System von C^κ -Funktionen $\eta_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- i) $0 \leq \eta_j(x) \leq 1, \quad x \in X$;
- ii) $\operatorname{supp} \eta_j \subset\subset U_j$;
- iii) ist U eine beliebige Umgebung eines Punktes x_0 , so ist die Menge der $j \in J$ mit $U_j \cap U \neq \emptyset$ endlich;
- iv) an jeder Stelle $x \in X$ ist die (nach iii) endliche) Summe $\sum_{j \in J} \eta_j(x)$ gleich 1.

Hierbei bezeichnet $\operatorname{supp} \eta$ den *Träger* einer Funktion η , d. h. den Abschluß der Menge der Punkte auf X , in denen η nicht verschwindet.

Bemerkung. Für parakompakte C^κ -Mannigfaltigkeiten, $\kappa \leq \infty$, existieren zu beliebigen offenen Überdeckungen stets untergeordnete Teilungen der Eins. Wegen der jeweiligen *Identitätssätze* ist diese Aussage für reell- und komplex-analytische Mannigfaltigkeiten selbstverständlich falsch.

3 Untermannigfaltigkeiten und Einbettungen

Definition. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $Z \subset X$ eine Teilmenge (mit induzierter Relativtopologie, die dann insbesondere hausdorffsch ist und das zweite Abzählbarkeits-Axiom erfüllt). Z heißt eine *differenzierbare Untermannigfaltigkeit* von X , wenn es für alle $x_0 \in Z$ eine Karte (U, ψ, V) von X gibt mit $x_0 \in U$, $\psi(x_0) = 0$ und

$$\psi(Z \cap U) = L \cap V, \quad L = \{x_{r+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Bemerkungen. Bei dieser Definition braucht man einen *maximalen* Atlas für X . Sonst muß man fordern, daß $\psi(Z \cap U) \subset V$ eine *Untermannigfaltigkeit* von V ist, d. h. man braucht den Begriff schon für \mathbb{R}^n . Nach unserer Definition ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit, wenn es für alle $x \in Z$ eine Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $\psi(Z \cap U) = L \cap V$. Dies ist nicht die von uns früher verwendete (Standard-) Definition; wir wissen aber, daß sie zu der üblichen äquivalent ist. Wir werden dies anschließend noch einmal (für Mannigfaltigkeiten) beweisen.

Wir beginnen mit einigen einfachen Erkenntnissen.

Lemma 3.1 *Eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ ist notwendig lokal abgeschlossen, d. h. es existiert eine offene Teilmenge $U \subset X$, so daß $Z \subset U$ und $U \setminus Z$ offen in X ist.*

Warnung. I. a. kann man nicht $U = X$ wählen, d. h. Z ist nicht notwendig abgeschlossen in X .

Lemma 3.2 *Sind $Z_1 \subset X_1$, $Z_2 \subset X_2$ zwei Untermannigfaltigkeiten, so auch $Z_1 \times Z_2 \subset X_1 \times X_2$.*

Die *Beweise* dieser Aussagen sind elementar und werden deshalb dem Leser überlassen. Etwas schwieriger ist der Nachweis des folgenden Satzes.

Satz 3.3 *Eine Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ trägt in kanonischer Weise die Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Es seien (U_j, ψ_j, V_j) , $j = 1, 2$, zwei Karten mit $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $\psi_j(Z \cap U_j) = L_j \cap V_j$. Ohne Einschränkung sei $U_1 = U_2 = U$. Dann ist $\lambda := \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$ ein Diffeomorphismus $V_1 \rightarrow V_2$ mit $\lambda(L_1 \cap V_1) = L_2 \cap V_2$. Es ist leicht einzusehen, daß dann $\lambda|_{L_1 \cap V_1} : L_1 \cap V_1 \rightarrow L_2 \cap V_2$ ein Diffeomorphismus (von niederdimensionalen Räumen) ist. Daraus folgt sofort, daß die Karten

$$(Z \cap U, \psi|_{Z \cap U}, \psi(Z \cap U) = L \cap V)$$

eine differenzierbare Struktur auf Z erklären. □

Wegen Satz 3 kann man nun auch von *differenzierbaren Abbildungen* $f : Z \rightarrow Y$ von Z in eine differenzierbare Mannigfaltigkeit Y sprechen. Da zur Charakterisierung solcher Abbildungen der Begriff der *differenzierbaren Funktion* auf Z genügt (siehe Lemma 2.3), ist es wichtig, Kriterien für die Differenzierbarkeit einer Funktion auf Z zu kennen. Wie im Fall von Untermannigfaltigkeiten von \mathbb{R}^n gilt nun, wie man durch Betrachtung geeigneter Karten sofort sieht:

Lemma 3.4 *Eine Funktion $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Untermannigfaltigkeit $Z \subset X$ ist genau dann differenzierbar, wenn f lokal um jeden Punkt $x_0 \in Z$ die Einschränkung einer differenzierbaren Funktion F auf einer offenen Umgebung von x_0 in X ist.*

Den Beweis überlassen wir dem Leser, ebenso die Herleitung der beiden folgenden Aussagen.

Satz 3.5 a) *Die Untermannigfaltigkeiten $Z \subset X$ mit $\dim_x Z = \dim_x X$ für alle $x \in Z$ sind genau die offenen Teilmengen von X („offene“ Untermannigfaltigkeiten).*

b) *Die Untermannigfaltigkeiten $Z \subset X$ mit $\dim_x Z = 0$ für alle $x \in Z$ sind die diskreten (notwendig abzählbaren) Teilmengen in X .*

Satz 3.6 *Es sei $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit, $Z \subset Y$ ein topologischer Unterraum. Dann gilt: $Z \subset Y$ ist eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn Z eine Untermannigfaltigkeit von X ist.*

Definition. Ist X rein n -dimensional und $Z \subset X$ von der reinen Dimension $n - 1$, so heißt Z eine *Hyperfläche*.

Wir kommen nun zu einer der zentralen Definitionen für differenzierbare Abbildungen, die es gestattet, Untermannigfaltigkeiten auch auf eine andere Weise zu beschreiben, die aus der Anfängervorlesung vertraut sein sollte.

Definition. Es sei $f \in C^\infty(X, Y)$. f heißt *regulär* im Punkt $x_0 \in X$, wenn f dort eine Submersion ist. $y_0 \in Y$ heißt ein *regulärer Wert* von f , wenn f in allen Punkten $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ regulär ist. (Dies gilt insbesondere für $y_0 \notin f(X)$, d. h. $f^{-1}(y_0) = \emptyset$). Im anderen Fall spricht man von *singulären Stellen* bzw. Werten.

Satz 3.7 a) *Es sei $y_0 \in Y$ ein regulärer Wert von $f \in C^\infty(X, Y)$. Dann ist $Z := f^{-1}(y_0)$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von X mit*

$$\text{codim}_{x_0}(Z, X) := \dim_{x_0} X - \dim_{x_0} Z = \dim_{y_0} Y$$

für alle $x_0 \in Z$.

b) *Lokal ist jede Untermannigfaltigkeit von dieser Gestalt. (Dies ist die übliche Definition im \mathbb{R}^n).*

Beweis. a) Nahe $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ gibt es Karten mit $x_0 = 0 \in V_1 \subset \mathbb{R}^m$, $y_0 = 0 \in V_2 \subset \mathbb{R}^n$, s. d. f gegeben wird durch

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n), \quad m \geq n.$$

Dann ist in V_1 :

$$Z = f^{-1}(y_0) = \{(0, \dots, 0, x_{n+1}, \dots, x_m)\},$$

also eine Untermannigfaltigkeit mit

$$\dim_{x_0} Z = m - n = \dim_{x_0} X - \dim_{y_0} Y.$$

b) In einer lokalen Karte V wird Z gegeben durch $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$, $\dim_x X = n$. Betrachte die Projektion

$$p : \begin{cases} V & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-r} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{r+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

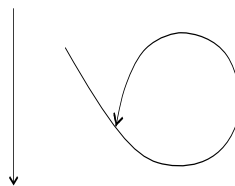
Nach Definition ist p eine Submersion, und es ist

$$p^{-1}(0) = Z \cap V. \quad \square$$

Bemerkung. Eine a) entsprechende Aussage gilt auch mutatis mutandis für *Subimmersionen* (von konstantem Rang).

Definition. $f \in C^\infty(X, Y)$ heißt eine *Einbettung* (von X in Y), falls $Z = f(X) \subset Y$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : X \rightarrow Z$ ein Diffeomorphismus ist. (Insbesondere muß f injektiv sein). Man nennt die Einbettung f *offen* bzw. *abgeschlossen*, wenn Z offen bzw. abgeschlossen in Y ist.

Bemerkung. Eine Einbettung ist notwendig eine injektive Immersion (siehe unten). Die Umkehrung gilt nicht, wie folgende Skizze zeigt:



$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Figure 3.1

Es gilt jedoch

Lemma 3.8 Ist $f \in C^\infty(X, Y)$ eine Immersion in x_0 , so gibt es Umgebungen $U_1 = U_1(x_0)$, $U_2 = U_2(f(x_0))$ mit $f(U_1) \subset U_2$, s. d.

$$f|_{U_1} \in C^\infty(U_1, U_2)$$

eine abgeschlossene Einbettung ist.

Beweis. Rangsatz. □

Satz 3.9 $f \in C^\infty(X, Y)$ ist genau dann eine Einbettung, wenn folgendes erfüllt ist :

- a) f ist eine injektive Immersion ;
- b) $f : X \rightarrow Z$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingungen ist klar. Seien umgekehrt a) und b) erfüllt. Wegen des vorstehenden Lemmas ist der Homöomorphismus $f : X \rightarrow f(X)$ lokal ein Diffeomorphismus auf eine Untermannigfaltigkeit. Also ist $f(X)$ eine Untermannigfaltigkeit und $f : X \rightarrow f(X)$ ein Diffeomorphismus. □

Bemerkung. Eine *eigentliche* injektive Immersion ist eine abgeschlossene Einbettung (Übungsaufgabe).

Wir beschließen diesen Paragraphen mit der Formulierung des berühmten *Einbettungssatzes* von WHITNEY, den wir aber nicht benutzen werden und daher auch nicht beweisen.

Satz 3.10 (Whitney) Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit

$$\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X = n < \infty .$$

Dann gestattet X eine abgeschlossene Einbettung

$$f : X \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1} .$$

Bemerkung. Der Satz bleibt richtig in der reell-analytischen Kategorie (GRAUERT, MORREY; bei Grauert mit holomorphen Techniken bewiesen). Im komplex-analytischen Fall ist die entsprechende Aussage $X \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ immer falsch für kompakte X (außer wenn X null-dimensional ist). Sie gilt exakt für die Klasse der „Steinschen“ Mannigfaltigkeiten (so genannt nach KARL STEIN). Im kompakten Fall kann man nach Einbettungen $X \hookrightarrow \mathbb{P}_N(\mathbb{C})$ fragen. Diese existieren für die sogenannten „projektiv-algebraischen“ Mannigfaltigkeiten X .

4 Das Tangentialbündel

Es sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine r -dimensionale Untermannigfaltigkeit. Dann gibt es für alle $x \in X$ einen (eindeutig bestimmten) r -dimensionalen Unterraum von \mathbb{R}^n , genannt T_{X,x_0} , so daß der affine Raum

$$x_0 + T_{X,x_0}$$

die Mannigfaltigkeit X im Punkte $x_0 \in X$ „besser als linear“ approximiert. T_{X,x_0} heißt der *Tangentialraum* von X im Punkte x_0 . Wir haben früher für T_{X,x_0} verschiedene Beschreibungen gegeben je nach Darstellung von X nahe x_0 (wobei ohne Einschränkung $x_0 = 0$ angenommen werden kann):

- a) Ist $X = \{x \in U = U(x_0) \subset \mathbb{R}^n : f_{r+1}(x) = \dots = f_n(x) = 0\}$ mit C^∞ -Funktionen $f_{r+1}, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$, so daß mit $f := (f_{r+1}, \dots, f_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-r}$ gilt:

$$\operatorname{rg}_{x_0} Df := \operatorname{rg} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x_0) \right)_{\substack{j=r+1, \dots, n \\ k=1, \dots, n}} = n - r,$$

so ist

$$T_{X,x_0} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : (Df)_{x_0} \xi = 0 \}.$$

- b) Ist (U, ψ, V) eine Karte von X mit $x_0 \in X$ und $\psi(x_0) = 0$, $\varphi = \psi^{-1}$, $V \subset \mathbb{R}^r$, so ist (mit φ aufgefaßt als Abbildung $\varphi : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$):

$$T_{X,x_0} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (D\varphi)_o \eta, \eta \in \mathbb{R}^r \}.$$

Bemerkung. Der „Graph-Satz“ besagt, daß man im Falle b) die Abbildung $\psi = \varphi^{-1}$ sogar als Einschränkung der Projektion $\pi : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ in geeigneten Koordinaten wählen kann. Die hieraus resultierende Beschreibung von T_{X,x_0} wird weiter unten abgeleitet und zum Nachweis der Mannigfaltigkeits-Eigenschaften des *Tangentialbündels* verwendet.

Man kann nun diese Tangentialräume „diskret“ nebeneinanderlegen auf die folgende Weise

$$T_X = \{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in X, \xi \in T_{X,x} \subset \mathbb{R}^n \}$$

und den folgenden Satz beweisen (den wir später wesentlich verallgemeinern werden).

Satz 4.1 1. Ist X eine Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n der Dimension r , so ist T_X eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ der Dimension $2r$;

2. bezeichnet $\pi : T_X \rightarrow X$ die kanonische Projektion

$$T_X \ni (x, \xi) \mapsto x \in X,$$

so gilt:

- a) $\pi^{-1}(x) = T_{X,x}$, die Faser besitzt also eine Vektorraumstruktur,
 b) π ist eine surjektive Submersion,
 c) zu jedem $x_0 \in X$ existiert eine Umgebung $U = U(x_0) \subset X$ und ein Diffeomorphismus χ_U , der das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^r & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) \\ p = \operatorname{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

kommutativ macht („lokale Trivialisierung“), und die Faserabbildung

$$\chi_{U,x} : \mathbb{R}^r \cong p^{-1}(x) \longrightarrow \pi^{-1}(x) = T_{X,x}$$

ist ein (linearer) Isomorphismus für alle $x \in U$.

Definition. Das Tripel (T_X, π, X) oder kurz auch T_X heißt das *Tangentialbündel* von X .

Beweis von Satz 1. Es sei ohne Einschränkung X (lokal) ein Graph:

$$X = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k = f_k(x_1, \dots, x_r), k = r+1, \dots, n \}.$$

Dann ist

$$T_{X,x} = \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (Df)_x \eta, \eta \in \mathbb{R}^r \},$$

wobei

$$f(x_1, \dots, x_r) = (x_1, \dots, x_r, f_{r+1}(x_1, \dots, x_r), \dots, f_n(x_1, \dots, x_r))$$

und damit

$$(Df)_x = \left(\begin{array}{c|c} E_r & \\ \hline \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right)_{\substack{k=r+1, \dots, n \\ j=1, \dots, r}} & \end{array} \right),$$

so daß also $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in T_{X,x}$ genau dann, wenn

$$(*) \quad \xi_k = \eta_k, k = 1, \dots, r, \quad \xi_k = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_r) \cdot \eta_j, k = r+1, \dots, n.$$

Somit wird T_X (lokal) beschrieben durch die Menge

$$\{ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x_k - f_k(x_1, \dots, x_r) = 0, \xi_k - \sum_{j=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_r) \xi_j = 0, k = r+1, \dots, n \}.$$

Da die zugehörige Funktionalmatrix wie folgt aussieht:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} * & E_{n-r} & 0 & 0 \\ \hline * & 0 & * & E_{n-r} \end{array} \right)$$

und somit offensichtlich den Rang $2n - 2r$ besitzt, ist $T_X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $2r$.

Eine (lokale) Trivialisierung bekommt man in der vorigen Situation sehr einfach durch

$$X \times \mathbb{R}^r \ni (x, \xi') \longmapsto (x, \xi) \in T_X \subset X \times \mathbb{R}^n,$$

wobei $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ und $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ durch die Formel (*) gegeben wird. Die restlichen Aussagen sind unproblematisch. \square

Man kann dieses Ergebnis auch mit den beiden anderen Erscheinungsformen des Tangentialraums einsehen. Wir illustrieren dies zunächst am Fall des „Flachmachens“. Offensichtlich ist das folgende Beispiel.

Beispiel. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ linear und r -dimensional. Dann ist $T_{X,x} = X$ für alle $x \in X$, s. d. $T_X = X \times X \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ trivial ist.

Wir betrachten nun allgemeiner zwei Untermannigfaltigkeiten $X_1, X_2 \subset U \subset \mathbb{R}^n$, die unter einem Diffeomorphismus $F \in \mathcal{C}^\infty(U, U)$ aufeinander abgebildet werden: $F(X_1) = X_2$. Ist φ_1 eine (lokale) Parametrisierung von X_1 , so ist $\varphi_2 := F \circ \varphi_1$ eine Parametrisierung von X_2 . Aus der obigen Beschreibung der Tangentialbündel von X_1 und X_2 und der Kettenregel ergibt sich dann sofort der folgende Satz.

Satz 4.2 Die Abbildung

$$\begin{cases} U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n \\ (x, \xi) \longmapsto (F(x), (DF)_x \xi) \end{cases}$$

induziert einen Diffeomorphismus von T_{X_1} nach T_{X_2} , so daß das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{X_1} & \xrightarrow{\sim} & T_{X_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \xrightarrow{F} & X_2 \end{array}$$

kommutativ ist.

Wendet man diesen Satz auf einen (lokalen) *Flachmacher* F einer Untermannigfaltigkeit X an und verwendet man die Bemerkung in dem vorstehenden Beispiel, so ergibt sich erneut die lokale Trivialität des Tangentialbündels einer Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n .

Im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir das Tangentialbündel T_X zu einer Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$ mit einem geeigneten Atlas beschreiben. Dies liefert uns sofort die Möglichkeit, das Tangentialbündel auch für abstrakte Mannigfaltigkeiten *rein formal* einzuführen. Selbstverständlich werden wir uns nicht mit einer solchen formalen Beschreibung zufriedengeben, sondern diese auf einem konzeptionellen Hintergrund beleuchten.

Es sei also (U, ψ, V) eine Karte auf der r -dimensionalen Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\varphi = \psi^{-1} : V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ auffaßbar als differenzierbare Abbildung von $V \subset \mathbb{R}^r$ nach \mathbb{R}^n . Man sieht dann leicht, daß die Abbildung

$$V \times \mathbb{R}^r \ni (x, v) \longmapsto \Phi(x, v) := (\varphi(x), (D\varphi)_x \cdot v) \in T_X$$

einen *Diffeomorphismus* von $V \times \mathbb{R}^r$ nach $T_X|_U := \pi^{-1}(U)$ liefert, der auf den jeweiligen Fasern ein linearer Isomorphismus ist. Durchläuft dann (V, φ, U) einen *Atlas* von X , so bilden die Tripel $(V \times \mathbb{R}^r, \Phi, T_X|_U)$ einen Atlas von T_X . Es ist nun außerordentlich einfach, den (abstrakten) 1-Cozyklus zu diesem Atlas zu berechnen: Sind (V_j, φ_j, U_j) und (V_k, φ_k, U_k) zwei Karten von X , und ist $\varphi_{kj} = \varphi_k^{-1} \circ \varphi_j$ der entsprechende Kartenwechsel auf V_{kj} , so wird offensichtlich der entsprechende Kartenwechsel

$$(+) \quad V_{kj} \times \mathbb{R}^r \longrightarrow V_{jk} \times \mathbb{R}^r$$

auf T_X gegeben durch

$$(++) \quad (x_j, v_j) \longmapsto (x_k, v_k) = \Phi_{kj}(x_j, v_j) := (\varphi_{kj}(x_j), (D\varphi_{kj})_{x_j} \cdot v_j).$$

Wie oben schon angedeutet, kann man vermittels (+) und (++) aus einem abstrakten 1-Cozyklus $\{\varphi_{kj}\}$ zu einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit X einen abstrakten 1-Cozyklus zu einer $2n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit $\{\Phi_{kj}\}$ gewinnen. Der hieraus konstruierte topologische Raum, den wir mit T_X bezeichnen wollen, erfüllt tatsächlich, wie man sich einfach überlegt, das Hausdorffsche Trennungs-Axiom und das 2. Abzählbarkeits-Axiom - schlicht deshalb, weil dies für den 1-Cozyklus $\{\varphi_{kj}\}$ der Fall ist (dieser verklebt sich ja zu der vorgegebenen Mannigfaltigkeit X ; siehe hierzu auch das folgende Kapitel). Außerdem hat man eine kanonische differenzierbare Projektion $\pi : T_X \rightarrow X$, die alle Eigenschaften der entsprechenden Abbildung im Falle von Untermannigfaltigkeiten besitzt (siehe

Satz 1). Selbstverständlich hängt das so konstruierte *Tangentialbündel* T_X von der Vorgabe des Cozyklus $\{\varphi_{kj}\}$ ab. Wählt man einen anderen solchen Zyklus, so ist das entsprechende Tangentialbündel nur *diffeomorph* zu T_X über X (siehe zu diesem Begriff das nächste Kapitel). Dieses Phänomen liegt aber in der Natur der Sache, da ja auch die abstrakte Mannigfaltigkeit X nur „bis auf Diffeomorphie“ durch den Cozyklus $\{\varphi_{kj}\}$ bestimmt ist.

Was an dieser Konstruktion letztlich unbefriedigend ist, ist die (vermeintliche) Tatsache, daß der *Tangentialraum* $T_{X,x} := \pi^{-1}(x)$ von X an der Stelle x keinerlei konzeptionelle Bedeutung zu haben scheint. Bei genauerem Hinschauen sieht man jedoch mehr. Wie im Fall der Untermannigfaltigkeiten betrachten wir zu fest vorgegebenem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbare Kurven $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ mit $\alpha(0) = x_0$. Differenzierbarkeit bedeutet nach unserer früheren Definition nichts anderes, als daß bezüglich jeder Karte (U, ψ, V) mit $x_0 \in U$ und - ohne Einschränkung - $\psi(x_0) = 0$ die Komposition $\tilde{\alpha} := \psi \circ \alpha$ differenzierbar ist (die Komposition existiert natürlich, wenn man $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählt). In der Menge dieser Kurven führen wir dann eine Relation ein durch

$$\alpha_1 \sim_{x_0} \alpha_2 \iff \tilde{\alpha}'_1(0) = \tilde{\alpha}'_2(0).$$

Man sieht unmittelbar, daß diese Definition von der gewählten Karte unabhängig ist und tatsächlich eine Äquivalenzrelation liefert. Wir nennen dann die Menge der Äquivalenzklassen den *Tangentialraum* T_{X,x_0} von X an der Stelle x_0 . Wählt man aus einer Äquivalenzklasse eine Kurve α aus, so ist der Wert $\tilde{\alpha}'(0) \in \mathbb{R}^n$, $n = \dim_{x_0} X$, nur von der Klasse abhängig; auf diese Weise erhält man eine Bijektion

$$(\tilde{D}\psi)_{x_0} : T_{X,x_0} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die sich unter Koordinatentransformation gut verhält: Aus der Beziehung

$$(\psi_k \circ \alpha) = (\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j) \circ (\psi_j \circ \alpha)$$

folgt sofort

$$(\times) \quad (\tilde{D}\psi_k)_{x_0} = (D\varphi_{kj})_0 \circ (\tilde{D}\psi_j)_{x_0}.$$

Die bedeutet insbesondere: man kann vermöge $(\tilde{D}\psi)_{x_0}$ die Vektorraum-Struktur von \mathbb{R}^n nach T_{X,x_0} liften, und diese Struktur ist unabhängig von der ausgewählten Karte.

Betrachte nun

$$T_X := \bigsqcup_{x \in X} T_{X,x}$$

zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : T_X \rightarrow X$. Auf

$$\bigsqcup_{x_0 \in U} T_{X,x_0} = \pi^{-1}(U)$$

bekommt man durch $(\tilde{D}\psi)_{x_0}$, $x_0 \in U$, eine Bijektion nach $U \times \mathbb{R}^n$, und im Durchschnitt zweier solcher Karten $U_j \times \mathbb{R}^n$ und $U_k \times \mathbb{R}^n$ verkleben sich diese auf die „richtige“ (insbesondere differenzierbare) Weise:

$$U_{kj} \times \mathbb{R}^n \ni (x, v_j) \longmapsto (x, (D\varphi_{kj})_{\psi_j(x)} \cdot v_j) \in U_{jk} \times \mathbb{R}^n.$$

Damit kann man, unabhängig von der gewählten Kartenüberdeckung, T_X mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen, so daß π differenzierbar und T_X bzgl. π lokal trivial wird und jeder Kartenwechsel die gewünschte Form besitzt. T_X kann daher zu Recht als das Tangentialbündel von X bezeichnet werden. Selbstverständlich ist es im Falle einer Untermannigfaltigkeit „isomorph“ zu dem klassischen Tangentialbündel.

Hat man speziell eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ als Mannigfaltigkeit vorliegen, so gewinnt man mit der Karte (V, id, V) die *kanonische* Isomorphie

$$(\tilde{D}\text{id})_x : T_{V,x} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an jeder Stelle $x \in V$. Die Zusammensetzung von $(\tilde{D}\psi)_x : T_{X,x} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Inversen zu $(\tilde{D}\text{id})_{\psi(x)} : T_{V,\psi(x)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ bezeichnen wir als das *Differential* von ψ an der Stelle x :

$$(D\psi)_x := (\tilde{D}\text{id})_{\psi(x)}^{-1} \circ (\tilde{D}\psi)_x : T_{X,x} \rightarrow T_{V,\psi(x)}.$$

Dieser lineare Isomorphismus ist *mengentheoretisch* denkbar einfach zu beschreiben: Ist der Vektor $v \in T_{X,x}$ die Restklasse zu einer differenzierbaren Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$, so ist sein Bild in $T_{V,\psi(x)}$ die entsprechende Restklasse der Kurve $\psi \circ \alpha$.

Die letzte Bemerkung erlaubt es uns, auch das *Differential einer differenzierbaren Abbildung* $f : X \rightarrow Y$ im Punkte $x \in X$ zu erklären, indem man von der Kurve α zu der Kurve $f \circ \alpha$ übergeht. Dies liefert dann eine kanonische Abbildung

$$(Df)_x : T_{X,x} \rightarrow T_{Y,f(x)}.$$

Wählt man wie oben Karten um x und $y = f(x)$, so ist $(Df)_x$ natürlich die Zusammensetzung der Differentiale $(D\psi)_x$, $(D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi))_{\psi(x)}$ und $(D\tilde{\varphi})_{\tilde{\psi}(y)}$. Die hierdurch vermöge des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} T_{X,x} & \xrightarrow{(Df)_x} & T_{Y,y} \\ (\tilde{D}\psi)_x \downarrow & & \downarrow (\tilde{D}\tilde{\psi})_y \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

induzierte Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist nichts anderes als das *klassische Differential* $(D(\tilde{\psi} \circ f \circ \varphi))_{\psi(x)}$. Insbesondere ist das Differential eine *lineare* Abbildung. Außerdem folgt hieraus, daß Df , aufgefaßt als Abbildung $T_X \rightarrow T_Y$, *differenzierbar* ist. - Wir fassen zusammen:

Satz 4.3 *Zu jeder differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt es eine wohlbestimmte differenzierbare Abbildung $Df : T_X \rightarrow T_Y$, die in jedem Punkt $x \in X$ mit dem (linearen) Differential $(Df)_x : T_{X,x} \rightarrow T_{Y,f(x)}$ übereinstimmt. Insbesondere ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} T_X & \xrightarrow{Df} & T_Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

kommutativ.

Bemerkungen. 1. Mit unseren vorigen Ausführungen kann man sich leicht davon überzeugen, daß das so definierte Differential in allen Fällen, in denen schon ein *klassisches* Differential mittels der Funktionalmatrix erklärt ist, mit diesem auf natürliche Weise identifiziert werden kann.

2. Ist $\alpha : I := (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x_0$, so ist der durch α definierte Tangentialvektor in T_{x_0} nichts anderes als das Bild

$$(D\alpha)_0(v_0),$$

wobei $v_0 \in T_{I,0}$ der durch den Weg $\gamma(t) := t$ bestimmte Einheitsvektor ist.

Das (Aufstellen und) Beweisen der naheliegenden Rechenregeln wie $D\text{id}_X = \text{id}_{T_X}$ und z. B. der *Kettenregel*

$$D(g \circ f) = Dg \circ Df$$

überlassen wir dem Leser. Satz 2 ist damit nur ein Spezialfall des vorstehenden Satzes.

5 Vektorraum- und Faserbündel

Wir machen das Beispiel des Tangentialbündels zur Grundlage einer weitreichenden Verallgemeinerung.

Definition. Es seien E und X differenzierbare Mannigfaltigkeiten, und $\pi : E \rightarrow X$ sei eine differenzierbare Abbildung. Das Tripel (E, π, X) heißt ein (differenzierbares) *Faserbündel*, wenn es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$, eine weitere differenzierbare Mannigfaltigkeit F und einen Diffeomorphismus $\chi_U : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$ gibt, so daß das folgende Standarddiagramm kommutativ wird:

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) \\ p = \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

Bemerkungen. 1. Die Fasern $E_x = \pi^{-1}(x)$ sind unter χ_U^{-1} diffeomorph zu der Untermannigfaltigkeit $\{x\} \times F \subset U \times F$, also selbst Untermannigfaltigkeiten, die für alle $x \in U$ diffeomorph zu F sind (daher bekommt F keinen Index x_0). Es ist leicht zu sehen, daß diese Aussage über jeder Zusammenhangskomponente von X richtig bleibt; auf einer solchen hat (E, π, X) an jeder Stelle den gleichen „Fasertyp“ F (bis auf Diffeomorphie). Wollen wir das auf ganz X verlangen, auch wenn X nicht zusammenhängend ist, so schreiben wir den Fasertyp mit in die Definition, bezeichnen das Bündel also durch ein Quadrupel $(E, \pi, X; F)$ anstelle des Tripels (E, π, X) .

2. π (lokal) eine Projektion und surjektiv. Insbesondere ist π eine Submersion. Es gilt für $e \in E$ mit $\chi_U^{-1}(e) = (x, v)$, daß

$$\dim_e E = \dim_x X + \dim_v F.$$

Beispiel. Das sogenannte *triviale* Faserbündel über X mit Faser F ist gegeben durch das kartesische Produkt $E = X \times F$, zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi := \text{pr}_1 : E = X \times F \rightarrow X$. Insbesondere macht die Identität $\text{id} : E := X \rightarrow X$ die Mannigfaltigkeit X zu einem Bündel über sich selbst (mit einpunktigem Fasertyp).

Bemerkung. Ersetzt man in der obigen Definition überall den Begriff der *Differenzierbarkeit* durch *C^k -differenzierbar*, so gelangt man zur Definition von *C^k -Bündeln* über einer *C^k -Mannigfaltigkeit* X . Insbesondere sind hierdurch auch *reell-analytische* und *komplex-analytische Bündel* erklärt.

Die für unsere Belange interessanteste Beispielklasse ist die der *Vektorraumbündel*:

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ heißt ein (reelles) *Vektor(raum)bündel* vom Rang r , wenn F und alle E_x reelle Vektorräume der Dimension r und alle Abbildungen

$$\chi_{U,x} := \chi_U|_{\{x\} \times F} : F \cong \{x\} \times F \rightarrow E_x$$

linear(e Isomorphismen) sind. Ist der Rang $r = 1$, so spricht man auch von einem *Geradenbündel* (oder *Linienbündel*). Entsprechend definiert man *komplexe* Vektorbündel.

Der ganz andere Spezialfall einer *Überlagerung* hat ein *topologisches* Interesse. Wir kommen hierauf noch am Ende dieses Kapitels zurück.

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ mit nulldimensionalem (also diskretem, abzählbarem) Fasertyp F heißt eine (*unbegrenzte, unverzweigte*) *Überlagerung* von X (mit der Blätterzahl $\text{card } F$). In diesem Fall ist (lokal um $x_0 \in X$):

$$\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{\iota \in F} U_\iota, \quad \pi|_{U_\iota} : U_\iota \rightarrow U \quad \text{Diffeomorphismen.}$$

Man nennt dann ein solches U eine *gleichmäßig überlagerte* Umgebung.

Definition. Ein (differenzierbarer) *Morphismus* von *Faserbündeln* $(E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$ ist ein Paar (f, g) von differenzierbaren Abbildungen $f: X \rightarrow X'$, $g: E \rightarrow E'$, s. d. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

kommutiert. Dies bedeutet, daß g die Faser E_x über einem Punkt $x \in X$ in die Faser $E'_{x'}$ über dem Bildpunkt $x' = f(x)$ von x unter f abbildet. Ist insbesondere $X = X'$ und $f = \text{id}$, so spricht man auch von *X-Morphismen* oder *Morphismen über X*. Es ist klar, was *Isomorphismen* in der *Kategorie* der Faserbündel sind. Die lokale Trivialität eines Faserbündels $(E, \pi, X; F)$ kann man dann auch folgendermaßen beschreiben: Zu jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung $U \subset X$, so daß das eingeschränkte Bündel $E|_U := \pi^{-1}(U) \rightarrow U$ über U isomorph zu dem trivialen Bündel $U \times F \rightarrow U$ ist.

Hat man Vektorbündel vorliegen, so spricht man von einem *Vektorbündel-Homomorphismus*, wenn die induzierten Faserabbildungen $g_x = g|_{E_x}: E_x \rightarrow E'_{x'}$ linear sind. In diesem Falle ist (f, g) genau dann ein *Vektorbündel-Isomorphismus*, wenn f ein Diffeomorphismus ist und alle Faserabbildungen g_x lineare Isomorphismen sind. - Wir führen noch die folgende Notation ein.

Definition. Die Menge aller *X-Homomorphismen* $E \rightarrow E'$ von Vektorbündeln E, E' über X wird mit

$$\text{Hom}_X(E, E')$$

bezeichnet. Sie trägt die kanonische Struktur eines $C^\infty(X, \mathbb{R})$ -Moduls.

Außerdem ist auch die folgende Sprechweise nützlich.

Definition. Ein Faserbündel $(E, \pi, X; F)$ heißt *trivialisierbar*, wenn es einen *X-Isomorphismus* nach $(X \times F, \text{pr}_1, X; F)$ besitzt. Ist insbesondere das Tangentialbündel T_X einer Mannigfaltigkeit X trivialisierbar, so heißt die Mannigfaltigkeit X *parallelisierbar*. Dies besagt (siehe das nächste Kapitel), daß es $n = \dim X$ *Vektorfelder* auf ganz X gibt, die an jeder Stelle $x \in X$ linear unabhängig sind, also in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums $T_{X,x}$ bilden.

Beispiel. Die Sphären S^1 und S^3 sind parallelisierbar (Übungsaufgabe). Dies ist sonst nur noch für die Sphäre der Dimension 7 (und der Dimension 0) richtig³; die Sphären *gerader* Dimension tragen nicht einmal globale Vektorfelder ohne Nullstellen, wie der berühmte *Satz vom stetig gekämmten Igel* aussagt.

Wir wollen jetzt Bündel vermöge geeigneter 1-Cozyklen beschreiben und durch *Verkleben* wieder rekonstruieren. Ist $(E, \pi, X; F)$ ein Faserbündel, so gibt es eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ von X , s. d. für alle j eine Trivialisierung

$$\begin{array}{ccc} U_j \times F & \xrightarrow{\chi_j} & \pi^{-1}(U_j) \\ \text{pr}_1 \searrow & & \swarrow \pi \\ & U_j & \end{array}$$

existiert. Sind $j, k \in I$ gegeben, so schreiben wir wie in Kapitel 0 $U_{kj} = U_k \cap U_j$ als Teilmenge von U_j , also entsprechend $U_{jk} \subset U_k$ etc. Wir haben dann einen Bündelisomorphismus

³Den wundersamen Grund für diese Tatsache findet man z. B. in dem Artikel *Divisionsalgebren und Topologie* von F. HIRZEBRUCH, der als Kapitel 11 auf den Seiten 233–252 in dem Springer-Lehrbuch EBBINGHAUS ET AL.: *Zahlen*, dritte verbesserte Auflage, enthalten ist.

$$\begin{array}{ccc}
U_{kj} \times F & \xrightarrow{\chi_{kj}} & U_{jk} \times F \\
\text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\
U_j \supset U_{kj} & \xrightarrow{\text{id}} & U_{jk} \subset U_k
\end{array}$$

wobei $\chi_{kj} = \chi_k^{-1} \circ \chi_j$ ein Diffeomorphismus von der Gestalt

$$\chi_{kj}(x, v) = (x, \theta_{kj}(x, v))$$

ist. Die χ_{kj} heißen auch *Übergangs- oder Transformations-Diffeomorphismen* zu dem Faserbündel E und der trivialisierenden Überdeckung \mathfrak{U} . Aufgrund der Konstruktion ist unmittelbar klar, daß χ_{jj} die Identität auf $U_j \times F$ ist, weiter $\chi_{jk} = \chi_{kj}^{-1}$ gilt und auf dreifachen Durchschnitten die *Cozykel-Bedingung*

$$\chi_{\ell k} \circ \chi_{kj} = \chi_{\ell j}$$

erfüllt ist. Wie in Kapitel 0 sieht man sofort, daß die Cozykel-Bedingung die beiden ersten Aussagen impliziert.

Definition. Man nennt 1-Cozyklen vom obigen Typ auch *1-Cozyklen auf der Mannigfaltigkeit X mit Werten in der Gruppe $\text{Diff}(F)$* .

Der Grund für diese Bezeichnung ist der folgende: Bei festem $x \in U_{kj}$ muß die Abbildung $v \mapsto \theta_{kj}(x, v)$ ein Diffeomorphismus der Faser $F \cong \{x\} \times F$ sein. Wir fassen daher θ_{kj} als Abbildung

$$\theta_{kj} : U_{kj} \longrightarrow \text{Diff}(F),$$

in die Gruppe $\text{Diff}(F)$ der Diffeomorphismen von F auf. Wir nennen eine beliebige Abbildung von dieser Art eine durch U_{kj} *differenzierbar parametrisierte* Familie von Diffeomorphismen von F , wenn umgekehrt die mit Hilfe von θ_{kj} wie oben *definierte* Abbildung χ_{kj} einen Diffeomorphismus auf $U_{kj} \times F$ darstellt.

Bemerkung. Da die χ_{kj} eindeutig durch die θ_{kj} bestimmt sind und umgekehrt, nennt man auch das System der letzteren einen 1-Cozyklus mit Werten in $\text{Diff}(F)$. Die Cozykel-Bedingung ist in dieser Terminologie allerdings etwas komplizierter. Sie lautet

$$\theta_{\ell k}(x, \theta_{kj}(x, v)) = \theta_{\ell j}(x, v).$$

Die ersten beiden Bedingungen lauten $\theta_{jj}(x, v) = v$ und $\theta_{jk}(x, v) = \theta_{kj}^{-1}(x, v)$.

Liegt speziell ein (reelles) *Vektorbündel* vor, so ist θ_{kj} notwendig von der Form

$$\theta_{kj}(x, v) = A_{kj}(x) \cdot v,$$

wobei $A_{kj}(x)$ für alle $x \in U_{kj}$ eine (reelle) invertierbare $r \times r$ -Matrix bezeichnet; hierbei ist $r = \text{rang } E$. Man nennt die A_{kj} die *Übergangsmatrizen* des Bündels E zur vorgegebenen trivialisierenden Überdeckung \mathfrak{U} . Damit diese Familie von linearen Isomorphismen *differenzierbar* parametrisiert ist, müssen selbstverständlich die Einträge der Matrix $A_{kj}(x)$ differenzierbare Funktionen auf U_{kj} sein. Wir sprechen in diesem Fall von einem (differenzierbaren) 1-Cozyklus mit Werten in der Gruppe $\text{GL}(r, \mathbb{R})$. Die Cozykel-Bedingungen lauten in diesem Fall explizit:

$$A_{jj}(x) = E_r, \quad A_{jk}(x) = (A_{kj}(x))^{-1}, \quad A_{\ell k}(x) \cdot A_{kj}(x) = A_{\ell j}(x).$$

Beispiel. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einem Atlas $\mathfrak{A} = \{(V_j, \varphi_j, U_j)\}$, so bilden die (unter ψ_j gelifteten) Funktional-Matrizen $D\varphi_{kj}$, also genauer die Matrizen $D\varphi_{kj}(\psi_j(x))$, einen solchen 1-Cozyklus. Er kommt selbstverständlich von dem *Tangentialbündel* T_X her. Man rechnet aber sofort nach, daß auch die Matrizen ${}^t(D\varphi_{kj})^{-1}$ einen differenzierbaren 1-Cozyklus mit Werten in $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ bilden. Dieser gibt Anlaß zu dem sogenannten *Cotangentialbündel*.

Bevor wir den genauen Zusammenhang zwischen Bündeln und 1-Cozyklen klären, wollen wir die vorstehenden Begriffe noch weiter spezialisieren. Fixieren wir eine feste Untergruppe G von $\text{Diff}(F)$, so ist offensichtlich, wie ein Cozyklus mit Werten in G zu erklären ist. Wir nennen ein Faserbündel $E \rightarrow X$ ein G -Bündel oder ein Bündel mit *Strukturgruppe* G , wenn E bzgl. einer trivialisierenden Überdeckung zu einem 1-Cozyklus mit Werten in G führt. Wir schreiben dann gelegentlich auch $(E, \pi, X; F, G)$. Im Falle von Vektorraumbündeln hat man sich hierbei auf Untergruppen von $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ wie z. B. $\text{SL}(r, \mathbb{R})$ oder $\text{O}(r, \mathbb{R})$ etc. zu beschränken. Ein weiterer wichtiger Fall ist der einer *Liegruppe* G (siehe Kapitel 13). G ist selbst eine Mannigfaltigkeit, und durch Multiplikation (von links) operiert G auf sich selbst, wodurch G als Untergruppe von $\text{Diff}(G)$ aufgefaßt werden kann. Ein Faserbündel mit Faser G und Strukturgruppe G wird ein G -*Prinzipalbündel* genannt. Jedes (reelle) Vektorraumbündel vom Rang r gibt Anlaß zu einem $\text{GL}(r, \mathbb{R})$ -Prinzipalbündel.

Wir wollen nun umgekehrt aus einem 1-Cozyklus auf X mit Werten in $G \subset \text{Diff}(F)$ ein G -Faserbündel mit Faser F konstruieren. Genauer beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 5.1 *Es sei $\{\chi_{kj}\}$ ein 1-Cozyklus auf der Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in I}$ von X mit Werten in $\text{Diff}(F)$. Dann gibt es auf X ein Faserbündel mit Faser F , das bzgl. \mathfrak{U} trivialisierbar ist und die vorgegebenen Übergangs-Diffeomorphismen besitzt.*

Beweis. Wir werden der Bequemlichkeit halber annehmen, daß die Überdeckungselemente $U_j \in \mathfrak{U}$ schon zu einem Atlas (U_j, ψ_j, V_j) von X gehören. Wir gewinnen dann einen *abstrakten* 1-Cozyklus $\tilde{\chi}_{kj}$ zu den Mengen $V_{kj} \times F$ durch

$$\tilde{\chi}_{kj}(x_j, v) := (\varphi_{kj}(x_j), \theta_{kj}(\varphi_j(x_j), v)).$$

Durch Verheften wie im Kapitel 0 gewinnt man hieraus einen lokal-euklidischen Raum E zusammen mit einer kanonischen Projektion $\pi : E \rightarrow X$, so daß E lokal ein Produkt mit F und π dort die Projektion auf den ersten Faktor ist. Da nach Voraussetzung X und F hausdorffsch sind und dem zweiten Abzählbarkeits-Axiom genügen, ist dies, wie man leicht sieht, auch für E der Fall. Wir überlassen dem Leser die Einzelheiten des Nachweises, daß dieses Bündel die geforderten Eigenschaften besitzt. \square

Was passiert nun, wenn man die beiden oben beschriebenen Konstruktionen hintereinander durchführt? Startet man zuerst mit einer trivialisierenden Überdeckung zu E und assoziiert hierzu (bei fest gewählten lokalen Trivialisierungen) einen 1-Cozyklus, so ist das aus dem Cozyklus gewonnene Bündel offensichtlich (nur) X -isomorph zu E . Auf der anderen Seite gewinnen wir aus dem Bündel zu einem 1-Cozyklus diesen auch nicht notwendig zurück, da die lokalen Trivialisierungen nicht „gottgegeben“ sind. Wir müssen also etwas genauer studieren, wie sich der einem Bündel zugeordnete 1-Cozyklus ändert, wenn man zwar die trivialisierende Überdeckung beibehält, die lokalen Trivialisierungen aber beliebig wählt.

Satz 5.2 *Zwei Cozyklen $\{\chi_{kj}\}$ und $\{\tilde{\chi}_{kj}\}$ auf der Mannigfaltigkeit X bzgl. der offenen Überdeckung \mathfrak{U} definieren genau dann das gleiche Faserbündel (bis auf Isomorphie über X), wenn es Diffeomorphismen η_j von $U_j \times F$ in sich über U_j gibt, so daß*

$$\tilde{\chi}_{kj} = \eta_k^{-1} \circ \chi_{kj} \circ \eta_j.$$

Beweis. Es seien $\chi_j : U_j \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ und $\tilde{\chi}_j : U_j \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ die zwei Systeme von lokalen Trivialisierungen. Man setzt dann $\eta_j := \chi_j^{-1} \circ \tilde{\chi}_j$ und bekommt

$$\tilde{\chi}_{kj} = \tilde{\chi}_k^{-1} \circ \tilde{\chi}_j = \eta_k^{-1} \circ (\chi_k^{-1} \circ \chi_j) \circ \eta_j = \eta_k^{-1} \circ \chi_{kj} \circ \eta_j.$$

Die umgekehrte Richtung folgt entsprechend. \square

Definition. Unter der Voraussetzung des vorstehenden Satzes sagt man, daß die 1-Cozyklen $\{\chi_{kj}\}$ und $\{\tilde{\chi}_{kj}\}$ *cohomolog* sind. Haben die beiden Cozyklen Werte in der Untergruppe $G \subset \text{Diff}(F)$, so heißen sie G -*cohomolog*, wenn die η_j so gewählt werden können, daß ihre Einschränkungen auf die Fasern F

Elemente von G sind. Cohomologie und G -Cohomologie sind selbstredend Äquivalenzrelationen. Die Menge der Äquivalenzklassen von 1-Cozyklen nach dieser Äquivalenz heißt die 1. Cohomologiemenge von X zur Überdeckung \mathfrak{U} mit Werten in $\text{Diff}(F)$ bzw. in G . Wir bezeichnen sie mit

$$H^1(\mathfrak{U}, \text{Diff}(F)) \quad \text{bzw.} \quad H^1(\mathfrak{U}, G).$$

Bemerkung. I. a. sind diese Cohomologiemengen keine Gruppen. Dies ist jedoch dann richtig, wenn die Gruppe G abelsch ist. In diesem Fall lassen sich auch leicht die höheren Cohomologiegruppen erklären. Die Menge $H^1(\mathfrak{U}, G)$ besitzt aber immer ein ausgezeichnetes Element.

Aufgrund unserer obigen Überlegungen ist das folgende Ergebnis ohne weitere Erläuterungen ein-sichtig.

Satz 5.3 Die Menge der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X mit trivialisierender Überdeckung \mathfrak{U} steht in eindeutiger Korrespondenz zu der ersten Cohomologiemenge $H^1(\mathfrak{U}, G)$. Hierbei entspricht das triviale Bündel genau dem ausgezeichneten Element der Cohomologiemenge. Mit anderen Worten: Ein Bündel ist (global) trivialisierbar, also isomorph zu dem trivialen Bündel, wenn in geeigneter Überdeckung $\chi_{k_j} = \eta_k^{-1} \circ \eta_j$ gilt.

Wir müssen uns jetzt noch von der Bindung an die spezielle trivialisierende Überdeckung \mathfrak{U} lösen. Hierzu bemerkt man folgendes: Ist \mathfrak{W} eine Verfeinerung von \mathfrak{U} , so induziert jeder Cozyklus auf \mathfrak{U} einen solchen auf \mathfrak{W} (sogar unabhängig von der Verfeinerungsabbildung), und man kann leicht zeigen, daß die zugehörigen Faserbündel bis auf Isomorphie gleich sind. Da überdies je zwei Überdeckungen von X eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, genügt es zur Entscheidung über die Isomorphie von Bündeln eine gemeinsame trivialisierende Überdeckung zu betrachten. Diese Überlegungen führen zu der Konstruktion einer kanonischen Abbildung

$$H^1(\mathfrak{U}, G) \longrightarrow H^1(\mathfrak{W}, G)$$

und der Einführung der Cohomologiemenge von X als direkten Limes über alle diese Mengen:

$$H^1(X, G) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^1(\mathfrak{U}, G).$$

Entsprechend zu dem obigen Satz hat man das folgende endgültige Resultat zur Beschreibung der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X .

Satz 5.4 Die Menge der Isomorphieklassen von G -Bündeln auf X steht in eindeutiger Korrespondenz zu der ersten Cohomologiemenge $H^1(X, G)$.

Bemerkung. Führt man z. B. das Tangentialbündel einer Mannigfaltigkeit durch den üblichen 1-Cozyklus zu einem Atlas ein, so sind im Prinzip all die vorstehenden Überlegungen notwendig, um einzusehen, daß dieses Bündel von der speziellen Wahl des Atlases unabhängig ist.

Wir kommen nun nochmals zu den Homomorphismen in der Kategorie der Faserbündel zurück. Insbesondere wollen wir auch diese durch Übergangsbedingungen beschreiben.

Es sei also (f, g) ein Morphismus $(E, \pi, X) \rightarrow (E', \pi', X')$ von Faserbündeln. Da $f : X \rightarrow X'$ eine stetige Abbildung ist, findet man trivialisierende Überdeckungen $\mathfrak{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ auf X für E und $\mathfrak{U}' = \{U'_\iota\}_{\iota \in I}$ auf X' für E' so, daß $f(U_j) \subset U'_\iota$, $\iota = \iota(j)$. Mit den Trivialisierungen

$$\chi_j : U_j \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_j), \quad \chi'_\iota : U'_\iota \times F' \longrightarrow \pi'^{-1}(U'_\iota)$$

gewinnt man kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U_j \times F & \xrightarrow{g_{\iota j}} & U'_\iota \times F' \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_j & \xrightarrow{f} & U'_\iota \end{array}$$

mit $g_{\iota j} := \chi_{\iota}^{\prime -1} \circ g \circ \chi_j$. Wir schreiben $g_{\iota j}(x, \xi) = (f(x), G_{\iota j}(x, \xi))$ mit geeigneten differenzierbaren Abbildungen

$$G_{\iota j} : U_j \times F \longrightarrow F' .$$

Im Falle von Vektorbündeln ist $G_{\iota j}(x, \xi) = G_{\iota j}(x) \cdot \xi$ mit differenzierbaren Matrizen $G_{\iota j}(x)$, $x \in U_j$.

Nehmen wir nun an, daß entsprechend $f(U_k) \subset U'_{\kappa}$, so daß auch $f(U_k \cap U_j) \subset U'_{\kappa} \cap U'_{\iota}$. Nach Definition ist auf dem Durchschnitt

$$g_{\kappa k} = \chi_{\kappa}^{\prime -1} \circ g \circ \chi_k = (\chi_{\kappa}^{\prime -1} \circ \chi_{\iota}^{\prime}) \circ g_{\iota j} \circ (\chi_j^{-1} \circ \chi_k) = \chi_{\kappa \iota}^{\prime} \circ g_{\iota j} \circ \chi_{jk} ,$$

und dies impliziert nach kurzer Rechnung

$$G_{\kappa k}(x, \xi) = \theta'_{\kappa \iota}(f(x), G_{\iota j}(x, \theta_{jk}(x, \xi)))$$

oder, im Fall von Vektorbündeln,

$$G_{\kappa k}(x) = A'_{\kappa \iota}(f(x)) \cdot G_{\iota j}(x) \cdot A_{jk}(x) .$$

Sind umgekehrt diese Bedingungen erfüllt, so definiert das System der $G_{\iota j}$ zusammen mit f einen Bündelhomomorphismus $E \rightarrow E'$.

Bemerkung. Ist $f = \text{id} : X \rightarrow X$, so kann man natürlich $\iota = j$ und $\kappa = k$ wählen und vereinfacht $G_{\iota j} = G_j$ etc. schreiben. Für Vektorbündel E, E' reduziert sich die obige Bedingung dann auf

$$G_k(x) = A'_{kj}(x) \cdot G_j(x) \cdot A_{jk}(x)$$

mit $s \times r$ -Matrizen G_j auf U_j , wobei $r = \text{rang } E$, $s = \text{rang } E'$.

Man kann tatsächlich die allgemeine Situation von Morphismen über stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow X'$ auf den Spezialfall $f = \text{id}$ zurückführen. Ist nämlich $f : X \rightarrow X'$ eine differenzierbare Abbildung und $E' \rightarrow X'$ ein Bündel, so erklärt man die *Liftung* $f^*E' \rightarrow X$ durch das *Faserprodukt*⁴

$$f^*E' := E' \times_{X'} X = \{(e', x) : e' \in E'_{f(x)}\} \subset E' \times X$$

zusammen mit der Projektion nach X . Man hat einen kanonischen Bündelhomomorphismus von f^*E' nach E' :

$$\begin{array}{ccc} f^*E' & \longrightarrow & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Wird das Bündel $E' \rightarrow X'$ bzgl. \mathfrak{U}' durch den 1-Cozyklus $\theta'_{kj} = \theta'_{kj}(x', \xi)$ gegeben, so wird f^*E' definiert durch

$$\theta_{kj}(x, \xi) := \theta'_{kj}(f(x), \xi) , \quad x \in U_j := f^{-1}(U'_j) .$$

Unsere Ableitung der Übergangsbedingungen liefert dann sofort den folgenden

Satz 5.5 *Die Bündelhomomorphismen*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & X' \end{array}$$

⁴Sind $g_j : Y_j \rightarrow Y$, $j = 1, 2$, Abbildungen, so bezeichnet man als Faserprodukt $Y_1 \times_Y Y_2$ die Teilmenge des kartesischen Produkts $Y_1 \times Y_2$, die aus allen Punkten (y_1, y_2) mit $g_1(y_1) = g_2(y_2)$ besteht. In der topologischen Situation versteht man $Y_1 \times_Y Y_2$ mit der Relativtopologie bzgl. der Produkttopologie auf $Y_1 \times Y_2$.

entsprechen eindeutig den X -Morphismen $E \rightarrow f^*E'$.

Beweis. Trivial. □

Ist speziell $i : X \hookrightarrow X'$ eine Untermannigfaltigkeit, so kann man i^*E' als *Einschränkung* $E'|_X$ interpretieren. Wir fassen aufgrund des vorstehenden Satzes auch manchmal das Differential einer differenzierbaren Abbildung $f : X \rightarrow X'$ als X -Morphismus $T_X \rightarrow f^*T_{X'}$ auf.

Anhang: Überlagerungstheorie

Wir behandeln in diesem Anhang noch kurz den Fall der *Überlagerungen*⁵. Da die Faser F hier die diskrete Topologie trägt, sind die Diffeomorphismen von F nichts anderes als die mengentheoretischen *Bijektionen* von F . In Analogie zu dem Fall einer *endlichen* Menge, der auch hier spezielles Interesse verdient, da er zum Begriff der *endlichen Überlagerungen* führt, bezeichnen wir diese Gruppe dann auch als die *Permutationsgruppe* $\text{Perm}(F)$ von F . Eine differenzierbare parametrisierte Familien von Permutationen auf U_{kj} muß offenbar *lokal konstant* sein, besteht also in der Vorgabe einer *einzigsten* Permutation von F auf jeder Zusammenhangskomponente von U_{kj} .

Satz 5.6 *Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und (Y, p, X) eine topologische Überlagerung, so besitzt Y eine eindeutig bestimmte differenzierbare Struktur, so daß p ein lokaler Diffeomorphismus wird.*

Beweis. Die Übergangstransformationen sind auch im stetigen Fall lokal konstante Permutationen von F , und diese sind differenzierbar, wenn man $U_j \times F$ mit der differenzierbaren Produktstruktur versieht. \square

Zunächst betrachten wir zwei wohlbekanntere Beispiele.

Beispiele. 1. Betrachte die Abbildung p von $X = \{(z, w) : w^2 = z\}$, einer komplexen Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^2 , nach \mathbb{C} , die durch die Projektion $p(z, w) := z$ gegeben ist. Diese Abbildung ist über $z_0 = 0$ tatsächlich „verzweigt“ (es liegt insbesondere nur ein Punkt über 0), aber $X^* := X \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Funktionentheoretisch wird sie als die *Riemannsche Fläche* der mehrdeutigen Funktion \sqrt{z} bezeichnet. In der Tat hat das Studium der mehrdeutigen Funktionen die Theorie der Überlagerungen ins Leben gerufen.

2. Die identische Abbildung $\text{id} : D \rightarrow \mathbb{C}$, $D = \{|z| < 1\}$ der *Einheitskreis* in \mathbb{C} , ist *keine* Überlagerung. Um dies einzusehen, betrachte man z. B. einen Punkt $z_0 \in \partial D$. - Dieses Beispiel illustriert die Bedeutung des Adjektivs „unbegrenzt“.

Wir fassen im folgenden die wichtigsten Ergebnisse zur Überlagerungstheorie zusammen. Zur Einstimmung formulieren wir einen Satz, der jedoch *nicht* im zentralen Interesse steht, für den Leser aber einen Test für seine Intuition und mathematischen Fähigkeiten darstellen mag.

Satz 5.7 *Es sei (Y, p, X) , X zusammenhängend, eine Überlagerung vom Blätterttyp F , es seien Y_ι die Zusammenhangskomponenten von Y , und es sei $p_\iota := p|_{Y_\iota}$. Dann sind alle (Y_ι, p_ι, X) Überlagerungen von einem Fasertyp $F_\iota \subset F$, so daß $F = \sqcup F_\iota$.*

Beweis. Eine leichte, aber nicht ganz triviale Übungsaufgabe. Die einzige echte Schwierigkeit im obigen Beweis ist nur die Surjektivität der Abbildungen p_ι . Diese folgt aus dem ersten Teil des folgenden Satzes. \square

Bemerkung. Der vorige Satz ist falsch, wenn X nicht zusammenhängend ist. (Wieso?).

Satz 5.8 (Wege- und Homotopieliftung) *Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung. Dann gibt es zu jedem stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ und jedem $y_0 \in p^{-1}(\gamma(0))$ (genau) eine stetige Liftung $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow Y$, (d. h. $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$) mit $\tilde{\gamma}(0) = y_0$. Sind zwei Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten homotop in X , so sind auch ihre Liftungen (mit gleichem Anfangspunkt) homotop in Y , haben insbesondere auch denselben Endpunkt.*

Beweis. Kompaktheit von $I := [0, 1]$ und $I \times I$. \square

Die Theorie der Gesamtheit *aller* Überlagerungen einer (zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit X gestattet eine Interpretation mit Hilfe ihrer *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X)$. Diese wird nach Wahl eines Punktes $x_0 \in X$ definiert als Raum $L(X, x_0)$ aller „Loops“ (oder „Schleifen“ im Deutschen)

⁵Eine ausführliche Darstellung findet man in STÖCKER - ZIESCHANG [41].

durch x_0 , d. h. aller geschlossener (stetiger) Kurven in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 , *modulo* der Äquivalenzrelation der *Homotopie* von solchen Kurven. (Diese Definition ist bis auf Isomorphie unabhängig von dem „Basispunkt“ x_0 ; wenn wir auf den speziellen Basispunkt x_0 Bezug nehmen, schreiben wir $\pi_1(X, x_0)$ anstelle von $\pi_1(X)$).

Ist $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung zusammenhängender Mannigfaltigkeiten und $f(z_0) = x_0$, so liefert das „Herunterdrücken“ von Schleifen in Z durch z_0 einen wohlbestimmten Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Hat man es hierbei insbesondere mit einer zusammenhängenden Überlagerung (Y, p, X) von X zu tun, so ist die entsprechende Abbildung $p_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ für einen Punkt $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ sogar *injektiv*, da das anschließende Heraufliften einer heruntergedrückten Schleife wegen der Eindeutigkeitsaussage von Satz 8 wieder zum Ausgangsloop zurückführt; wir können also die Fundamentalgruppe von Y im Punkte y_0 mit der Untergruppe $p_*\pi_1(Y, y_0) \subset \pi_1(X, x_0)$ identifizieren. Geht man zu einem anderen Punkt y'_0 in der Faser $p^{-1}(x_0)$ über, so sieht man durch Verbinden der beiden Punkte in Y , daß die beiden Untergruppen $\pi_1(Y, y_0)$ und $\pi_1(Y, y'_0)$ in $\pi_1(X, x_0)$ *konjugiert* sind, und jede zu $\pi_1(Y, y_0)$ konjugierte Untergruppe vermittels eines geeigneten Punktes $y'_0 \in p^{-1}(x_0)$ beschrieben werden kann.

Definition. Man nennt die eben beschriebene Konjugationsklasse in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ die *charakteristische Klasse* der Überlagerung (Y, p, X) . Man sieht leicht, daß diese nicht wesentlich von dem Punkt x_0 abhängt. Wir bezeichnen sie mit $\mathcal{C}(Y, p, X)$.

Bemerkung. Hier und im folgenden benötigen wir einige einfache Grundbegriffe der Gruppentheorie. Es sei G eine beliebige Gruppe; zwei Untergruppen H_1, H_2 von G heißen (in G) *konjugiert*, wenn es ein Element $g_0 \in G$ gibt mit $H_2 = g_0^{-1}H_1g_0$. Eine Untergruppe H heißt ein *Normalteiler* oder *normale Untergruppe* von G , wenn sie zu sich selbst konjugiert ist, d. h. wenn $g^{-1}hg \in H$ für alle $h \in H, g \in G$. Der *Normalisator* $N_G(H)$ einer Untergruppe $H \subset G$ ist gegeben durch

$$N_G(H) := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}.$$

Er ist die größte Untergruppe von G , in der H als Normalteiler enthalten ist. Genau dann ist H ein Normalteiler, wenn $N_G(H) = G$. Konjugierte Untergruppen besitzen konjugierte Normalisatoren. Der *Index* einer Untergruppe $H \subset G$ ist die Anzahl der Links-Nebenklassen gH (oder auch Rechts-Nebenklassen Hg) in G (siehe hierzu auch den Anhang zu Kapitel 14).

Sind zwei Überlagerungen von X diffeomorph über X , so sind selbstverständlich ihre charakteristischen Klassen gleich. Um die Umkehrung einzusehen, benötigen wir einige Vorbereitungen.

Satz 5.9 (Liftungssatz für Abbildungen) *Es sei $f : Z \rightarrow X$ eine stetige Abbildung in den Basisraum X der Überlagerung (Y, p, X) mit $f(z_0) = x_0$. Genau dann gibt es eine stetige Liftung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ von f mit $\tilde{f}(z_0) = y_0, y_0 \in p^{-1}(x_0)$ fest gewählt, wenn*

$$f_*\pi_1(Z, z_0) \subset p_*\pi_1(Y, y_0).$$

\tilde{f} ist durch die Vorgabe von z_0 und y_0 eindeutig bestimmt. Ist f differenzierbar, so auch \tilde{f} .

Beweis. Nach Voraussetzung ist $p \circ \tilde{f} = f$, und hieraus folgt sofort

$$(*) \quad f_*\pi_1(Z, z_0) = p_*(\tilde{f}_*\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*\pi_1(Y, y_0).$$

Für die umgekehrte Richtung ordnet man jedem Punkt $z \in Z$ einen Weg von z_0 nach z zu, drückt diesen vermöge f nach X herunter und liftet den Bildweg nach Y mit Anfangspunkt y_0 . Den Endpunkt dieses Weges bezeichnen wir mit $\tilde{f}(z)$. Daß diese Definition vom ausgewählten Weg unabhängig ist, wird gerade durch die Bedingung (*) garantiert. Es gilt per Konstruktion $p \circ \tilde{f} = f$. Ist nun U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $f(z)$ und $\tilde{f}(z) \in U$, so bleibt dies wegen der Stetigkeit von f in einer ganzen Umgebung V von z der Fall, und es ist notwendigerweise \tilde{f} auf V die Komposition von f mit der Umkehrabbildung zu der Einschränkung $p|_{U} : U \rightarrow U$. Dies beweist die Stetigkeit von \tilde{f} (und die Differenzierbarkeit, wenn f differenzierbar ist). Die Eindeutigkeitsaussage beweisen wir generell im folgenden Satz. \square

Satz 5.10 Nehmen unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes zwei stetige Liftungen \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 von f an einer Stelle $z_0 \in Z$ den gleichen Wert an, so stimmen sie auf ganz Z überein.

Beweis. Für $z \in Z$ sei U eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von $f(z)$, und es sei $\tilde{f}_j(z) \in U_j$, $j = 1, 2$. $V := (\tilde{f}_1)^{-1}(U_1) \cap (\tilde{f}_2)^{-1}(U_2)$ ist eine offene Umgebung von z . Im Fall, daß beide Liftungen in z denselben Wert besitzen, ist notwendig $U_1 = U_2$, und daher müssen sie auch auf ganz V übereinstimmen. Im anderen Fall ist $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, so daß \tilde{f}_1 und \tilde{f}_2 an keiner Stelle von V übereinstimmen. Infolgedessen ist die Menge der Punkte von Z , in denen sie gleich sind, sowohl offen als auch abgeschlossen. Da sie nach Voraussetzung nicht leer und Z zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. \square

Wir können nun zeigen, daß gleiche charakteristische Klassen zu äquivalenten Überlagerungen gehören.

Satz 5.11 Haben die beiden Überlagerungen (Y_1, p_1, X) und (Y_2, p_2, X) von X die gleiche charakteristische Klasse, so sind sie X -diffeomorph.

Beweis. Wähle $x_0 \in X$ fest und einen Urbildpunkt $y_1 \in p_1^{-1}(x_0)$. Nach Voraussetzung gibt es dann einen Punkt $y_2 \in p_2^{-1}(x_0)$, so daß

$$(p_1)_* \pi_1(Y_1, y_1) = (p_2)_* \pi_1(Y_2, y_2).$$

Wegen des Liftungssatzes können die Liftungsprobleme

$$\begin{array}{ccc} & Y_2 & \\ & \nearrow \tilde{p}_1 & \downarrow p_2 \\ Y_1 & \xrightarrow{p_1} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & Y_1 & \\ & \nearrow \tilde{p}_2 & \downarrow p_1 \\ Y_2 & \xrightarrow{p_2} & X \end{array}$$

mit $\tilde{p}_1(y_1) = y_2$ und $\tilde{p}_2(y_2) = y_1$ gelöst werden. Da die beiden Zusammensetzungen jeweils einen Fixpunkt besitzen, ist wegen des Eindeutigkeitsatzes $\tilde{p}_2 \circ \tilde{p}_1 = \text{id}_{Y_1}$, $\tilde{p}_1 \circ \tilde{p}_2 = \text{id}_{Y_2}$. Somit ist p_1 ein Diffeomorphismus von Y_1 nach Y_2 . \square

Da die Überlagerung (Y, p, X) durch ihre charakteristische Klasse bestimmt ist, muß auch ihre Blätterzahl aus $\mathcal{C}(Y, p, X)$ zu berechnen sein. In der Tat hat man das folgende, leicht zu verifizierende Ergebnis.

Lemma 5.12 Die Blätterzahl der zusammenhängenden Überlagerung (Y, p, X) ist gleich dem Index der charakterisierenden Untergruppe $p_* \pi_1(Y, y_0)$ in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$.

Nach einer weiter oben notierten Bemerkung können wir der charakteristischen Klasse einer Überlagerung $\mathcal{C}(Y, p, X)$ auch die Klasse der Normalisatoren zuordnen, die wir mit $\mathcal{N}(Y, p, X)$ bezeichnen. Sie wird bei Vorgabe eines Punktes $x_0 \in X$ und eines Punktes $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ repräsentiert durch den Normalisator $N(p_* \pi_1(Y, y_0))$ in der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$. Er besitzt, wie wir gleich sehen werden, eine Darstellung in der Gruppe aller Decktransformationen $\text{Deck}_X(Y)$ von Y über X , d. h., per definitionem, aller X -Diffeomorphismen von Y . Genauer bedeutet dies (siehe auch Kapitel 13 für den Fall von Liegruppen):

Satz 5.13 Zu einer zusammenhängenden Überlagerung (Y, π, X) existieren kanonische surjektive Gruppenhomomorphismen

$$N(p_* \pi_1(Y, y_0)) \longrightarrow \text{Deck}_X(Y)$$

mit Kern $p_* \pi_1(Y, y_0)$. Mit anderen Worten: Es bestehen kanonische Isomorphismen

$$N(p_* \pi_1(Y, y_0)) / p_* \pi_1(Y, y_0) \cong \text{Deck}_X(Y).$$

Beweisskizze. Es werde $\gamma \in N(p_*\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$ repräsentiert durch die Schleife α . Liftet man α zu einer Kurve $\tilde{\alpha}$ in Y mit Anfangspunkt y_0 und Endpunkt y'_0 , so gilt

$$p_*\pi_1(Y, y_0) = \gamma p_*\pi_1(Y, y_0)\gamma^{-1} = p_*\pi_1(Y, y'_0).$$

Diese Bedingung ist aber hinreichend dafür, daß die Identität auf X (eindeutig) zu einer Decktransformation $f: Y \rightarrow Y$ mit $f(y_0) = y'_0$ geliftet werden kann (die nur von der Klasse γ abhängig ist). Siehe hierzu den Beweis von Satz 11.

Die Surjektivität sieht man wie folgt: Wähle zu $f \in \text{Deck}_X(Y)$ einen Weg $\tilde{\alpha}$ von y_0 nach $y'_0 = f(y_0)$ und betrachte die Homotopieklasse γ zu $\alpha := \tilde{\alpha} \circ p$. Es ist dann

$$\gamma p_*\pi_1(Y, y_0)\gamma^{-1} = p_*\pi_1(Y, y'_0) = p_*f_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\pi_1(Y, y_0);$$

also liegt γ im Normalisator von $p_*\pi_1(Y, y_0)$. Die γ zugeordnete Decktransformation stimmt mit f in y_0 überein, und muß dann überall mit f übereinstimmen.

Die Berechnung des Kerns erfolgt mit ähnlichen Argumenten und wird dem Leser überlassen. \square

Aufgrund der bisherigen Überlegungen ist der folgende Spezialfall besonders hervorzuheben.

Lemma 5.14 Für eine Überlagerung (\tilde{X}, p, X) von X sind die folgenden Aussagen äquivalent :

- \tilde{X} ist einfach zusammenhängend, besitzt also eine triviale Fundamentalgruppe ;
- die charakteristische Konjugationsklasse von \tilde{X} ist trivial ;
- jede Liftung eines geschlossenen Weges α in X ist genau dann geschlossen in \tilde{X} , wenn α nullhomotop ist.

Definition. Eine Überlagerung von X , die einer und damit allen der eben genannten Bedingungen genügt, heißt *universelle Überlagerung* von X .

Bemerkung. Mit Hilfe der Eigenschaft c) ist es nicht allzu schwer, zu vorgegebenem X eine universelle Überlagerung zu konstruieren. Wegen Satz 11 ist diese bis auf X -Diffeomorphie *eindeutig* bestimmt. Wir können daher auch von der universellen Überlagerung sprechen.

Da der Normalisator der trivialen Gruppe die volle Gruppe ist, ergibt sich ferner sofort die wichtige

Folgerung 5.15 Für die universelle Überlagerung \tilde{X} von X besteht eine kanonische Gruppenisomorphie

$$\pi_1(X) \cong \text{Deck}_X(\tilde{X}).$$

Man kann diesen Satz benutzen, um in Einzelfällen die Fundamentalgruppen von Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, wenn man ihre universelle Überlagerung kennt.

Beispiele. 1. Die durch $t \mapsto e^{2\pi it}$ gegebene Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ ist eine zusammenhängende Überlagerung. Der Überlagerungscharakter wird noch deutlicher, wenn man diese Abbildung vermöge $t \mapsto (e^{2\pi it}, t)$ über die *Wendeltreppe* in dem Zylinder $S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$ faktorisiert. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, ist sie die universelle Überlagerung von S^1 . Die Gruppe der Decktransformationen besteht aus allen Translationen um ganzzahlige Werte, ist also isomorph zu der (abelschen) Gruppe \mathbb{Z} der ganzen Zahlen. Folglich besitzt S^1 die Fundamentalgruppe \mathbb{Z} .

2. Ganz entsprechend sieht man, daß die Exponentialabbildung

$$\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$$

die universelle Überlagerung von \mathbb{C}^* darstellt. Die Fundamentalgruppe ist wieder isomorph zu \mathbb{Z} . Dies ist nicht überraschend, da S^1 ein sogenannter *Deformationsretrakt* von \mathbb{C}^* ist und jeder Raum

die gleiche Fundamentalgruppe besitzt wie seine Deformationsretrakte.

3. Ein Torus besitzt die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

4. Der *reell projektive Raum* \mathbb{P}_n entsteht durch Identifikation der antipodalen Punkte in der Sphäre S^n , und wird tatsächlich durch S^n zweiblättrig überlagert. Da S^n einfach zusammenhängend ist für $n \geq 2$, hat \mathbb{P}_n für diese n die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Zum Schluß formulieren wir noch den *Hauptsatz der Überlagerungstheorie*. Wir haben jeder zusammenhängenden Mannigfaltigkeit X ihre universelle Überlagerung \tilde{X} und ihre charakteristische Klasse \mathcal{C} zugeordnet, die wir jetzt auch als Untergruppe Γ der Gruppe der Decktransformationen $\text{Deck}_X(\tilde{X})$ auffassen können. Da die Gruppe der Decktransformationen „gut“ auf \tilde{X} operiert, nämlich *eigentlich diskontinuierlich*, hat auch Γ diese Eigenschaft (siehe hierzu Kapitel 14). Man kann dann zeigen, daß die kanonische Projektion $\tilde{X} \rightarrow X$ über den Quotienten \tilde{X}/Γ faktorisiert, der selbst wieder eine Überlagerung von X mit der „richtigen“ charakteristischen Klasse \mathcal{C} ist. Dies bedeutet also:

Satz 5.16 (Hauptsatz der Überlagerungstheorie) *Die Isomorphieklassen von Überlagerungen der Mannigfaltigkeit X stehen in eindeutiger Korrespondenz zu den Konjugationsklassen von Untergruppen ihrer Fundamentalgruppe.*

Beispiel. Die eindimensionale Sphäre S^1 besitzt, wie wir oben gesehen haben, ebenso wie \mathbb{C}^* , die Fundamentalgruppe \mathbb{Z} mit den Untergruppen $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörigen „ n -fachen“ Überlagerungen $S^1 \rightarrow S^1$ werden beschrieben durch $t \mapsto t^n$ für $n \geq 1$. Die entsprechende zweifache Überlagerung von \mathbb{C}^* ist die oben schon erwähnte Riemannsche Fläche von \sqrt{z} .

Bemerkung. Wir haben in unsere Definition der Überlagerungen implizit das zweite Abzählbarkeits-Axiom für alle beteiligten Räume eingebaut. Man macht sich sofort klar, daß dies jedoch an keiner Stelle eine Rolle spielt, so daß es auch fortgelassen werden kann. Allerdings kann man zeigen, daß die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit X mit 2. Abzählbarkeits-Axiom höchstens abzählbar ist. (Man verwende den Satz 0.8 von Urysohn und die daraus resultierende abzählbare Überdeckung von X durch topologische Kugeln zur Konstruktion von *abzählbar vielen* geschlossenen Wegen γ_j , $j \in \mathbb{N}$, mit festem Anfangspunkt x_0 , so daß jeder geschlossene Weg γ zu einem der Wege γ_j homotop ist). Aus Lemma 12 ergibt sich dann, daß die typische Faser F einer beliebigen Überlagerung (Y, p, X) höchstens abzählbare Kardinalität besitzt. Da die offenen Mengen über gleichmäßig überlagerten Umgebungen eine Basis von Y bilden, hat automatisch auch Y abzählbare Topologie.

6 Schnitte in Bündeln und algebraische Konstruktion von Vektorraumbündeln

Wenn man sich ein Bündel bildlich als eine *Garbe von Getreidehalmen* vorstellt und dazu die Tätigkeit eines (vermutlich nicht sehr erfahrenen) *Schnitters*, so versteht man vielleicht den mathematischen Inhalt der folgenden Definition.

Definition. Ein (beliebiger, stetiger, differenzierbarer) *Schnitt* in dem Faserbündel (E, π, X) über der offenen Menge $U \subset X$ ist eine (beliebige, stetige, differenzierbare) Abbildung $s : U \rightarrow E$ mit $\pi \circ s = \text{id}_U$, d. h. $s(x) \in E_x$ für alle $x \in U$. Oder in anderen Worten: s ist ein U -Morphismus

$$(U, \text{id}, U) \longrightarrow (\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U).$$

Wir schreiben $\Gamma(U, E)$ oder $H^0(U, E)$ für die Menge aller dieser Schnitte über U (oder genauer

$$\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E)) \quad \text{oder} \quad H^0(U, \mathcal{C}^\kappa(E)),$$

wenn wir Schnitte der Differenzierbarkeitsordnung \mathcal{C}^κ untersuchen wollen. Selbstverständlich darf die Differenzierbarkeitsordnung der Schnitte nicht größer als die des betrachteten Bündels sein).

Bemerkung. Das Symbol $H^0(U, E)$ soll darauf hindeuten, daß es sich hier tatsächlich um eine *cohomologische* Begriffsbildung handelt (siehe Kapitel 5). Das Zeichen $\mathcal{C}^\kappa(E)$ ist dann zu deuten als die *Garbe der Keime von \mathcal{C}^κ -Schnitten in dem Vektorbündel E* . All dies wird aber im folgenden keine Rolle spielen und soll daher auch nicht weiter kommentiert werden.

Ist das gegebene Bündel über der Menge U *trivialisierbar*, so kann man leicht die Schnitte über U bestimmen. Da dort „im wesentlichen“ das Bündel E gleich dem Produkt $U \times F$ mit der typischen Faser F ist, sind Schnitte nichts anderes als (hinreichend oft differenzierbare) Abbildungen $U \rightarrow F$. Insbesondere sind die *konstanten* Abbildungen von U nach F solche Schnitte.

Warnung. Obwohl es also *lokal* zumindest so viele Schnitte wie Elemente in F gibt, braucht es über *beliebigen* offenen Mengen von X , insbesondere über X selbst, *keine* (stetigen) Schnitte in dem gegebenen Bündel zu geben. Dies sieht man z. B. an der zweifachen Überlagerung von \mathbb{C}^* durch sich selbst. Man mache sich klar, daß die Existenz eines stetigen Schnittes in dieser Überlagerung zur Folge hätte, daß die Quadratwurzel \sqrt{z} auf ganz \mathbb{C}^* als eindeutige Funktion erklärt werden könnte. Im Beispiel der universellen Überlagerung $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ würde die Existenz eines globalen stetigen Schnittes die Existenz des *Logarithmus* auf \mathbb{C}^* als eindeutige holomorphe Funktion nach sich ziehen.

Wir wollen zunächst die Bemerkungen vor der gerade ausgesprochenen Warnung noch etwas präzisieren und vervollständigen. Liegt über der Menge $U \subset X$ eine Trivialisierung

$$\begin{array}{ccc} U \times F & \xrightarrow{\chi_U} & \pi^{-1}(U) = E|_U \\ & \searrow p = \text{pr}_1 & \swarrow \pi \\ & & U \end{array}$$

vor, so korrespondiert zu jedem Schnitt s in E über U in eindeutiger Weise der Schnitt

$$\chi_U^{-1} \circ s : U \longrightarrow U \times F.$$

Ein solcher besitzt aber notwendigerweise die Form

$$x \longmapsto (x, s_U(x)),$$

wobei $s_U : U \rightarrow F$ eine *beliebige* differenzierbare Abbildung (der richtigen Differenzierbarkeitsordnung) ist. Infolgedessen gibt es eine (durch die vorgegebene Trivialisierung eindeutig bestimmte) Bijektion von $\Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ nach $\mathcal{C}^\kappa(U, F)$.

Wir interessieren uns weiter für die Frage, wie sich die eben hergeleitete Darstellung der Schnitte mittels lokaler Trivialisierungen bei einem Übergang zu einer anderen Trivialisierung transformiert. In Ermangelung weiterer geeigneter lateinischer Symbole schreiben wir die Elemente einer beliebigen trivialisierenden Überdeckung von X zu dem Bündel E jetzt mit *griechischen* Indizes als U_α und die korrespondierenden 1-Cozyklen mit $\chi_{\beta\alpha}$ bzw. $\theta_{\beta\alpha}$. Wir schreiben ferner s_α anstelle von s_{U_α} . Wegen $\chi_{\beta\alpha} = \chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha$ auf $U_\alpha \cap U_\beta$ gewinnt man sofort die folgende Beziehung

$$(x, s_\beta(x)) = (\chi_\beta^{-1} \circ s)(x) = (\chi_{\beta\alpha} \circ (\chi_\alpha^{-1} \circ s))(x) = \chi_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x)) = (x, \theta_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x)))$$

und damit den folgenden

Satz 6.1 *Ein System von Abbildungen $s_\alpha \in C^\kappa(U_\alpha, F)$ bestimmt genau dann einen Schnitt in dem Faserbündel E mit Faser F bzgl. einer gegebenen trivialisierenden Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ mit zugeordnetem 1-Cozyklus $\{\theta_{\beta\alpha}\}$, wenn auf jedem Durchschnitt $U_\alpha \cap U_\beta$ die Bedingung*

$$s_\beta(x) = \theta_{\beta\alpha}(x, s_\alpha(x))$$

erfüllt ist.

Für *Vektorraumbündel* besitzt die Menge $\Gamma(U, C^\kappa(E))$ der Schnitte wesentlich mehr Struktur. In diesem Fall hat man lokal die Situation $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$, und ein Schnitt über U in E wird nach den obigen Überlegungen repräsentiert durch eine C^κ -Abbildung $s_U : U \rightarrow \mathbb{R}^r$, d. h. durch ein r -tupel (v_U^1, \dots, v_U^r) von C^κ -Funktionen v_U^j , $j = 1, \dots, r$, auf $U \subset X$. Die Übergangsbedingungen lauten in diesem Fall einfach

$$(*) \quad {}^t(v_\beta^1(x), \dots, v_\beta^r(x)) = A_{\beta\alpha}(x) \cdot {}^t(v_\alpha^1(x), \dots, v_\alpha^r(x)), \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Hieraus leitet man sofort ab, daß die faserweise *Addition von Schnitten* und ihre *Multiplikation* mit differenzierbaren Funktionen $f \in C^\kappa(U)$ lokal (und, wie man leicht sieht, auch auf beliebigen offenen Mengen $U \subset X$) wieder zu Schnitten in E mit der entsprechenden Differenzierbarkeitsordnung führt. - Mit diesen Überlegungen gewinnt man den ersten Teil des folgenden Satzes.

Satz 6.2 *Sei (E, π, X) ein C^κ -Vektorraumbündel. Dann ist $\Gamma(U, C^\kappa(E))$ ein $C^\kappa(U)$ -Modul. Jeder Punkt $x_0 \in X$ besitzt (beliebig kleine) Umgebungen $U = U(x_0)$, s. d. $\Gamma(U, C^\kappa(E))$ ein freier $C^\kappa(U)$ -Modul vom Rang $r = \text{rang } E$ ist.*

Beweis. Man wähle eine trivialisierende Umgebung U von x_0 . Ist dann e_1, \dots, e_r die kanonische Basis von \mathbb{R}^r und identifiziert man die e_j mit den „konstanten“ Schnitten $e_j(x) := (x, e_j)$, $j = 1, \dots, r$, in $U \times \mathbb{R}^r$ über U , so schreibt sich für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, C^\kappa(E))$ der Schnitt $\chi_U^{-1} \circ s$ in dem trivialen Bündel $U \times \mathbb{R}^r$ eindeutig in der Form

$$\chi_U^{-1} \circ s(x) = v^1(x) e_1 + \dots + v^r(x) e_r, \quad v^j \in C^\kappa(U).$$

Setzt man jetzt noch $e_j^U := \chi_U \circ e_j$, so bekommt man die gewünschte eindeutige Darstellung

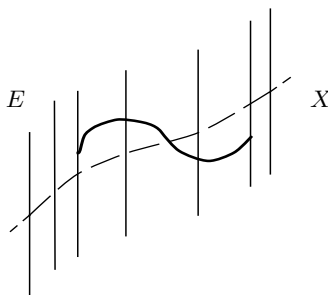
$$s(x) = v^1(x) e_1^U(x) + \dots + v^r(x) e_r^U(x), \quad v^j \in C^\kappa(U). \quad \square$$

Bemerkung. Aufgrund des vorstehenden Satzes ist für Vektorraumbündel der Raum der Schnitte $\Gamma(U, C^\kappa(E))$ ein *Modul* (so daß wir auch von dem *Schnittmodul* sprechen) und somit insbesondere niemals leer, da er das „Nullelement“ enthalten muß. Wir nennen dieses auch den *Nullschnitt* von E über U . Angesichts der einführenden Bemerkungen ist dieser der Traum aller Schnitter!

Man kann für den Nullschnitt noch etwas mehr aussagen.

Folgerung 6.3 *Der durch $0(x) := 0_x \in E_x$ definierte Nullschnitt $0 : X \rightarrow E$ ist eine abgeschlossene Einbettung.*

Bemerkung. Man illustriert daher Vektorraumbündel (und Schnitte in ihnen) oft in der Form



Figur 6.1

Definition. Eine Basis $e_1^U, \dots, e_r^U \in \Gamma(U, \mathcal{C}^\kappa(E))$ wie im Beweis des obigen Satzes heißt eine *lokale Basis* des Vektorraumbündels E (im Englischen ein *frame*, oder ein *répère* im Französischen).

Bemerkung. Die Transformationsformel (*) für Schnitte in einem Vektorraumbündel ist nur eine andere Manifestation für den durch die gleich aussehende Formel

$$(\times) \quad {}^t(v_\beta^1, \dots, v_\beta^r) = A_{\beta\alpha}(x) \cdot {}^t(v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r)$$

beschriebenen *Koordinatenwechsel* für die Faserkoordinaten $v_\alpha = (v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r)$ auf $U_\alpha \times \mathbb{R}^r$, der sich also *direkt*, oder, wie man auch sagt, *kovariant* mit der Matrix $A_{\beta\alpha}$ vollzieht. Dies ist genauer wie folgt zu verstehen: Besitzt ein Vektor $v \in E_x$ die Koordinaten $v_\alpha^1, \dots, v_\alpha^r$ bzgl. der Basis $e_1^\alpha(x), \dots, e_r^\alpha(x)$ von E_x , so hat er die durch (\times) gegebenen Koordinaten $v_\beta^1, \dots, v_\beta^r$ bzgl. der Basis $e_1^\beta(x), \dots, e_r^\beta(x)$.

Durch Einsetzen der Koordinaten $(\delta_{j1}, \dots, \delta_{jr})$ für e_j^α in der Basis $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ gewinnt man aus (\times) die *Basiswechsel-Formel*

$$(\times\times) \quad e_j^\alpha = \sum_{k=1}^r A_{\beta\alpha}^{kj} e_k^\beta,$$

wobei selbstverständlich mit $A_{\beta\alpha}^{kj}$ der Eintrag in der k -ten Zeile und j -ten Spalte von der Matrix $A_{\beta\alpha}$ gemeint ist. Man bezeichnet nun in der Linearen Algebra als *Basiswechsel-Matrix* von einer ersten zu einer zweiten Basis die quadratische Matrix, in deren *Spalten* die Koordinaten der Basiselemente des zweiten Systems in Bezug auf das erste System stehen. Wir müssen also zur Bestimmung dieser Basiswechsel-Matrix in unserem Fall die Rolle von α und β vertauschen. Beachtet man außerdem noch, daß $A_{\beta\alpha}^{-1} = A_{\alpha\beta}$, so lautet die Formel ($\times\times$) auch

$$e_k^\beta = \sum_{j=1}^r (A_{\beta\alpha}^{-1})^{jk} e_j^\alpha.$$

Mit anderen Worten: Die Basiswechsel-Matrix (von Koordinaten auf U_α zu Koordinaten auf U_β) wird durch die *inverse* Matrix $A_{\beta\alpha}^{-1}$ gegeben.

Nach den bisherigen Erläuterungen kennt man ein Bündel in Bezug auf eine vorgegebene Trivialisierung, wenn man die Transformationsregeln (*) seiner Schnitte kennt. Genauer kann man sagen (siehe hierzu auch Satz 5.1):

Satz 6.4 *Es sei X eine Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung, $\mathcal{F}(U_\alpha)$, $U_\alpha \in \mathfrak{U}$, ein System von freien $\mathcal{C}^\kappa(U_\alpha)$ -Moduln vom Rang r mit ausgezeichneten Basen e_j^α und dem Transformationsverhalten ($\times\times$). Dann gibt es genau ein Vektorraumbündel E vom Rang r mit den vorgeschriebenen Schnitten auf den Mengen U_α :*

$$\Gamma(U_\alpha, E) \cong \mathcal{F}(U_\alpha).$$

Im Falle des *Tangentialbündels* einer Mannigfaltigkeit X der Dimension n ist

$$A_{\beta\alpha}(x) = \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \circ \psi_\alpha(x) \right), \quad x_\beta = x_\beta(x_\alpha) = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$$

mit lokalen Koordinaten $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$ auf V_α . Um Schnitte in dem Tangentialbündel *analytisch* zu interpretieren, ordnen wir einem solchen über einer offenen Menge U eine *Derivation* zu.

Definition. Eine *Derivation* auf $\mathcal{C}^\kappa(U)$ ist eine Abbildung von $\mathcal{C}^\kappa(U)$ in sich, die \mathbb{R} -linear ist und der *LEIBNIZ-Regel* genügt:

$$\vartheta(fg) = f(\vartheta g) + g(\vartheta f), \quad f, g \in \mathcal{C}^\kappa(U).$$

Es ist offensichtlich, daß der Raum der Derivationen $\text{Der}(U)$ für eine offene Menge $U \subset X$ einen $\mathcal{C}^\kappa(U)$ -Modul bildet. Ebenso einleuchtend ist (siehe auch die erläuternden Bemerkungen weiter unten), daß für eine Karte $(U_\alpha, \psi_\alpha, V_\alpha)$ der Modul $\text{Der}(U_\alpha)$ der Derivationen auf U_α zu dem Modul der Derivationen $\text{Der}(V_\alpha)$ auf V_α isomorph ist. - Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf den \mathcal{C}^∞ -Fall.

Satz 6.5 *Der Modul $\text{Der}(V_\alpha)$ über dem Ring $\mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$ ist frei vom Rang n und besitzt als Basis die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}.$$

Jede Derivation $\vartheta \in \text{Der}(V_\alpha)$ schreibt sich daher eindeutig in der Form

$$\vartheta = v_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + v_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n},$$

wobei $v_\alpha^j = \vartheta(x_\alpha^j) \in \mathcal{C}^\infty(V_\alpha)$.

Beweis. Siehe Anhang. □

Dieses Ergebnis überträgt sich unmittelbar auf den Modul $\text{Der}(U_\alpha)$. Die oben schon angesprochene Isomorphie $\text{Der}(V_\alpha) \cong \text{Der}(U_\alpha)$ erhält man offensichtlich dadurch, daß man für jede Derivation $\vartheta \in \text{Der}(V_\alpha)$ und jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ definiert:

$$\vartheta(f) := (\vartheta(f \circ \varphi_\alpha)) \circ \psi_\alpha.$$

Insbesondere ist dann für $\vartheta := \partial/\partial x_\alpha^j$ und $f := \psi_\alpha^k \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$:

$$\frac{\partial \psi_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j} := \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} (\psi_\alpha^k \circ \varphi_\alpha) \right) \circ \psi_\alpha = \left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\alpha^j} \right) \circ \psi_\alpha = \delta_{kj}.$$

In diesem Sinne schreiben wir jede Derivation $\vartheta \in \text{Der}(U_\alpha)$ ab jetzt in der Form

$$\vartheta = v_\alpha^1 \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} + \dots + v_\alpha^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}$$

mit den Funktionen $v_\alpha^j := \vartheta(\psi_\alpha^j) \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$.

Bemerkung. Wir identifizieren also die von den Koordinaten $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n$ bestimmten kanonischen Basiselemente e_j^α des Tangentialbündels mit den Elementen $\partial/\partial x_\alpha^j$, die wir auch des öfteren mit dem Symbol $\partial_{x_\alpha^j}$ bezeichnen (oder, noch kürzer, mit ∂_j , wenn wir keine Veranlassung sehen, die Karte U_α gesondert hervorzuheben).

Um sicherzustellen, daß diese lokale Identifikation auch *global* sinnvoll ist, müssen wir die Transformationsformel für Derivationen berechnen. Wir leiten dazu die Basiswechsel-Formel ab.

Satz 6.6 Die Basiswechsel-Formel für Derivationen lautet

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha(x) \right) \frac{\partial}{\partial x_\beta^k},$$

oder in verkürzter, aber besonders einprägsamer Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \frac{\partial}{\partial x_\beta^k}.$$

Bemerkung. Die Formel erinnert nicht nur an die Kettenregel, sondern ist schlichtweg eine andere Interpretation derselben, wie wir anschließend für den noch nicht so erfahrenen Leser herleiten werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß auf der rechten Seite die Koeffizienten Funktionen in den x_α zu sein scheinen, obwohl wir es dort ja mit Derivationen zu tun haben, die auf Funktionen in den x_β wirken. Dies ist tatsächlich auch nicht der Fall; der Eindruck entspringt nur der saloppen Schreibweise. Trotzdem ist festzuhalten, daß die Koeffizienten der Funktionalmatrizen der Koordinatentransformationen auf der Mannigfaltigkeit „verkehrtherum“ eingehen. Man drückt dies auch so aus, daß sich der Basiswechsel im Tangentialbündel *kontravariant* vollzieht.

Beweis von Satz 6. Die in Rede stehende Formel ist zu verstehen als eine Identität für die Wirkung einer Derivation auf eine Funktion $f \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$. Nach den Vorbemerkungen lautet sie exakt

$$\frac{\partial (f \circ \varphi_\alpha)}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\beta^k}{\partial x_\alpha^j} \circ \psi_\alpha \right) \cdot \left(\frac{\partial (f \circ \varphi_\beta)}{\partial x_\beta^k} \circ \psi_\beta \right).$$

Multiplizieren wir hier von rechts mit $\varphi_\alpha = \psi_\alpha^{-1}$, setzen $f_\alpha := f \circ \varphi_\alpha$ und $f_\beta := f \circ \varphi_\beta$ und beachten $\varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}$, $f_\alpha = f_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}$, $x_\beta = \varphi_{\beta\alpha}(x_\alpha)$, so wird die vorherige Formel zur Kettenregel:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} (f_\beta \circ \varphi_{\beta\alpha}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_\beta}{\partial x_\beta^k} \circ \varphi_{\beta\alpha} \right) \cdot \frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}^k}{\partial x_\alpha^j}.$$

Durch Umkehrung der Argumentationskette ergibt sich die Behauptung. \square

Das soeben abgeleitete Transformationsverhalten für Derivationen ist identisch mit der *Basiswechsel-Formel* ($\times\times$) im Falle des Tangentialbündels. - Wir erhalten somit als

Korollar 6.7 Der Schnittmodul $\Gamma(U, T_X)$ läßt sich in kanonischer Weise mit dem Modul der Derivationen $C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$ identifizieren.

Bemerkung. Selbstverständlich fassen wir Schnitte im Tangentialbündel auch als *Vektorfelder* auf der Mannigfaltigkeit X auf. Ihre Derivationseigenschaften sind dann auf die folgende Weise zu verstehen: Ist $\gamma: I \rightarrow X$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Kurve in X mit Tangentialvektor v an der Stelle $x = \gamma(0)$ und f differenzierbar in einer Umgebung von x , so ist der Wert $(f \circ \gamma)'(0)$ nach der Kettenregel nur von v und dem Differential $(Df)_x$ abhängig. Wir schreiben ihn in der Form

$$\langle v, (Df)_x \rangle.$$

Ist nun v ein *Vektorfeld* auf U , so variiert $v(x)$ differenzierbar mit $x \in U$, und für eine differenzierbare Funktion f auf U ist

$$x \longmapsto \langle v(x), (Df)_x \rangle$$

wieder eine C^∞ -Funktion. In Abhängigkeit von f stellt diese Zuordnung tatsächlich eine Derivation dar. Daß dieser Prozeß genau unser oben geschildertes Verfahren in lokalen Karten darstellt, sieht man an einer kleinen Rechnung (erneut unter Verwendung der Kettenregel): Schreibt man $v(x) =$

$(v^1(x), \dots, v^n(x))$, so liefert die Anwendung dieser Definition auf die Koordinatenfunktion x^j und eine Kurve γ mit $\gamma'(0) = (v^1(x), \dots, v^n(x))$, daß

$$\langle v(x), (Dx^j)_x \rangle = (x^j \circ \gamma)'(0) = v^j(x).$$

Definition. Man nennt aus naheliegenden Gründen den Wert von $\langle v(x), (Df)_x \rangle$ auch die *Richtungs-Ableitung* von f an der Stelle x in Richtung $v(x)$; in Zeichen

$$\partial_v f(x) := \langle v(x), (Df)_x \rangle.$$

Man findet in der Literatur für ∂_v auch den Namen „LIE-Ableitung“ und die sich daraus ergebende Bezeichnung L_v .

Bemerkung. In der differentialgeometrischen Standardliteratur werden Vektorfelder oft mit dem Großbuchstaben X bezeichnet (was nur deshalb möglich ist, weil Mannigfaltigkeiten meist das Symbol M erhalten). Entsprechend heißen die lokalen Vektorfelder dann X_j^α , und die Lie-Ableitung in Richtung X wird mit L_X notiert. Da wir konsequent bei X als Zeichen für eine Mannigfaltigkeit bleiben wollen, können wir diesem Brauch hier nicht folgen.

Wir wollen im zweiten Teil dieses Kapitels auf algebraische Weise aus gegebenen Vektorbündeln neue konstruieren. Wir nutzen dazu Satz 4 aus.

Es seien E_1 und E_2 Vektorbündel über X ; wir setzen zunächst *mengentheoretisch*

$$\tilde{E} := \bigsqcup_{x \in X} (E_{1x} \oplus E_{2x}) \xrightarrow{\pi} X.$$

Wir können für (differenzierbare) Schnitte $s_j \in \Gamma(U, E_j)$ einen (mengentheoretischen) Schnitt $s_1 \oplus s_2$ definieren durch

$$(s_1 \oplus s_2)(x) = s_1(x) \oplus s_2(x).$$

Tatsächlich ist $\pi_U \circ (s_1 \oplus s_2) = \text{id}_U$.

Satz 6.8 *Es gibt genau eine Vektorbündelstruktur auf (\tilde{E}, π, X) , für die alle wie oben gebildeten Abbildungen $(s_1 \oplus s_2)$ differenzierbare Schnitte sind. Als Mannigfaltigkeit ist \tilde{E} das Faserprodukt*

$$\tilde{E} = E_1 \times_X E_2 \subset E_1 \times E_2.$$

Werden E_1 und E_2 bzgl. \mathfrak{A} gegeben durch $A_{\beta\alpha}^{(1)}$ und $A_{\beta\alpha}^{(2)}$, so wird \tilde{E} beschrieben durch

$$A_{\beta\alpha}^{(1)} \oplus A_{\beta\alpha}^{(2)} := \begin{pmatrix} A_{\beta\alpha}^{(1)} & 0 \\ 0 & A_{\beta\alpha}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Beweis. Leichte Übungsaufgabe. □

Definition. Man schreibt $\tilde{E} = E_1 \oplus E_2$ und nennt $E_1 \oplus E_2$ die *direkte Summe* oder die *WHITNEY-Summe* der Bündel E_1 und E_2 .

Wir wollen eine etwas kompliziertere Konstruktion in größerer Genauigkeit durchführen. Es seien wieder zwei Vektorraumbündel E_1 und E_2 gegeben mit beschreibenden 1-Cozyklen $A_{\beta\alpha} := A_{\beta\alpha}^{(1)}$ und $B_{\beta\alpha} := A_{\beta\alpha}^{(2)}$. Wir wollen eine Vektorbündelstruktur auf

$$\text{Hom}(E_1, E_2) = \bigsqcup_{x \in X} \text{Hom}(E_{1x}, E_{2x}) \longrightarrow X$$

so einführen, daß $\varphi \in \Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2))$ genau dann gilt, wenn für alle $s \in \Gamma(U, E_1)$ durch

$$(\varphi(s))(x) := \varphi_x(s(x))$$

ein differenzierbarer Schnitt in E_2 definiert wird.

Es sei $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ eine trivialisierende Überdeckung für E_1 und E_2 mit lokalen Basen $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ bzw. $f_1^\alpha, \dots, f_s^\alpha$. Offensichtlich wird das gesuchte Bündel über U_α durch $U_\alpha \times \mathbb{R}^{s \times r}$ trivialisiert, da $\text{Hom}(E_{1x}, E_{2x})$ die Dimension rs besitzt und man eine trivialisierende Basis angeben kann:

$$\lambda_{\ell j}^\alpha : \lambda_{\ell j}^\alpha(e_k^\alpha) = \delta_{jk} f_\ell^\alpha, \quad k = 1, \dots, r.$$

Wir brauchen jetzt nur noch die Transformationsformel auszurechnen. Dazu bezeichnen wir die Koordinaten auf $U_\alpha \times \mathbb{R}^{s \times r}$ mit $u_\alpha^{\ell j}$ und fordern, daß

$$\sum_{\ell, j} u_\alpha^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\alpha = \sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\beta \quad \text{auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Ferner haben wir die Basiswechsel-Formel zur Verfügung:

$$e_k^\alpha = \sum_j A_{\beta\alpha}^{jk} e_j^\beta,$$

und entsprechend für die lokalen Basen von E_2 . Hieraus folgt bei festem k :

$$\begin{aligned} \sum_\ell u_\beta^{\ell k} f_\ell^\beta &= \sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \delta_{jk} f_\ell^\beta = \left(\sum_{\ell, j} u_\beta^{\ell j} \lambda_{\ell j}^\beta \right) (e_k^\beta) = \left(\sum_{m, j} u_\alpha^{mj} \lambda_{mj}^\alpha \right) \left(\sum_n A_{\alpha\beta}^{nk} e_n^\alpha \right) \\ &= \sum_{j, m, n} u_\alpha^{mj} A_{\alpha\beta}^{nk} \lambda_{mj}^\alpha (e_n^\alpha) = \sum_{j, m} u_\alpha^{mj} A_{\alpha\beta}^{jk} f_m^\alpha = \sum_\ell \left(\sum_{j, m} A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m} u_\alpha^{mj} \right) f_\ell^\beta, \end{aligned}$$

also

$$(+) \quad u_\beta^{\ell k} = \sum_{j, m} A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m} u_\alpha^{mj}.$$

Mit anderen Worten: Schreibt man die $u_\alpha^{\ell j}$ in eine $s \times r$ -Matrix u_α , so schreibt sich der Koordinatenwechsel in der bekannten Weise als

$$u_\beta = B_{\beta\alpha} \cdot u_\alpha \cdot A_{\alpha\beta}.$$

Damit transformieren sich Schnitte in dem Homomorphismenbündel, also Elemente in $\Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2))$, wie U -Homomorphismen von E_1 nach E_2 ; mit den Bezeichnungen am Ende von Kapitel 5 heißt dies also:

Folgerung 6.9 Für jede offene Menge $U \subset X$ existieren kanonische Isomorphismen von \mathcal{C}^∞ -Moduln

$$\Gamma(U, \text{Hom}(E_1, E_2)) \cong \text{Hom}_U(E_1, E_2).$$

Wir wollen die Transformationsformel für das Homomorphismenbündel noch auf eine andere Weise interpretieren, indem wir sie in der Form

$$u_\beta^{\ell k} = \sum_{m, j} c_{mj}^{\ell k} u_\alpha^{mj}, \quad c_{mj}^{\ell k} := A_{\alpha\beta}^{jk} B_{\beta\alpha}^{\ell m},$$

schreiben, wobei ℓk und $m j$ jeweils als *ein* Index anzusehen ist, der die Menge $\{1, \dots, s\} \times \{1, \dots, r\}$ durchläuft.

Man definiert nun das KRONECKER-Produkt $C := B \otimes A$ zweier quadratischer Matrizen $A = (a_{j,k})$ der Größe $r \times r$ bzw. $B = (b_{m,\ell})$ der Größe $s \times s$ durch

$$C = (c_{\ell k, m j}), \quad \text{wobei } c_{\ell k, m j} = b_{\ell, m} \cdot a_{k, j}, \quad 1 \leq j, k \leq r, \quad 1 \leq m, \ell \leq s.$$

In unserem Fall ist aber

$$c_{mj}^{\ell k} = B_{\beta\alpha}^{\ell m} ({}^t A_{\beta\alpha}^{-1})^{kj},$$

und damit haben wir die *Übergangsmatrizen* für das Homomorphismenbündel $\text{Hom}(E_1, E_2)$ gefunden.

Lemma 6.10 Werden die Vektorbündel E_1, E_2 auf der Mannigfaltigkeit X durch die 1-Cozyklen $A_{\beta\alpha}$ bzw. $B_{\beta\alpha}$ beschrieben, so wird das Bündel $\text{Hom}(E_1, E_2)$ gegeben durch

$$B_{\beta\alpha} \otimes {}^t A_{\beta\alpha}^{-1}.$$

Eine wichtige Sonderrolle spielt der Fall, daß $E_1 = E$ ein beliebiges und E_2 das triviale Geradenbündel $X \times \mathbb{R}$ ist. Das Homomorphismenbündel $\text{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$ besitzt als Fasern die Dualräume E_x^* der Vektorräume E_x . Man schreibt dann auch

$$E^* := \text{Hom}(E, X \times \mathbb{R})$$

und nennt E^* das *duale Bündel* zu E . Die Schnitte $\sigma \in \Gamma(U, E^*)$ sind differenzierbar mit $x \in U$ variierende *Linearformen* auf den Fasern E_x von E . Sie sind insbesondere so beschaffen, daß für jeden Schnitt $s \in \Gamma(U, E)$ die Funktion

$$x \longmapsto \sigma(s(x)) \text{ differenzierbar von der Klasse } \mathcal{C}^k \text{ ist.}$$

Wird E definiert durch den 1-Cozyklus $(A_{\beta\alpha})$, so wird das duale Bündel E^* beschrieben durch die *kontragredienten* Matrizen $({}^t A_{\beta\alpha}^{-1})$. Man beachte, daß im Allgemeinen die Matrizen $(A_{\beta\alpha}^{-1})$ keinen 1-Cozyklus bilden! Besitzt E eine lokale Basis e_1, \dots, e_r , so besitzt E^* die duale Basis $e^1 := e_1^*, \dots, e^r := e_r^*$, die durch die Eigenschaft $e^k(e_j(x)) = \delta_{jk}$ definiert ist.

Warnung. Die Bezeichnung e_1^*, \dots, e_r^* für die duale Basis zu der Basis e_1, \dots, e_r ist weitverbreitet, aber außerordentlich mißverständlich, da sie suggeriert, daß der Vektor e_j^* ausschließlich von dem Vektor e_j abhängt. Dies ist jedoch nicht der Fall: Wählt man z. B. in \mathbb{R}^2 die Standardbasis $e_1 = {}^t(1, 0)$, $e_2 = {}^t(0, 1)$, so ist $e_1^* = (1, 0)$, $e_2^* = (0, 1)$; wählt man dagegen die Basis $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$, so rechnet man unmittelbar nach, daß $f_1^* = e_1^* - e_2^*$, $f_2^* = e_2^*$. D. h.: Obwohl $e_1 = f_1$, ist $e_1^* \neq f_1^*$. Man müßte daher statt des Symbols e_j^* so etwas wie $(e_1, \dots, e_r)_j^*$ schreiben, was zwar korrekt, aber viel zu umständlich wäre. Wir folgen daher auch dem allgemeinen (Miß-) Brauch, weisen aber ausdrücklich darauf hin, daß es absolut keinen Sinn macht, von *dem zu einem Vektor dualen Vektor* zu sprechen. Insbesondere besitzt ein Schnitt s in E im Allgemeinen keinen wohldefinierten *dualen* Schnitt s^* in E^* .

Um dem Leser den Überblick zu erleichtern, wird in der folgenden Tabelle das Transformationsverhalten in dem Bündel E und seinem dualen Bündel E^* aufgelistet. Hierbei ist wie immer $\{A_{\beta\alpha}\}$ ein definierender Cozyklus für E .

	E	E^*
Koordinatenwechsel	$A_{\beta\alpha}$	${}^t A_{\beta\alpha}^{-1}$
Basiswechsel	$A_{\beta\alpha}^{-1}$	${}^t A_{\beta\alpha}$

Ist speziell $E = T_X$ das Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit mit der lokalen Basis

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n},$$

so bezeichnet man die *duale Basis* in dem *Cotangentialbündel* T_X^* mit $dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n$. Schnitte in T_X^* sind also sogenannte *PFaffsche Formen* $\sum f_j dx_\alpha^j$, die sich wegen der generellen Eigenschaften des dualen Bündels mit der kontragredienten Matrix transformieren:

$$\sum f_j^\beta dx_\beta^j = \sum f_j^\alpha dx_\alpha^j \iff {}^t f^\beta = {}^t A_{\beta\alpha}^{-1} {}^t f^\alpha$$

mit der Matrix

$$A_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} \end{pmatrix}.$$

Da auch der Basiswechsel in T_X^* kontragredient zu dem in T_X verläuft, gewinnen wir sofort aus der Formel unmittelbar nach Satz 6 die Basiswechsel-Formel:

$$dx_\alpha^j = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^k} dx_\beta^k,$$

oder präziser:

$$dx_\alpha^j = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^k} \circ \psi_\beta(x) \right) dx_\beta^k.$$

Bemerkung. Man sieht, daß hier die (vermeintlichen) Schwierigkeiten beim Tangentialbündel nicht auftreten. Die Koeffizienten auf der rechten Seite sind, wie man es vermuten würde, Funktionen in den Variablen x_β . Mit anderen Worten: Der Basiswechsel im Cotangentialbündel geschieht im Gegensatz zu den Verhältnissen im Tangentialbündel mit der Funktionalmatrix des Koordinatenwechsels, ist also, wie man sagt, *kovariant*.

Die Bezeichnung dx_α^j und die Basiswechsel-Formel für Pfaffsche Formen haben nicht nur eine formale, sondern tatsächlich eine *konzeptionelle* Bedeutung. Es sei $f \in C^\infty(U)$ gegeben. Dann können wir f einen Schnitt df über U im Cotangentialbündel zuordnen durch die Vorschrift:

$$(df)(v(x)) = \langle v(x), (Df)_x \rangle,$$

d. h. wir drehen jetzt den Spieß herum und interpretieren die Wirkung eines Vektorfelds auf die Funktion f als Wirkung von f auf das Vektorfeld. In einer Karte $U = U_\alpha$ bedeutet dies:

$$df \left(\sum_{j=1}^n v_\alpha^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j} \right) = \sum_{j=1}^n v_\alpha^j \frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha^j}.$$

Speziell ist dadurch dx_α^j definiert auf U_α , die $dx_\alpha^1, \dots, dx_\alpha^n$ bilden tatsächlich eine duale Basis zu $\partial/\partial x_\alpha^1, \dots, \partial/\partial x_\alpha^n$, und lokal gilt

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x_\alpha)}{\partial x_\alpha^j} dx_\alpha^j.$$

Insbesondere ergibt sich die Basiswechsel-Formel mit $f(x_\alpha) = x_\beta^k(x_\alpha)$.

Bemerkung. In diesem Sinne können wir das *Differential* Df und die *Pfaffsche Form* df identifizieren, auch wenn sie a priori verschiedene konzeptionelle Bedeutung haben. Diese Identifikation wird durch die Identifikation des Tangentialraums von \mathbb{R} mit \mathbb{R} selbst ermöglicht.

Bemerkung. Um Konsistenz der Transformations-Formeln mit der üblichen EINSTEINSchen *Summationskonvention* zu erzielen, braucht man nur den Index j in dx^j als *oberen*, den Index k in $\partial/\partial x^k$ aber als *unteren* Index aufzufassen (und entsprechend in $\frac{\partial x^j}{\partial x^k}$). Wir werden jedoch weitgehend Summen ausschreiben und die Einstein-Konvention nur als „guiding principle“ für die Anordnung der Indizes heranziehen.

Wir beschließen dieses Kapitel mit einem eher harmlos wirkenden Resultat, dessen Bedeutung aber nicht unterschätzt werden darf. Es ist nur eines unter vielen anderen Ergebnissen ähnlichen Inhalts, deren Beweis stets demselben Muster folgt.

Satz 6.11 *Es besteht ein kanonischer Vektorraumbündel-Isomorphismus $E \xrightarrow{\sim} E^{**}$.*

Beweis. Die Fasern des Bündels E^{**} sind nach Konstruktion die *Bidualen* der Fasern E_x von E : $(E^{**})_x = (E_x)^{**}$. Nun gibt es eine *kanonische*, also nicht von Koordinaten abhängige lineare Abbildung $E_x \rightarrow (E_x)^{**}$, die jedem $v \in E_x$ die lineare Abbildung $\lambda_v : (E_x)^* \rightarrow \mathbb{K}$ zuordnet, die durch $\lambda_v(\alpha) := \alpha(v)$, $\alpha \in (E_x)^*$, definiert ist. Diese Abbildung ist *injektiv* (und, da die beiden beteiligten Vektorräume

dieselbe Dimension r besitzen, sogar ein *Isomorphismus*): Ist nämlich $\lambda_v(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in (E_x)^*$, so ist nach Definition

$$\alpha(v) = 0 \text{ für alle } \alpha \in V^* .$$

Dies impliziert $v = 0$ (warum ?) und damit $\lambda_v = 0$. - Da der Übergang von E nach E^* bzgl. einer trivialisierenden Überdeckung den Transformationsmatrizen von E die kontragredienten Matrizen zuordnet und dieser Prozeß nach zweimaliger Anwendung zur Ausgangsmatrix zurückführt, wird die eben *halmweise* definierte kanonische Abbildung $E \rightarrow E^{**}$ lokal durch die Identität repräsentiert und ist somit insbesondere differenzierbar, also ein X -Isomorphismus. \square

Bemerkung. Lokal ist selbstverständlich auch $E|_U \cong E^*|_U$. Dieser Isomorphismus ist jedoch im Allgemeinen *nicht* kanonisch (siehe die Warnung auf p. 38 Mitte) und kann daher auch nicht zu einem Isomorphismus $E \rightarrow E^*$ fortgesetzt werden. Insofern verstellt einem das ausschließliche Studieren des Basisraums \mathbb{R}^n , auf dem man globale Koordinaten hat und deshalb auch einen solchen Isomorphismus für das Tangentialbündel und sein Dual, das Cotangentialbündel, herstellen kann, den Blick auf die wahren Zusammenhänge. Allerdings gibt es Mannigfaltigkeiten mit *zusätzlicher* Struktur, wie z. B. Riemannsche oder allgemeiner Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten, auf denen man aus ähnlichen Gründen das Tangential- und Cotangentialbündel identifizieren kann (siehe Kapitel 10).

Anhang: Derivationen und das Lemma von Hadamard

Wir wollen in diesem Anhang noch den Beweis von Satz 5 nachtragen. Dazu benötigen wir das sogenannte *Lemma* von HADAMARD. Um dieses zu verstehen und zu formulieren, erinnern wir zunächst an die Definition der (totalen) *Differenzierbarkeit*.

Definition. Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, heißt in $x_0 \in V$ *differenzierbar*, wenn es in x_0 stetige Funktionen $\Delta_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $x \in V$ gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x^j - x_0^j).$$

Bemerkung. Für $n \geq 2$ sind die Funktionen Δ_j ziemlich willkürlich wählbar. Allerdings sind ihre Funktionswerte an der Stelle x_0 , wenn f in x_0 differenzierbar ist, *eindeutig* bestimmt, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(x_0) = \Delta_j(x_0).$$

Das *Lemma* von HADAMARD besagt, daß die Funktionen Δ_j im Falle einer C^∞ -Funktion f (lokal) ebenfalls als unendlich oft differenzierbare Funktionen gewählt werden können. (Im analytischen Fall folgt dies sehr einfach aus der Potenzreihenentwicklung).

Lemma 6.12 (Hadamard) Für $f \in C^\infty(V)$ und $x_0 \in V$ gibt es eine Umgebung $V_0 \ni x_0$, $V_0 \subset V$, und eine Darstellung

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x^j - x_0^j)$$

mit beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\Delta_j : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Man wähle für V_0 eine in V enthaltene Kugel mit Mittelpunkt x_0 , und zu jedem Punkt $x \in V_0$ die Verbindungsstrecke

$$\gamma(t) := x_0 + t(x - x_0) \in V_0, \quad t \in [0, 1].$$

Dann ist die zusammengesetzte Funktion $g := f \circ \gamma$ beliebig oft differenzierbar auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$, und nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Kettenregel gilt

$$f(x) - f(x_0) = \int_0^1 g'(t) dt = \sum_{j=1}^n \Delta_j(x) (x_j - x_0^j)$$

mit den $C^\infty(V_0)$ -Funktionen

$$\Delta_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(t)) dt. \quad \square$$

Der *Beweis* von Satz 5 ist damit nicht mehr allzu schwer. Wir führen ihn auf zwei weitere Lemmata zurück.

Zunächst ist klar, daß auf $V \subset \mathbb{R}^n$ die Derivationen $\partial_j = \partial/\partial x^j$ unabhängig sind, da aus

$$\vartheta = \sum_{j=1}^n v^j(x) \partial_j = 0$$

durch Anwendung auf die Koordinatenfunktion x^k sofort $v^k = 0$ folgt. Für eine beliebige Derivation ϑ setzt man

$$\tilde{\vartheta} := \vartheta - \sum_{j=1}^n \vartheta(x^j) \partial_j.$$

Dann ist $\tilde{\vartheta}(x^j) = 0$ für alle j , und es genügt, das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma 6.13 *Ist für eine Derivation ϑ auf $V \subset \mathbb{R}^n$ der Wert auf allen Koordinatenfunktionen x^j gleich Null, so verschwindet ϑ .*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß jede Funktion $f \in \mathcal{C}^\infty(V)$ von ϑ annulliert wird; m. a. W.: wir müssen beweisen, daß

$$(\vartheta(f))(x_0) = 0$$

für beliebiges $x_0 \in V$, wobei wir noch $f(x_0) = 0$ voraussetzen dürfen. Nun ist für jede beliebige Derivation nach der Leibniz-Regel

$$\vartheta(1) = \vartheta(1 \cdot 1) = 2\vartheta(1) = 0$$

und damit $\vartheta(c) = 0$ für alle konstanten Funktionen c . Somit ist nach Voraussetzung $\vartheta(x^j - x_0^j) = 0$, $j = 1, \dots, n$, und damit für jede Funktion \tilde{f} , die sich wie im Hadamardschen Lemma auf ganz V bei fest gewähltem Punkt x_0 darstellen läßt,

$$\vartheta(\tilde{f})(x) = \sum_{j=1}^n \vartheta(\tilde{\Delta}_j(x)) (x^j - x_0^j)$$

und damit $\vartheta(\tilde{f})(x_0) = 0$.

Nun gilt die Darstellung von f bzgl. des Hadamardschen Lemmas aber nur in einer Umgebung $W = W(x_0)$. Durch Multiplikation mit einer \mathcal{C}^∞ -Funktion $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer Umgebung W_0 von x_0 identisch 1 ist, außerhalb W aber identisch verschwindet, erhält man eine \mathcal{C}^∞ -Funktion \tilde{f} auf ganz V , auf der nach den bisherigen Überlegungen $\vartheta\tilde{f}$ an der Stelle x_0 verschwindet, und die mit f zumindest in der Umgebung W_0 von x_0 übereinstimmt.

Der Beweis kann dann zu einem guten Ende geführt werden, wenn wir zeigen können, daß Derivationen ϑ lokale Operatoren sind, d. h. folgendes gilt.

Lemma 6.14 *Ist ϑ eine Derivation auf $\mathcal{C}^\infty(V)$ und f identisch Null auf einer offenen Teilmenge $W \subset V$, so ist $(\vartheta f)(x) = 0$ für $x \in W$.*

Beweis. Wähle zu $x_0 \in W$ wie oben eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $\eta : V \rightarrow \mathbb{R}$, die in einer Umgebung W_0 von x_0 identisch 1 ist und außerhalb W identisch verschwindet. Wegen der Leibniz-Regel ist dann

$$\eta\vartheta(f) + f\vartheta(\eta) = \vartheta(\eta f) = \vartheta(0) = 0$$

und folglich $(\vartheta(f))(x_0) = 0$. □

7 Das Tensorprodukt von Vektorräumen und Vektorbündeln

Der Begriff des *Tensorprodukts* steht im engen Zusammenhang mit dem der *bilinearen* Abbildungen zwischen Vektorräumen. Um etwas genauer zu sein, setzen wir voraus, daß V_1, V_2, W Vektorräume über dem festen Grundkörper \mathbb{K} sind. Eine Abbildung

$$\beta: V_1 \times V_2 \longrightarrow W$$

heißt *bilinear*, wenn sie in jeder *einzelnen* Variablen (bei festgehaltener anderer) *linear* ist, d. h. wenn die Eigenschaften

$$\begin{cases} \beta(v_1 + a v'_1, v_2) = \beta(v_1, v_2) + a \beta(v'_1, v_2) \\ \beta(v_1, v_2 + b v'_2) = \beta(v_1, v_2) + b \beta(v_1, v'_2) \end{cases}$$

erfüllt sind. Wir bezeichnen die Menge aller dieser Abbildungen mit

$$\text{Bil}(V_1, V_2; W) \quad \text{bzw.} \quad \text{Mult}_2(V_1, V_2; W).$$

Als Abbildungen in einen Vektorraum kann man bilineare Abbildungen auf natürliche Weise addieren und mit Konstanten multiplizieren; ihre Gesamtheit bildet zusammen mit diesen Verknüpfungen offensichtlich einen Vektorraum.

Ganz entsprechend führen wir für p Vektorräume V_1, \dots, V_p das Symbol $\text{Mult}_p(V_1, V_2, \dots, V_p; W)$ ein. Ist W der Grundkörper \mathbb{K} , so schreiben wir noch kürzer $\text{Mult}_p(V_1, V_2, \dots, V_p)$ für den Raum der *Multilinearformen* auf $V_1 \times \dots \times V_p$ (im Fall $p = 2$ auch als *Bilinearformen* bezeichnet). Da in vielen Fällen der Index p an dem Symbol *Mult* redundant ist, lassen wir ihn auch oft fort. Man macht sich sofort klar, daß eine solche Abbildung (eindeutig) bestimmt ist durch ihre Werte auf allen p -Tupeln von Basiselementen aus V_1, \dots, V_p . Hieraus ergibt sich sofort für *endlich-dimensionale* Vektorräume V_1, V_2, \dots, V_p, W die *Dimensionsformel*

$$\dim \text{Mult}_p(V_1, V_2, \dots, V_p; W) = (\dim V_1 \cdot \dots \cdot \dim V_p) \cdot \dim W.$$

Wir wollen im folgenden demonstrieren, wie man (für endlich-dimensionale Vektorräume) die gesamte Theorie auf das Studium von (iterierten) Räumen von *Homomorphismen* zwischen Vektorräumen reduzieren kann. Hierbei steht der Begriff von *kanonischen* Isomorphismen zwischen Vektorräumen im Vordergrund, der uns schon im Zusammenhang mit dem *Bidualen* eines Vektorraumbündels begegnet ist. Zur Eingewöhnung beginnen wir mit dem folgenden sehr einfachen Satz.

Satz 7.1 *Es bestehen (für endlich-dimensionale Vektorräume) kanonische Isomorphismen*

$$\text{Bil}(V_1, V_2; W) \cong \text{Bil}(V_2, V_1; W) \quad \text{und} \quad \text{Bil}(V_1, V_2; W) \cong \text{Hom}(V_1, \text{Hom}(V_2, W)).$$

Beweis. Die erste Aussage ist völlig elementar: Man ordne jeder Abbildung $\beta \in \text{Bil}(V_1, V_2; W)$ die durch $\beta^*(v_2, v_1) := \beta(v_1, v_2)$ definierte Abbildung $\beta^* \in \text{Bil}(V_2, V_1; W)$ zu. Im zweiten Fall starten wir mit einem Element $\alpha \in \text{Hom}(V_1, \text{Hom}(V_2, W))$ und definieren $\beta = \beta_\alpha \in \text{Bil}(V_1, V_2; W)$ durch

$$\beta_\alpha(v_1, v_2) := (\alpha(v_1))(v_2).$$

Man verifiziert sofort, daß die hierdurch definierte *lineare* Abbildung

$$\text{Hom}(V_1, \text{Hom}(V_2, W)) \longrightarrow \text{Bil}(V_1, V_2; W)$$

injektiv ist. Da auf beiden Seiten Vektorräume der gleichen Dimension stehen, ist sie sogar ein Isomorphismus. \square

Bemerkung. Für den ersten Teil der vorigen Aussage spielt die Voraussetzung der *Endlich-Dimensionalität* der betroffenen Vektorräume überhaupt keine Rolle, da man genauso gut die Umkehrabbildung angeben kann. Dieses ist auch im zweiten Fall, wenn auch nicht unmittelbar, möglich. Wir überlassen dem Leser die Details.

Der gerade bewiesene Satz ist nur der Beginn einer ganzen *Folge* von Sätzen. Mit genau den gleichen Argumenten beweist man

Satz 7.2 Für (endlich-dimensionale) Vektorräume $V_1, V_2, \dots, V_p, W, p \geq 2$, hat man eine kanonische Isomorphie

$$\text{Mult}_p(V_1, V_2, \dots, V_p; W) \cong \text{Hom}(V_j, \text{Mult}_{p-1}(V_1, \dots, \widehat{V}_j, \dots, V_p; W)) .$$

Hierbei bedeutet das „Dach“ über V_j auf der rechten Seite, daß dieser Vektorraum wegzulassen ist.

Bemerkung. Induktiv gewinnt man hieraus die Aussage, daß sich alle Vektorräume

$$\text{Mult}_p(V_1, V_2, \dots, V_p; W)$$

iterativ (und bis auf kanonische Isomorphie unabhängig von der Reihenfolge der Vektorräume V_1, \dots, V_p) durch Räume von Homomorphismen beschreiben lassen.

Aus diesem Grunde sind wir an weiteren *kanonischen* Isomorphismen zwischen Räumen von Homomorphismen interessiert. Zudem haben wir am Ende des letzten Kapitels gesehen, daß die Existenz von *kanonischen* Isomorphismen von endlich-dimensionalen Vektorräumen zu ebensolchen Isomorphie-Aussagen bei *Vektorraumbündeln* führen.

Die zwei zentralen Aussagen sind an dieser Stelle die folgenden.

Satz 7.3 Für (endlich-dimensionale) Vektorräume hat man die folgenden kanonischen Isomorphismen:

$$\text{Hom}(V_1, V_2) \cong \text{Hom}(V_2^*, V_1^*) \quad \text{und} \quad \text{Hom}(V_1, V_2) \cong \text{Hom}(V_2, V_1)^* .$$

Beweis. Zum Beweis der ersten Aussage ordnen wir jedem Homomorphismus $\alpha \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ auf ganz kanonische Weise eine Abbildung $\alpha^* : V_2^* \rightarrow V_1^*$ zu, indem wir den Homomorphismus $\varphi \in V_2^* = \text{Hom}(V_2, \mathbb{K})$ mit dem Homomorphismus α zusammensetzen: $\alpha^*(\varphi) := \varphi \circ \alpha : V_1 \rightarrow \mathbb{K}$. Die Abbildung $*$ ist injektiv, da aus $\varphi \circ \alpha = 0$ für alle $\varphi \in V_2^*$ sofort $\alpha = 0$ folgt. Da die beiden beteiligten Vektorräume von gleicher Dimension sind, folgt die Behauptung.

Die zweite Aussage ist etwas schwieriger zu beweisen. Wie zuvor ist es naheliegend, einem Homomorphismus $\alpha \in \text{Hom}(V_1, V_2)$ die durch $\lambda_\alpha(\varphi) := \varphi \circ \alpha, \varphi \in \text{Hom}(V_2, V_1)$, definierte Abbildung $\lambda_\alpha : \text{Hom}(V_2, V_1) \rightarrow \text{End}(V_1)$ zuzuordnen. Da wir hierdurch aber nicht im Grundkörper \mathbb{K} landen, fügen wir noch die *Spur-Abbildung* auf V_1 hinzu, setzen also

$$\lambda_\alpha^*(\varphi) := \text{Spur}(\lambda_\alpha(\varphi)) , \quad \text{so daß} \quad \lambda_\alpha^* \in \text{Hom}(V_2, V_1)^* .$$

Die hierdurch definierte Abbildung $\text{Hom}(V_1, V_2) \ni \alpha \mapsto \lambda_\alpha^* \in \text{Hom}(V_2, V_1)^*$ ist tatsächlich injektiv. Ist nämlich $\lambda_\alpha^* = 0$, so bedeutet dies $\text{Spur}(\varphi \circ \alpha) = 0$ für alle $\varphi \in \text{Hom}(V_2, V_1)$. Stellen wir relativ zu Basen den Homomorphismus α durch eine $r \times s$ -Matrix A dar, so wird φ durch eine (beliebige) $s \times r$ -Matrix B beschrieben. Nimmt man insbesondere für B die Matrix, die nur in der j -ten Reihe und k -ten Spalte eine 1 als Eintrag besitzt und sonst nur Nullen, so besitzt die Matrix BA nur Nullen als Einträge außer in der j -ten Zeile, die die folgende Gestalt hat: (a_{k1}, \dots, a_{ks}) . Die Bedingung $\text{Spur}(BA) = 0$ führt deshalb zu $a_{kj} = 0$, und da j und k beliebig waren, muß $\alpha = 0$ sein. \square

Bemerkung. Der erste Isomorphismus tritt an mehreren Stellen der Mathematik in Erscheinung. Die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha^*$ wird oft als (formales) Adjungieren bezeichnet. Sie spielt z. B. im Fall von partiellen Differentialoperatoren eine wichtige Rolle. Setzt man speziell $V_1 = \mathbb{K}$ und $V_2 = V$, so erhält man übrigens wegen $\text{Hom}(\mathbb{K}, V) \cong V$ aus dem obigen Satz die kanonische Isomorphie $V \rightarrow V^{**}$ zurück.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu dem Begriff des *Tensorprodukts*. Ist $\beta_0 : V_1 \times V_2 \rightarrow W_0$ eine *feste* bilineare Abbildung, so wird durch

$$\text{Hom}(W_0, W) \ni \alpha \longmapsto \alpha \circ \beta_0 \in \text{Bil}(V_1, V_2; W)$$

eine \mathbb{K} -lineare Abbildung

$$(*) \quad \text{Hom}(W_0, W) \longrightarrow \text{Bil}(V_1, V_2; W)$$

induziert.

Definition. W_0 heißt zusammen mit β_0 (ein) *Tensorprodukt* von V_1 und V_2 , wenn die *induzierte* Abbildung $(*)$ für alle W ein Isomorphismus ist. M. a. W.: W_0 ist ein Tensorprodukt von V_1 und V_2 , wenn es zu jeder *bilinearen* Abbildung $\beta : V_1 \times V_2 \rightarrow W$ *genau* eine *lineare* Abbildung $\alpha : W_0 \rightarrow W$ gibt, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta \\ W_0 & \xrightarrow{\alpha} & W \end{array}$$

kommutativ macht.

Lemma 7.4 Sind $\beta_0 : V_1 \times V_2 \rightarrow W_0$ und $\beta'_0 : V_1 \times V_2 \rightarrow W'_0$ zwei Tensorprodukte, so gibt es einen *eindeutig bestimmten* \mathbb{K} -*linearen Isomorphismus*

$$\alpha_0 : W_0 \longrightarrow W'_0,$$

für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta'_0 \\ W_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & W'_0 \end{array}$$

kommutativ ist.

Beweis. Elementare Anwendung der universellen Eigenschaft von W_0 liefert die Existenz einer (eindeutig bestimmten) linearen Abbildung α_0 , die das obige Diagramm kommutativ macht. Umgekehrt gewinnt man die Existenz einer linearen Abbildung $\alpha'_0 : W'_0 \rightarrow W_0$ mit der entsprechenden Eigenschaft. Für die Zusammensetzung $\alpha'_0 \circ \alpha_0 : W_0 \rightarrow W_0$ hat man dann die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} & V_1 \times V_2 & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta_0 \\ W_0 & \xrightarrow{\alpha'_0 \circ \alpha_0} & W_0 \end{array}$$

Da aber auch die Identität diese Eigenschaft hat, muß wegen der definierenden Eindeutigkeitsaussage $\alpha'_0 \circ \alpha_0 = \text{id}_{W_0}$ sein. Ebenso sieht man $\alpha_0 \circ \alpha'_0 = \text{id}_{W'_0}$ ein; somit ist α_0 ein Isomorphismus. \square

Bemerkung. Das Tensorprodukt ist also, wenn es existiert, bis auf kanonische Isomorphie *eindeutig* bestimmt. In der Tat existiert es immer (sogar für beliebige Moduln über *kommutativen Ringen* R ; siehe dazu einige Bemerkungen weiter unten). Wir bezeichnen es in üblicher Notation mit $V_1 \otimes V_2$.

Bei *endlich-dimensionalen* Vektorräumen kann man die Existenz des Tensorproduktes auf verblüffend einfache Weise herleiten. Wegen der definierenden Eigenschaften des Tensorproduktes (für $W = \mathbb{K}$) und den bisher abgeleiteten kanonischen Isomorphismen gilt nämlich notwendigerweise

$$(V_1 \otimes V_2)^* \cong \text{Bil}(V_1, V_2) \cong \text{Bil}(V_2, V_1) \cong \text{Hom}(V_2, V_1^*) \cong \text{Hom}(V_1^*, V_2)^*$$

und damit

$$V_1 \otimes V_2 \cong \text{Hom}(V_1^*, V_2).$$

Betrachten wir also den Vektorraum $W_0 = \text{Hom}(V_1^*, V_2)$, $V_1^* = \text{Hom}(V_1, \mathbb{K})$, und zeigen wir, daß er auch tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt. Dazu führen wir die Abbildung $\beta_0 : V_1 \times V_2 \rightarrow W_0$ ein, die jedem Paar $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ die lineare Abbildung

$$\begin{cases} V_1^* \longrightarrow V_2 \\ \lambda \longmapsto \lambda(v_1)v_2 \end{cases}$$

zuordnet. Aufgrund der Definition ist unmittelbar klar, daß

$$v_1 \otimes v_2 := \beta_0(v_1, v_2)$$

bilinear in v_1 und in v_2 ist. Wie oben erhalten wir für jeden endlich-dimensionalen Vektorraum W eine kanonische lineare Abbildung

$$(**) \quad \text{Hom}(W_0, W) \longrightarrow \text{Bil}(V_1, V_2; W).$$

Um Isomorphie von $(**)$ zu beweisen, führen wir zunächst den Nachweis der *Injektivität* (ist der Vektorraum W endlich-dimensional, so reicht dies schon aus, da die Vektorräume auf beiden Seiten die gleiche Dimension besitzen): Die bilineare Abbildung $\beta = \alpha \circ \beta_0$ ist durch ihre Werte auf den Paaren (e_j, f_k) bestimmt, wobei e_1, \dots, e_r eine Basis von V_1 und f_1, \dots, f_s eine Basis von V_2 durchläuft. Das Bild eines solchen Paares unter β_0 in W_0 ist aber gerade die lineare Abbildung λ_{jk} , die den Basisvektor e_j^* von V_1^* auf den Basisvektor f_k abbildet und alle anderen auf 0. Somit durchläuft $\beta_0(e_j, f_k)$ eine Basis von W_0 , und da α nach Voraussetzung auf dieser verschwindet, ist $\alpha = 0$.

Um die *Surjektivität* einzusehen, gehen wir von einer bilinearen Abbildung β aus und setzen $w_{jk} := \beta(e_j, f_k)$. Durch $\alpha(\lambda_{jk}) := w_{jk}$ wird dann eine lineare Abbildung $\alpha : W_0 \rightarrow W$ bestimmt, für die $\alpha \circ \beta_0 = \beta$ auf allen Paaren (e_j, f_k) und damit auf $V_1 \times V_2$ gilt.

Wir haben somit bewiesen:

Satz 7.5 *Im Fall endlich-dimensionaler Vektorräume V_1, V_2 existiert das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$; es ist kanonisch isomorph zu*

$$\text{Hom}(V_1^*, V_2), \text{ wobei } V_1^* = \text{Hom}(V_1, \mathbb{K}).$$

Ist e_1, \dots, e_r eine Basis von V_1 und f_1, \dots, f_s eine Basis von V_2 , so ist $e_j \otimes f_\ell$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq \ell \leq s$, eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Sind ferner e'_1, \dots, e'_r und f'_1, \dots, f'_s weitere Basen von V_1 bzw. V_2 , und gelten die Transformationsformeln

$$e'_k = \sum_{j=1}^r a_{jk} e_j, \quad f'_m = \sum_{\ell=1}^s b_{\ell m} f_\ell,$$

so lautet die Formel für den Basiswechsel im Tensorprodukt

$$e'_k \otimes f'_m = \sum_{j, \ell} a_{jk} b_{\ell m} e_j \otimes f_\ell;$$

die Basiswechsel-Matrix ist also das Kronecker-Produkt der beiden Basiswechsel-Matrizen in V_1 und V_2 .

Beweis. Nur die Aussage über den Basiswechsel bedarf der Begründung; sie folgt aber selbstverständlich aus der Bilinearität von β_0 . \square

Bemerkungen. 1. Man kann mit Tensorprodukten $V_1 \otimes V_2$ natürlich auch *rein formal* umgehen. Sie enthalten (irgendwie gebildete) *reine Tensoren* $v_1 \otimes v_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, und jedes Element ist eine endliche Linearkombination von solchen reinen Tensoren. Beim formalen Rechnen mit Tensoren sind dann die (der Bilinearität von β_0 entstammenden) Rechenregeln

$$(+) \quad \begin{cases} (v_1 + v'_1) \otimes v_2 = v_1 \otimes v_2 + v'_1 \otimes v_2, & v_1 \otimes (v_2 + v'_2) = v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes v'_2, \\ (a v_1) \otimes v_2 = v_1 \otimes (a v_2) = a(v_1 \otimes v_2), \end{cases}$$

(und nur diese) zu berücksichtigen. Je nach Bedarf kann man einen reinen Tensor $v_1 \otimes v_2$ „identifizieren“ mit der oben beschriebenen linearen Abbildung $V_1^* \rightarrow V_2$ oder entsprechend mit der analog gebildeten Abbildung $V_2^* \rightarrow V_1$ (siehe Satz 6). Hat man Basen e_1, \dots, e_r von V_1 und f_1, \dots, f_s von V_2 , so bilden die reinen Tensoren $e_j \otimes f_\ell$, $1 \leq j \leq r$, $1 \leq \ell \leq s$, eine Basis von $V_1 \otimes V_2$.

2. Den ersten Teil der vorstehenden Bemerkungen kann man sogar dazu benutzen, das Tensorprodukt ohne den Umweg über Räume von Homomorphismen zu konstruieren (siehe z. B. BOURBAKI, *Algèbre*; Chapitre II: *Algèbre linéaire*, insbesondere Paragraph 3 und 4).

Als nächstes sammeln wir weitere Isomorphismen, die wir alle sorgfältig auflisten müssen, da sie in der Theorie der *Tensoren* eine wesentliche Rolle spielen. Hierzu gehören die *Kommutativität* und *Assoziativität* des Tensorprodukts von Vektorräumen und das Verhalten unter *Dualisieren* und Bildung von Homomorphismen.

Satz 7.6 *Es existieren kanonische Isomorphismen (hierbei sind V, V_1, V_2, V_3, V_4 beliebige endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume):*

- a) $V \otimes \mathbb{K} \cong V$;
- b) $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$;
- c) $V_1^* \otimes V_2 \cong \text{Hom}(V_1, V_2)$, insbesondere $V^* \otimes V \cong \text{End}(V)$;
- d) $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$;
- e) $(V_1 \otimes V_2)^* \cong V_1^* \otimes V_2^*$;
- f) $\text{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3) \cong \text{Hom}(V_1, \text{Hom}(V_2, V_3)) \cong V_1^* \otimes \text{Hom}(V_2, V_3)$;
- g) $\text{Hom}(V_1, V_2 \otimes V_3) \cong \text{Hom}(V_1, V_2) \otimes V_3$;
- h) $\text{Hom}(V_1, V_2) \otimes \text{Hom}(V_3, V_4) \cong \text{Hom}(V_1 \otimes V_3, V_2 \otimes V_4)$.

Beweis. a) $V \otimes \mathbb{K} \cong \text{Hom}(V^*, \mathbb{K}) \cong V^{**} \xleftarrow{\sim} V$.

b) Mit $\text{Bil}(V_1, V_2) \cong \text{Bil}(V_2, V_1)$ folgt unmittelbar $V_1 \otimes V_2 \cong \text{Hom}(V_2^*, V_1) \cong V_2 \otimes V_1$.

c) $V_1^* \otimes V_2 \cong \text{Hom}(V_1^{**}, V_2) \cong \text{Hom}(V_1, V_2)$.

d) Mit e) ergibt sich

$$\text{Mult}_3(V_1^*, V_2^*, V_3^*) \cong \text{Hom}(V_1^*, \text{Bil}(V_2^*, V_3^*)) \cong V_1 \otimes \text{Bil}(V_2^*, V_3^*) \cong V_1 \otimes (V_2^* \otimes V_3^*)^* \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$

Auf der anderen Seite ist $\text{Mult}_3(V_1^*, V_2^*, V_3^*) \cong \text{Mult}_3(V_3^*, V_1^*, V_2^*)$, und wegen der Kommutativität folgt die Behauptung.

e) $(V_1 \otimes V_2)^* \cong \text{Hom}(V_1^*, V_2^*) \cong \text{Hom}(V_2, V_1^*) \cong \text{Hom}(V_1^{**}, V_2^*) \cong V_1^* \otimes V_2^*$.

f) $\text{Hom}(V_1 \otimes V_2, V_3) \cong (V_1^* \otimes V_2^*) \otimes V_3 \cong V_1^* \otimes (V_2^* \otimes V_3) \cong \text{Hom}(V_1, \text{Hom}(V_2, V_3))$.

g) $\text{Hom}(V_1, V_2 \otimes V_3) \cong V_1^* \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1^* \otimes V_2) \otimes V_3 \cong \text{Hom}(V_1, V_2) \otimes V_3$. □

Warnung und Bemerkung. Die als *Kommutativität* des Tensorprodukts bezeichnete kanonische Isomorphie $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$ kommt selbstverständlich formal dadurch zustande, daß man einem reinen Tensor $v_1 \otimes v_2$ den Tensor $v_2 \otimes v_1$ zuordnet und die so gewonnene Abbildung linear fortsetzt. Dies bedeutet jedoch nicht, daß im Falle $V_1 = V_2$ immer die Gleichheit $v_2 \otimes v_1 = v_1 \otimes v_2$ besteht! Das Tensorprodukt von *Elementen* ist also nicht kommutativ, sondern das Tensorprodukt von Vektorräumen. Bei der *Assoziativität* liegen die Verhältnisse dagegen etwas einfacher. Sie besagt im Wesentlichen, daß die „paarweise Beklammerung“ von mehrfachen reinen Tensoren unerheblich ist, also z. B. $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3$

ohne Bedenken mit $v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$ identifiziert werden kann. Wir lassen daher im folgenden sowohl in mehrfachen reinen Tensoren als auch in mehrfachen Tensorprodukten von Vektorräumen Klammern konsequent fort.

Der letzte Satz in diesem Kontext sagt aus, daß das Tensorprodukt von endlich-dimensionalen Vektorräumen mit *direkten Summen* vertauscht.

Satz 7.7 *Es existieren kanonische Isomorphismen*

$$V_1 \otimes (V_2 \oplus V_2') \cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_2'), \quad (V_1 \oplus V_1') \otimes V_2 \cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1' \otimes V_2).$$

Beweis. Die zweite Aussage kann man mit der Kommutativität direkt auf die erste zurückführen. Diese ist denkbar einfach einzusehen:

$$V_1 \otimes (V_2 \oplus V_2') \cong \text{Hom}(V_1^*, V_2 \oplus V_2') \cong \text{Hom}(V_1^*, V_2) \oplus \text{Hom}(V_1^*, V_2') \cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_2'). \quad \square$$

Warnung. Für *Moduln* über kommutativen Ringen, die nicht endlich erzeugt und frei sind, gibt es statt der obigen Isomorphismen i. A. nur kanonische Abbildungen in einer von beiden Richtungen, die aber weder injektiv noch surjektiv zu sein brauchen (siehe BOURBAKI, loc.cit.).

Wir führen nun das *Tensorprodukt von Vektorbündeln* E_1 und E_2 auf naheliegende Weise gemäß der vorstehenden Überlegungen ein durch das Kroneckerprodukt der Übergangsmatrizen: $A_{\beta\alpha} \otimes B_{\beta\alpha}$. Es ist dann insbesondere

$$E_1 \otimes E_2 \cong \text{Hom}(E_1^*, E_2),$$

und die Fasern dieses Bündels

$$(E_1 \otimes E_2)_x = \text{Hom}(E_1^*, E_2)_x = \text{Hom}(E_{1x}^*, E_{2x}) = E_{1x} \otimes E_{2x}$$

besitzen die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts von Vektorräumen. Da offensichtlich das Kroneckerprodukt von Matrizen kommutativ und assoziativ ist, hat man kanonische Isomorphismen

$$E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1, \quad (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3).$$

Ebenso kann man die *Distributivgesetze* ableiten:

$$E_1 \otimes (E_2 \oplus E_2') \cong (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1 \otimes E_2'), \quad (E_1 \oplus E_1') \otimes E_2 \cong (E_1 \otimes E_2) \oplus (E_1' \otimes E_2).$$

Aber auch alle anderen kanonischen Isomorphismen zwischen Vektorräumen bleiben bestehen, wie man völlig analog zu der Isomorphie $E \rightarrow E^{**}$ nachprüft (weswegen auch die Begründungen für die zuvor angegebenen kanonischen Isomorphismen überflüssig sind).

Satz 7.8 *Es bestehen kanonische Isomorphismen (hierbei sind E, E_1, E_2, E_3, E_4 beliebige Vektorraumbündel auf der Mannigfaltigkeit X):*

- a) $E \otimes (\mathbb{K} \times X) \cong E$;
- b) $E_1 \otimes E_2 \cong E_2 \otimes E_1$;
- c) $E_1^* \otimes E_2 \cong \text{Hom}(E_1, E_2)$, insbesondere $E^* \otimes E \cong \text{End}(E)$;
- d) $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$;
- e) $(E_1 \otimes E_2)^* \cong E_1^* \otimes E_2^*$;
- f) $\text{Hom}(E_1 \otimes E_2, E_3) \cong \text{Hom}(E_1, \text{Hom}(E_2, E_3)) \cong E_1^* \otimes \text{Hom}(E_2, E_3)$;
- g) $\text{Hom}(E_1, E_2 \otimes E_3) \cong \text{Hom}(E_1, E_2) \otimes E_3$;
- h) $\text{Hom}(E_1, E_2) \otimes \text{Hom}(E_3, E_4) \cong \text{Hom}(E_1 \otimes E_3, E_2 \otimes E_4)$.

Bemerkung. Das Bündel $E_1 \otimes E_2 = \bigsqcup (E_{1x} \otimes E_{2x})$ hat die folgende Eigenschaft (und hätte auch dadurch erklärt werden können): Sind $s_j \in \Gamma(U, E_j)$ Schnitte, $j = 1, 2$, so wird durch

$$(s_1 \otimes s_2)(x) = s_1(x) \otimes s_2(x)$$

ein C^∞ -Schnitt in $E_1 \otimes E_2$ definiert. Sind e_1, \dots, e_r bzw. f_1, \dots, f_s lokale Basen von E_1 bzw. E_2 über einer offenen Menge U , so bilden die Schnitte

$$e_j \otimes f_\ell, \quad 1 \leq j \leq r, 1 \leq \ell \leq s$$

eine lokale Basis von $E_1 \otimes E_2$ über U . Für das Rechnen mit Schnitten in $E_1 \otimes E_2$ über U braucht man ferner nur zu wissen: Die Schnitte der Form

$$s_1 \otimes s_2, \quad s_j \in \Gamma(U, E_j)$$

(„reine Tensoren“) erzeugen den Modul $\Gamma(U, E_1 \otimes E_2)$ (aber nicht jeder Schnitt ist von dieser Form!). Es gelten die Rechenregeln

$$\begin{cases} (s_1 + hs'_1) \otimes s_2 = s_1 \otimes s_2 + h(s'_1 \otimes s_2) \\ s_1 \otimes (s_2 + hs'_2) = s_1 \otimes s_2 + h(s_1 \otimes s'_2) \\ h(s_1 \otimes s_2) = (hs_1) \otimes s_2 = s_1 \otimes (hs_2). \end{cases}$$

Bemerkung. Eine Charakterisierung des Tensorprodukts von Vektorbündeln analog zu der von Vektorräumen geben wir zu Beginn des Kapitels 9.

Wir sind nun endlich in der Lage, *Tensorfelder* in einem Vektorbündel E über der Mannigfaltigkeit X einzuführen.

Definition. Ein p -fach kovariantes und q -fach kontravariantes C^κ -Tensorfeld (oder kurz ein (p, q) -Tensor oder ein *Tensor vom Typ* (p, q)) auf $U \subset X$ mit Werten in E ist ein C^κ -Schnitt in dem Bündel

$$T_q^p(E) := (E^*)^{\otimes p} \otimes E^{\otimes q},$$

wobei $(E^*)^{\otimes p} = E^* \otimes \dots \otimes E^*$ das p -fache Tensorprodukt von E^* mit sich selbst und entsprechend $E^{\otimes q}$ das q -fache Tensorprodukt von E bedeutet. Es ist natürlich

$$T_0^0(E) = X \times \mathbb{R}, \quad T_1^0(E) = E, \quad T_0^1(E) = E^*.$$

Ist e_1, \dots, e_r eine lokale Basis über U in E mit dualer Basis $e^1 = e_1^*, \dots, e^r = e_r^*$, so schreibt sich ein solches (p, q) -Tensorfeld *eindeutig* als Linearkombination in der lokalen Basis

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq r.$$

Die Bezeichnung „ p -fach kovariant und q -fach kontravariant“ bezieht sich also auf den *Basiswechsel* in diesem Bündel, der sich (relativ zu den Übergangsmatrizen des Bündels E , das als das primäre Bündel angesehen wird), tatsächlich in gewissem Sinne p -fach kovariant und q -fach kontravariant vollzieht (siehe die Tabelle auf p. 37). Die Bezeichnung $T_q^p(E)$ entspricht in diesem Text der Tatsache, daß p der Basisvektoren *obere* und q von ihnen *untere* Indizes tragen.⁶ Wir schreiben (p, q) -Tensoren lokal immer in der Form

$$\sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q},$$

um der Einstein-Konvention zu genügen (d. h. gegebenenfalls das Summenzeichen einfach fortzulassen). Als Schnitte in $(E^*)^{\otimes p} \otimes E^{\otimes q}$ transformieren sich die Koordinaten, also die Funktionen $a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q}$,

⁶Dies wird aber in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt. Siehe auch weiter unten.

gerade *entgegengesetzt* zur Definition, also p -fach kontravariant und q -fach kovariant mit den Übergangsmatrizen von E . (Ein Grund mehr, die Indizes i_1, \dots, i_p nach unten und die Indizes j_1, \dots, j_q nach oben zu schreiben - Da Physiker oft Tensoren schlicht als das System ihrer Koeffizienten ansehen, wird in der entsprechenden Literatur meist konsequent mit $T_p^q(E)$ bezeichnet, was wir $T_q^p(E)$ genannt haben). Da wir die genauen Transformations-Formeln in unserem Aufbau nicht benötigen, unterziehen wir uns nicht dem Zwang, sie explizit aufzuschreiben.

Im Falle des Tangentialbündels $E = T_X$ schreiben wir $(T_q^p)_X$ anstelle von $T_q^p(T_X)$, so daß

$$(T_1^0)_X = T_X, \quad (T_0^1)_X = T_X^*.$$

Schnitte in den Bündeln $(T_q^p)_X$ heißen dann (p, q) -Tensoren oder *Tensorfelder* auf U (schlechthin). In Koordinatenumgebungen mit Koordinaten x_α^j schreiben sich solche also als Linearkombinationen von

$$dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_\alpha^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_q}}, \quad 1 \leq i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \leq n.$$

Insbesondere sind also $(1, 0)$ -Tensoren das gleiche wie *Pfaffsche Formen* und $(0, 1)$ -Tensoren dasselbe wie *Vektorfelder*.

Bemerkung. Wir können wieder die EINSTEINSche *Summationskonvention* benutzen, d. h. den Ausdruck

$$a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_\alpha^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_q}}$$

als

$$\sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} dx_\alpha^{i_1} \otimes \dots \otimes dx_\alpha^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x_\alpha^{j_q}}$$

interpretieren, wenn wir gemäß unserer früheren Bemerkung in Kapitel 6 den Index i in dx^i als oberen, den Index j in $\partial/\partial x^j$ als unteren Index auffassen.

Wie sind solche Tensoren zu deuten? Nun, wegen der zahlreichen, von uns schon hervorgehobenen kanonischen Isomorphismen - je nach Geschmack: „glücklicherweise“ oder „bedauerlicherweise“ - unter ganz verschiedenen Aspekten. Geht man aber davon aus, wie oben schon gesagt, daß das Bündel E (und speziell das Tangentialbündel T_X einer Mannigfaltigkeit) das *Primäre* ist, so sollte man zunächst die Operation eines Tensorfeldes auf *Vektorfeldern* (also für allgemeine Bündel E auf Schnitten in demselben) oder mehreren von ihnen in den Vordergrund stellen. Für $(1, 0)$ -Tensoren $\omega \in \Gamma(U, E^*)$ ist dies augenscheinlich, da diese ja Pfaffsche Formen (oder kurz: (differenzierbare) 1-Formen) mit Werten in E sind. Als solche operieren sie auf ganz natürliche Weise auf Schnitten in E über U , d. h. ω kann aufgefaßt werden als eine $\mathcal{C}^\infty(U)$ -lineare Abbildung $\Gamma(U, E) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$. Wir haben somit eine *natürliche Paarung*

$$\Gamma(U, E^*) \times \Gamma(U, E) \ni (\omega, v) \longmapsto \omega(v) \in \mathcal{C}^\infty(U),$$

die sowohl in ω als auch in v $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linear ist.

Diese Interpretation läßt sich unmittelbar (per Induktion) auf $(p, 0)$ -Tensoren ausdehnen. Wir benutzen ab sofort das Symbol R für Tensoren, um auf eines der wichtigsten Beispiele anzuspielen, das wir später noch kennenlernen werden, den RIEMANNschen *Krümmungstensor*. Per definitionem ist ja für $p \geq 2$

$$(E^*)^{\otimes p} \cong E^* \otimes (E^*)^{\otimes (p-1)} \cong \text{Hom}(E, (E^*)^{\otimes (p-1)}).$$

Somit wird durch jeden Schnitt in $(E^*)^{\otimes p}$, also jedem $(p, 0)$ -Tensor R , einem beliebigen Schnitt in E ein Schnitt in $(E^*)^{\otimes (p-1)}$ zugeordnet. Wir können es dabei belassen, also R auffassen als eine $\mathcal{C}^\infty(U)$ -lineare Abbildung, die jedem Schnitt in E einen Schnitt über $(E^*)^{\otimes (p-1)}$ zuordnet:

$$\Gamma(U, E) \ni v \longmapsto R(v) \in \Gamma(U, (E^*)^{\otimes (p-1)}).$$

Wir brauchen hier aber nicht stehen zu bleiben, denn $R(v)$ operiert dann ja wieder auf Schnitten in $\Gamma(U, E)$, etc. - Auf diese Weise erhalten wir als naheliegendes Ergebnis den folgenden Satz.

Satz 7.9 Jeder $(p, 0)$ -Tensor R über U mit Werten in dem Vektorbündel E kann in kanonischer Weise aufgefaßt werden als p -multilineare Abbildung von $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Moduln:

$$\underbrace{\Gamma(U, E) \times \cdots \times \Gamma(U, E)}_p \ni (v_1, \dots, v_p) \longmapsto R(v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Bemerkung. Wegen der Nichtkommutativität von Tensoren ist diese Interpretation i. A. wesentlich abhängig von der Reihenfolge der Vektorfelder v_1, \dots, v_p . Wollen wir dies ausschließen, so müssen wir weitere Bedingungen an das Tensorfeld stellen (siehe hierzu auch Kapitel 9).

Im Allgemeinfall eines (p, q) -Tensors R liefert die gleiche Argumentation eine p -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\Gamma(U, E) \times \cdots \times \Gamma(U, E)}_p \ni (v_1, \dots, v_p) \longmapsto R(v_1, \dots, v_p) \in \Gamma(U, E^{\otimes q}),$$

und verwendet man das gleiche Argument für E^* anstelle von E unter Berücksichtigung der kanonischen Isomorphie $E \cong E^{**}$, so erhält man das folgende Ergebnis.

Satz 7.10 Jeder (p, q) -Tensor R über U mit Werten in dem Vektorbündel E kann in kanonischer Weise aufgefaßt werden als $(p + q)$ -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\Gamma(U, E) \times \cdots \times \Gamma(U, E)}_p \times \underbrace{\Gamma(U, E^*) \times \cdots \times \Gamma(U, E^*)}_q \ni (v_1, \dots, v_p; \omega_1, \dots, \omega_q) \longmapsto R(v_1, \dots, v_p; \omega_1, \dots, \omega_q) \in \mathcal{C}^\infty(U).$$

Speziell im Falle des Tangentialbündels operiert R auf p Vektorfeldern und q Pfaffschen Formen in multilinearer Weise.

Bemerkung. Selbstverständlich ist diese Interpretation nicht zwingend. Genauso gut können wir (etwa sukzessive von links nach rechts) nur $p' \leq p$ Schnitte in E („Vektorfelder“) und $q' \leq q$ Schnitte in E^* („Pfaffsche Formen“) einsetzen und gewinnen so eine $(p' + q')$ -multilineare Abbildung

$$\underbrace{\Gamma(U, E) \times \cdots \times \Gamma(U, E)}_{p'} \times \underbrace{\Gamma(U, E^*) \times \cdots \times \Gamma(U, E^*)}_{q'} \longrightarrow \Gamma(U, (E^*)^{\otimes(p-p')} \otimes E^{\otimes(q-q')})$$

in den Raum der $(p - p', q - q')$ -Tensorfelder mit Werten in E . Man beachte aber, daß das oben in der Klammer stehende „etwa“ im Allgemeinen viele weitere Möglichkeiten der Interpretation zuläßt, die in jedem Einzelfall genauer zu spezifizieren sind.

Auch wenn dies eigentlich nicht nötig ist, wollen wir die durch Satz 10 unzweifelhaft bestätigte Interpretation von Tensorfeldern als geeignete Multilinearformen noch durch eine Rechnung in lokalen Koordinaten rechtfertigen (und dabei auch den letzten Satz in der vorstehenden Bemerkung genauer beleuchten). Wir schreiben in lokalen Koordinaten x^1, \dots, x^n auf $U \subset X$ den (p, q) -Tensor R in der üblichen Weise:

$$R = \sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q}.$$

Wir können hierin an jeder „Stelle“ ℓ zwischen 1 und p einen Schnitt

$$v = \sum_{k=1}^r v^k e_k$$

in E einsetzen gemäß der Formel

$$\sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_\ell}(v) e^{i_1} \otimes \cdots \widehat{e^{i_\ell}} \cdots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_q},$$

also durch

$$\sum_{i_1, \dots, \hat{i}_\ell, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} \left(\sum_{i_\ell} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} v^{i_\ell} \right) e^{i_1} \otimes \dots \widehat{e^{i_\ell}} \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}.$$

Unsere koordinatenfreie Einführung der Tensorfelder *garantiert* nun, daß dies ein globaler $(p-1, q)$ -Tensor ist, wenn R und v ebenfalls global gegeben waren. Wir überlassen es dem Leser, dies an Hand der Transformationsformeln für Tensorfelder und Vektorfelder nachzurechnen, sofern er von der gegebenen Argumentation nicht überzeugt ist. Im gleichen Sinne kann man natürlich an mehreren oder allen Stellen i_ℓ des Tensors R Schnitte in E und an mehreren oder allen Stellen j_m Schnitte in dem dualen Bündel E^* einsetzen.

Bemerkung. Man kann sich ein (p, q) -Tensorfeld auch physikalisch als *Versuchsordnung* vorstellen, die an jeder Stelle $x \in X$ für je p Tangentialvektoren an X in x und je q „Cotangentialvektoren“ an derselben Stelle einen reellen *Meßwert* ergibt, und zwar so, daß sich bei differenzierbarer Variation der Tangentialvektoren und Cotangentialvektoren mit dem Punkt $x \in X$ auch der Meßwert differenzierbar verändert. Besonders bildhaft wird diese Vorstellung ausgedrückt in dem Buch *Gravitation* [30], pp. 74 ff.

Bis jetzt haben wir konsequent Tensoren als Schnitte in $T_q^p(E) := (E^*)^{\otimes p} \otimes E^{\otimes q}$ aufgefaßt. Nun gibt es aber weitere kanonische Isomorphismen wie z. B.

$$(E^*)^{\otimes 2} \otimes E \cong E^* \otimes E \otimes E^*,$$

die uns zusätzliche, wenn auch nicht dramatisch neue Interpretationsmöglichkeiten eröffnen. Sie bedeuten im vorliegenden Beispiel, daß man nicht zuerst *zwei* Vektorfelder und dann eine Pfaffsche Form, sondern erst nur *ein* Vektorfeld, *dann* eine Pfaffsche Form und schließlich wieder ein Vektorfeld in R einsetzt:

$$R = R(v_1, \omega, v_2).$$

Diese Interpretationsmöglichkeiten kann man an der Stellung der Indizes an den Koeffizienten von Tensorfeldern deutlich machen. In der Standard-Interpretation schreibt man genauer

$$R = \sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

anstelle von

$$R = \sum_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}$$

um anzudeuten, daß man zuerst die i -Variablen, d. h. die Schnitte in E , und dann erst die Schnitte im dualen Bündel „abarbeitet“. Für $(2, 1)$ -Tensoren als Schnitte in $E^* \otimes E \otimes E^*$ muß man dann die Koeffizienten in der Form

$$a_i^j{}_k$$

und den Tensor als

$$R = \sum_{i, j, k} a_i^j{}_k e^i \otimes e_j \otimes e^k$$

schreiben.

Bemerkung. Die Situation vereinfacht sich natürlich erheblich, wenn man das duale Bündel E^* mit E selbst auf kanonische Weise identifizieren kann. Dies ist insbesondere richtig für das Tangentialbündel T_X bei *Riemannschen*, *Minkowskischen*, also allgemein *pseudo-Riemannschen* und bei *symplektischen* Mannigfaltigkeiten (siehe Kapitel 10).

Für die Anwendungen in Kapitel 10 ist es nützlich, die Existenz eines Vektorbündel-Isomorphismus $E \rightarrow E^*$ in die Existenz eines geeigneten Tensors mit Werten in E umzuformulieren. Wir behandeln gleich eine allgemeinere Situation. Ein Homomorphismus von Vektorbündeln $\varphi : E \rightarrow F$ entspricht

gemäß Folgerung 6.9 eindeutig einem Schnitt in dem Vektorbündel $\text{Hom}(E, F)$, also einem Element in

$$\Gamma(X, \text{Hom}(E, F)).$$

Wegen der kanonischen Isomorphie $\text{Hom}(E, F) \cong E^* \otimes F$ können wir somit einen Homomorphismus $\varphi : E \rightarrow F$ mit einem globalen Schnitt in $E^* \otimes F \cong (E \otimes F^*)^*$ identifizieren, im Falle $F = E^*$ also mit einem $(2, 0)$ -Tensor auf X mit Werten in E ! Welche zusätzliche Bedingungen müssen wir an diesen Tensor stellen, damit der zugehörige Homomorphismus ein *Isomorphismus* ist?

Um diese Frage zu klären, betrachten wir zunächst den Fall von endlich-dimensionalen Vektorräumen V, W mit einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$. Wegen der eben schon verwendeten Isomorphismen

$$\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W \cong (V \otimes W^*)^*$$

kann man φ eine *Bilinearform* B auf $V \times W^*$ zuordnen, die gegeben wird durch

$$B(v, \lambda) := \lambda(\varphi(v)), \quad v \in V, \lambda \in W^*.$$

Es ist wohlbekannt (und für den Leser mittlerweile eine leichte Übungsaufgabe zu zeigen), daß die *Injektivität* von φ gleichbedeutend ist mit der Aussage

$$B(v, \lambda) = 0 \text{ für alle } \lambda \in W^* \implies v = 0.$$

Ebenso ist die *Surjektivität* von φ äquivalent zu der Aussage

$$B(v, \lambda) = 0 \text{ für alle } v \in V \implies \lambda = 0.$$

Sind diese beiden Bedingungen für die Bilinearform B erfüllt, so nennt man B *nicht ausgeartet* (im anderen Fall *ausgeartet*). Ist zusätzlich $\dim V = \dim W$, so genügt hierfür natürlich auch nur eine der beiden Bedingungen. Wir fassen zusammen:

Satz 7.11 Die lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die kanonisch assoziierte Bilinearform $B(v, \lambda) = \lambda(\varphi(v))$, $v \in V$, $\lambda \in W^*$, nicht ausgeartet ist.

Als Folgerung gewinnen wir damit unmittelbar den folgenden

Satz 7.12 Die Vektorbündel-Isomorphismen $E \rightarrow F$ stehen in Bijektion zu den globalen Schnitten in dem Vektorbündel $E^* \otimes F$, die an keiner Stelle $x \in X$, aufgefaßt als Bilinearform auf $E_x \times F_x^*$, ausgeartet sind.

Für uns besonders wichtig ist die folgende Konsequenz.

Folgerung 7.13 Die Vektorbündel-Isomorphismen $E \rightarrow E^*$ stehen in Bijektion zu den $(2, 0)$ -Tensoren mit Werten in E , die an keiner Stelle $x \in X$ ausgeartet sind.

Bemerkung. Entsprechend stehen die Vektorbündel-Isomorphismen $E \rightarrow E^{**}$ in 1:1-Korrespondenz zu den globalen Schnitten in dem Vektorbündel $(E \otimes E^*)^*$. Wir überlassen es dem Leser, den für die kanonische Isomorphie $E \rightarrow E^{**}$ zuständigen „gottgegebenen“ $(1, 1)$ -Tensor mit Werten in E namhaft zu machen.

8 Untervektorraumbündel, Quotientenbündel und exakte Sequenzen

Ist $X \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit, so ist das *Tangentialbündel* T_X eine Untermannigfaltigkeit des *trivialen* Vektorbündels $X \times \mathbb{R}^N$ auf X mit Faser \mathbb{R}^N :

$$T_X = \bigsqcup_{x \in X} T_{X,x} \subset X \times \mathbb{R}^N.$$

Wir können uns allgemeiner die folgende Frage stellen:

Gegeben sei ein Vektorraumbündel (E, π, X) , und für alle $x \in X$ seien Untervektorräume $E'_x \subset E_x$ ausgezeichnet; wann ist die mengentheoretische disjunkte Vereinigung

$$E' = \bigsqcup_{x \in X} E'_x \xrightarrow{\pi'} X, \quad \pi' = \pi|_{E'}$$

wieder ein Vektorraumbündel?

Damit diese Frage überhaupt sinnvoll gestellt ist, muß E' eine *Untermannigfaltigkeit* von E sein. Wir geben daher die folgende

Definition. Ist $E' = \bigsqcup_{x \in X} E'_x$ eine Untermannigfaltigkeit von E , so heißt E' ein *Unterbündel* oder *Teilbündel* von E , wenn $(E', \pi' = \pi|_{E'}, X)$ ein Vektorbündel ist.

Wir sind an *einfachen* Kriterien interessiert, die uns die Unterbündeleigenschaft garantieren. Selbstverständlich ist eine *notwendige* Bedingung, daß die Dimensionen der Vektorräume E'_x lokal konstante Funktionen in x sind. Hat man z. B. einen Vektorbündelhomomorphismus

$$E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2$$

vorliegen, so kann man

$$\ker \varphi := \bigsqcup_{x \in X} \ker \varphi_x \subset E_1 \quad \text{und} \quad \text{im } \varphi := \bigsqcup_{x \in X} \text{im } \varphi_x \subset E_2$$

bilden. Wir werden weiter unten sehen, daß diese genau dann Unterbündel von E_1 bzw. E_2 sind, wenn der Rang von φ_x eine lokal konstante Funktion ist.

Wir haben es hier offenbar mit „*Linearer Algebra mit differenzierbaren Koeffizienten*“ zu tun. Es ist daher nicht verwunderlich, daß wir einige grundlegende Aussagen aus der Linearen Algebra verallgemeinern müssen.

Lemma 8.1 *Es seien $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(U, E)$ Schnitte über U in dem Vektorbündel E , so daß an einer Stelle $x_0 \in U$ die Werte*

$$s_1(x_0), \dots, s_k(x_0) \in E_{x_0}$$

linear unabhängig sind. Dann gibt es eine Umgebung $W = W(x_0)$, so daß $s_1(x), \dots, s_k(x) \in E_x$ linear unabhängig sind für alle $x \in W$.

Beweis. Da es sich um eine lokale Aussage handelt, können wir $E|_U = \pi^{-1}(U)$ als trivial annehmen: $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^r$. Schreibt man die Koordinaten der Schnitte s_j als r -tupel von Funktionen ${}^t(f_{1j}, \dots, f_{rj})$, so besitzt die $r \times k$ -Matrix

$$(f_{ij}(x))_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, k}}$$

an der Stelle x_0 den maximalen Rang k . Ist dann ohne Einschränkung

$$\det (f_{ij}(x_0))_{i,j=1, \dots, k} \neq 0,$$

so bleibt diese Bedingung aus Stetigkeitsgründen in einer ganzen Umgebung $W = W(x_0)$ erhalten. \square

Folgerung 8.2 (Basisergänzungssatz) *Je $k \leq r$ in x_0 linear unabhängige Schnitte s_1, \dots, s_k in E lassen sich in einer Umgebung W von x_0 zu einer lokalen Basis von E ergänzen.*

Beweis. Es sei e_1, \dots, e_r eine lokale Basis von E in einer Umgebung von x_0 . Nach dem klassischen Basisergänzungssatz gibt es $r - k$ Werte an der Stelle x_0 , ohne Einschränkung $e_{k+1}(x_0), \dots, e_r(x_0)$, so daß $s_1(x_0), \dots, s_k(x_0), e_{k+1}(x_0), \dots, e_r(x_0)$ eine Basis von E_{x_0} bilden. Der Rest ergibt sich aus Lemma 1. \square

Wir kommen nun zu den versprochenen weiteren Charakterisierungen von Unterbündeln.

Satz 8.3 *Es sei die Teilmenge $E' = \bigsqcup_{x \in X} E'_x \subset E$ gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) E' ist ein Unterbündel von E ;
- ii) die Funktion $x \mapsto \dim E'_x$ ist lokal konstant, und zu jedem Vektor $v_0 \in E'_{x_0}$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0)$ und einen Schnitt $s \in \Gamma(U, E)$ mit $s(x_0) = v_0$, $s(x) \in E'_x$ für alle $x \in U$;
- iii) für alle $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0)$ und $k \leq r = \text{rang } E$ linear unabhängige Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(U, E)$, die an jeder Stelle $x \in U$ den Vektorraum E'_x erzeugen ;
- iv) für alle $x_0 \in X$ gibt es eine Umgebung $U = U(x_0)$ und eine lokale Basis e_1, \dots, e_r von $E|_U$, so daß das Teilsystem e_1, \dots, e_k , $k \leq r$, an jeder Stelle $x \in U$ den Vektorraum E'_x erzeugt.

Beweis. i) \implies ii) Da E' ein Unterbündel ist, gibt es zu $v_0 \in E'_{x_0}$ einen Schnitt $s' \in \Gamma(U, E')$ in einer geeigneten Umgebung $U = U(x_0)$ mit $s'(x_0) = v_0$. Da $\pi'^{-1}(U) = E' \cap E|_U$ eine Untermannigfaltigkeit von $E|_U$ ist, ist die Inklusion $i : E'|_U \hookrightarrow E|_U$ differenzierbar und somit $s := i \circ s'$ der gesuchte Schnitt.

ii) \implies iii) Nach Voraussetzung gibt es Schnitte $s_1, \dots, s_k : U \rightarrow E$, die an der Stelle x_0 eine Basis von E_{x_0} bilden und deren Werte alle in E' liegen. Wegen Lemma 1 sind, nach Verkleinerung von U , die $s_1(x), \dots, s_k(x)$ linear unabhängig in E'_x , und da $\dim E'_x = \dim E'_{x_0} = k$, erzeugen sie auch E'_x an jeder Stelle $x \in U$.

iii) \implies iv) ist eine Konsequenz aus dem Basisergänzungssatz.

iv) \implies i) Dies ist ebenfalls eine lokale Aussage; wir können daher annehmen, daß E lokal durch die Basis e_1, \dots, e_r trivialisiert wird zu $U \times \mathbb{R}^r$. Dann ist

$$E'|_U \cong U \times \{ {}^t(v_1, \dots, v_r) \in \mathbb{R}^r : v_{k+1} = \dots = v_r = 0 \} \cong U \times \mathbb{R}^k. \quad \square$$

Bemerkung. Aus der letzten Zeile des vorstehenden Beweises folgt sofort, daß ein Unterbündel E' von E sogar eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von E sein muß.

Als unmittelbare Konsequenz aus der Bedingung iv) im vorigen Satz gewinnt man die folgende Beschreibung mit Hilfe von Cozyklen.

Satz 8.4 *Ist $E' = \bigsqcup_{x \in X} E'_x \subset E$ ein Unterbündel von E , so existiert eine E trivialisierende Überdeckung \mathfrak{U} , in der der E zugeordnete 1-Cozyklus die spezielle Form*

$$(*) \quad \begin{pmatrix} A'_{\beta\alpha} & * \\ 0 & A''_{\beta\alpha} \end{pmatrix}$$

annimmt.

Läßt sich umgekehrt das Bündel E durch einen Cozyklus der Form () beschreiben, so existiert ein Unterbündel $E' \subset E$, dessen beschreibender 1-Cozyklus durch $(A'_{\beta\alpha})$ gegeben wird.*

Folgerung 8.5 *Ist $E' \subset E$ ein Untervektorbündel, so ist die kanonische Einbettung $j : E' \rightarrow E$ ein Vektorbündel-Homomorphismus.*

Für ein Untervektorraumbündel $E' \subset E$ hat man eine punktal definierte kanonische Projektion

$$E \xrightarrow{p} E/E' := \bigsqcup_{x \in X} E_x/E'_x .$$

Wir überlassen dem Leser den Nachweis des folgenden Satzes.

Satz 8.6 E/E' besitzt genau eine Vektorraumbündelstruktur mit der Eigenschaft, daß für jeden Schnitt $s : U \rightarrow E$ die Zusammensetzung $\bar{s} := p \circ s$ ein Schnitt in E/E' ist. Wird $E' \subset E$ durch einen 1-Cozyklus der Form (*) repräsentiert, so wird E/E' beschrieben durch den 1-Cozyklus $(A''_{\beta\alpha})$.

Definition. E/E' heißt das Quotientenbündel des Bündels E nach dem Unterbündel E' .

Es sei nun $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ ein Vektorraumbündel-Homomorphismus über X , und $\ker \varphi$ und $\operatorname{im} \varphi$ seien wie zu Beginn dieses Kapitels definiert. Die linearen Abbildungen $\varphi_x : E_{1,x} \rightarrow E_{2,x}$ besitzen einen Rang, den wir im folgenden mit $\operatorname{rg}_x \varphi$ bezeichnen. Es ist unmittelbar klar, daß diese „Rangfunktion“ nach unten halbstetig ist, d. h.

$$\operatorname{rg}_x \varphi \geq \operatorname{rg}_{x_0} \varphi$$

in einer Umgebung $U = U(x_0)$ gilt. Die speziellen Auswirkungen der *lokalen Konstanz* dieser Funktion beschreibt der folgende Satz.

Satz 8.7 Die folgenden Aussagen sind äquivalent :

- a) $\operatorname{rg}_x \varphi$ ist lokal konstant ;
- b) $\ker \varphi$ ist ein Unterbündel von E_1 ;
- c) $\operatorname{im} \varphi$ ist ein Unterbündel von E_2 .

Beweis. Wir können uns (wegen der lokalen Natur der Aussagen) auf die triviale Situation $E_1|_U = U \times V_1$, $E_2|_U = U \times V_2$ mit Vektorräumen V_1 , V_2 zurückziehen, wobei U eine geeignete Umgebung eines beliebigen, aber fest gewählten Punktes x_0 ist. Es gilt dann mit der grundlegenden Identität der Linearen Algebra:

$$\operatorname{rg}_x \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi_x = r - \dim \ker \varphi_x , \quad r = \operatorname{rang} E_1|_U = \dim V_1 .$$

Ist also b) (oder c)) erfüllt, so auch a).

Sei umgekehrt a) erfüllt. Wir zeigen, daß dann auch die Aussage c) richtig ist. Dazu wählen wir U zusätzlich so klein, daß $\operatorname{rg}_x \varphi = k$, $x \in U$. Ist $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r$ eine lokale Basis von E_1 über U , so erzeugen die Bilder $\varphi \circ \tilde{e}_1, \dots, \varphi \circ \tilde{e}_r$ an jeder Stelle $x \in U$ das Bild $\operatorname{im} \varphi_x$. Bei richtiger Nummerierung erzeugen schon die ersten k von ihnen den Vektorraum $\operatorname{im} \varphi_{x_0}$, und da diese in einer (evtl. kleineren) Umgebung von x_0 linear unabhängig bleiben, die Dimension von $\operatorname{im} \varphi_x$ aber konstant gleich k ist, genügen die Schnitte $\varphi \circ \tilde{e}_1, \dots, \varphi \circ \tilde{e}_k$ der Bedingung iii) in Satz 3 in Bezug auf die Bildmenge $\operatorname{im} \varphi$. Infolgedessen ist $\operatorname{im} \varphi$ ein Unterbündel von E_2 .

Es bleibt noch die Richtung c) \implies b) zu zeigen. Wie im vorigen Schritt können wir annehmen, daß das Unterbündel $\operatorname{im} \varphi \subset E_2$ eine lokale Basis $f_1 := \varphi \circ \tilde{e}_1, \dots, f_k := \varphi \circ \tilde{e}_k$ besitzt, wobei $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_r$ eine lokale Basis von E_1 über U bezeichnet. Wir schreiben nun

$$\varphi \circ \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^k g_{ij} f_j , \quad i = k+1, \dots, r ,$$

und

$$e_1 := \tilde{e}_1, \dots, e_k := \tilde{e}_k, e_i := \tilde{e}_i - \sum_{j=1}^k g_{ij} \tilde{e}_j , \quad i = k+1, \dots, r .$$

Dann ist auch e_1, \dots, e_r eine lokale Basis von E , und die Schnitte

$$e_{k+1}, \dots, e_r$$

erzeugen $\ker \varphi_x$ an jeder Stelle $x \in X$. Mit Satz 3, iv) folgt, daß $\ker \varphi$ ein Unterbündel von E_1 ist. \square

Definition. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes nennen wir die entsprechenden Bündel auch das *Kernbündel* und das *Bildbündel* von φ .

Folgerung 8.8 Ist $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ ein Vektorbündel-Homomorphismus konstanten Ranges, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$E_1 / \ker \varphi \xrightarrow{\sim} \text{im } \varphi$$

von Vektorraumbündeln über X .

Der Beweis ist trivial. \square

Beispiel. Es sei $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit, $j : Y \rightarrow X$ die kanonische Einbettung. In dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_Y & \xrightarrow{T_j} & T_X \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

ist T_j eine Immersion, wie man leicht nachweist. Nach Satz 5.5 gibt es genau einen Y -Homomorphismus $j' : T_Y \rightarrow j^*T_X = T_X|_Y$, der das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_Y & \xrightarrow{T_j} & T_X \\ & \searrow j' & \nearrow \\ & T_X|_Y & \end{array}$$

(mit dem kanonischen Homomorphismus $T_X|_Y = j^*T_X \rightarrow T_X$) kommutativ macht. Nun ist die Abbildung

$$y \mapsto \text{rg}_y j' = \dim_y Y$$

lokal konstant. Also ist $\text{im } j' \subset T_X|_Y$ ein Unterbündel. Wegen

$$\ker j' = \bigsqcup_{y \in Y} \ker j'_y = \bigsqcup_{y \in Y} \{0\} =: 0,$$

können wir dieses Bündel sogar mit dem Tangentialbündel T_Y identifizieren (siehe auch weiter unten):

$$T_Y \cong \text{im } j' \subset T_X|_Y.$$

Definition. Das Quotientenbündel $j^*T_X / \text{im } j'$ heißt das *Normalenbündel* $N = N_{Y|X}$ von Y in X .

Satz 8.9 Ist $Y \subset \mathbb{E}^N$ eine Hyperfläche im euklidischen Raum mit dem „klassischen“ Normalenbündel

$$N_Y \subset Y \times \mathbb{E}^N,$$

so ist dieses kanonisch isomorph zu dem oben definierten Normalenbündel $N_{Y|\mathbb{E}^N}$.

Beweis: Übungsaufgabe. \square

Wir geben noch ein weiteres Beispiel.

Beispiel. (Y, π, X) sei ein beliebiges Faserbündel, und (T_Y, σ, Y) sei das Tangentialbündel von Y . Wir haben dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 T_Y & \xrightarrow{T_\pi} & T_X \\
 \sigma \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xrightarrow{\pi} & X
 \end{array}$$

Lokal ist $Y = X \times F$, $T_Y = T_X \times T_F$, und T_π ist die Projektion $T_X \times T_F \rightarrow T_X$. Man sieht leicht, daß

$$\ker T_\pi = \bigsqcup_{y \in Y} \ker T_{\pi, y} \subset T_Y$$

ein Unterbündel vom Rang $r = \dim F$ ist. Dieses Bündel heißt das Bündel der *vertikalen* Tangentialvektoren von (Y, π, X) .

Definition. Eine Folge

$$E_1 \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E_2$$

von zwei Vektorraumbündelhomomorphismen φ, ψ heißt eine *exakte Sequenz*, wenn für alle $x \in X$ die Sequenz

$$E_{1x} \xrightarrow{\varphi_x} E_x \xrightarrow{\psi_x} E_{2x}$$

exakt ist, d. h. wenn für alle $x \in X$ die Gleichheit

$$\operatorname{im} \varphi_x = \ker \psi_x$$

gilt. Insbesondere ist dann $\psi \circ \varphi = 0$.

Lemma 8.10 a) *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\varphi} E$$

ist genau dann exakt, wenn alle Homomorphismen $\varphi_x : E_{1x} \rightarrow E_x$ injektiv sind. Es ist dann $\varphi(E_1) \subset E$ ein Unterbündel von E und die kanonische Abbildung $E_1 \rightarrow \operatorname{im} \varphi$ ein Vektorraumbündel-Isomorphismus.

b) *Die Sequenz*

$$E \xrightarrow{\psi} E_2 \longrightarrow 0$$

ist genau dann exakt, wenn alle Homomorphismen $\psi_x : E_x \rightarrow E_{2x}$ surjektiv sind. Es ist dann $\ker \psi = \bigsqcup_{x \in X} \ker \psi_x \subset E$ ein Unterbündel von E , und die kanonische Abbildung

$$E / \ker \psi \longrightarrow E_2$$

ist ein Vektorraumbündel-Isomorphismus.

c) *Die Sequenz*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\varphi} E_2 \longrightarrow 0$$

ist genau dann (an den beiden Stellen E_1, E_2) exakt, wenn φ ein Vektorraumbündel-Isomorphismus ist.

Beweis. a) und b) implizieren c). Die jeweils ersten Aussagen von a) und b) sind triviale Folgerungen aus der Definition. Im Fall a) ist

$$\operatorname{rg}_x \varphi = \dim E_{1x} = \operatorname{rg} E_1 = \text{konst.}$$

und damit $\operatorname{im} \varphi = \varphi(E_1)$ ein Unterbündel von E . Es ist ferner evident, daß die kanonische Abbildung $E_1 \rightarrow \varphi(E_1)$ bijektiv und auf den Fasern ein Vektorraum-Isomorphismus ist. Also ist $E_1 \rightarrow \varphi(E_1)$ ein Vektorraumbündel-Isomorphismus.

Im Fall b) ist $\operatorname{rg}_x \psi = \operatorname{rang} \psi_x = \dim E_{2x} = \text{konst.}$ Also ist $\psi(E) = E_2$ und $\ker \psi \subset E$ ein Unterbündel mit

$$E / \ker \psi \xrightarrow{\sim} \operatorname{im} \psi = E_2 . \quad \square$$

Bemerkung. Für eine Einbettung $j : Y \rightarrow X$ haben wir stets eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow T_X|_Y = j^*T_X \longrightarrow N_{Y|X} \longrightarrow 0 .$$

Definition. Eine Sequenz

$$E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} E_n$$

von Vektorraumbündel-Homomorphismen heißt *exakt*, wenn alle Sequenzen

$$E_{j-1} \xrightarrow{\varphi_j} E_j \xrightarrow{\varphi_{j+1}} E_{j+1} , \quad j = 1, \dots, n-1 ,$$

exakt sind, d. h. wenn

$$\operatorname{im} \varphi_{jx} = \ker \varphi_{j+1,x}$$

für alle $x \in X$ und alle $j = 1, \dots, n-1$.

Satz 8.11 *Ist $E' \subset E$ ein Untervektorraumbündel von E , so ist die kanonische Sequenz*

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E/E' \longrightarrow 0$$

exakt. Hat man umgekehrt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E_2 \longrightarrow 0 ,$$

so ist $j(E_1) =: E'$ ein Untervektorraumbündel von E , und die kanonischen Vektorraumbündel-Homomorphismen

$$E_1 \longrightarrow j(E_1) = E' \quad \text{und} \quad E/E' \longrightarrow E_2$$

sind Isomorphismen.

Beweis. Trivial. □

Allgemeiner gilt der

Satz 8.12 *Ist $E_0 \xrightarrow{\varphi_1} E_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_n} E_n$ eine exakte Sequenz von Vektorraumbündeln, so ist*

$$\operatorname{im} \varphi_j = \ker \varphi_{j+1} \subset E_j , \quad j = 1, \dots, n-1$$

ein Untervektorraumbündel von E_j .

Beweis. Wir können uns auf den Fall $n = 2$, d. h. auf eine exakte Sequenz der Form

$$E_1 \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E_2$$

beschränken. Es ist dann für alle $x \in X$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}_x \varphi + \operatorname{rg}_x \psi &= \operatorname{rang} \varphi_x + \operatorname{rang} \psi_x \\ &= \dim \operatorname{im} \varphi_x + \dim E_x - \dim \ker \psi_x \\ &= \dim E_x , \end{aligned}$$

also lokal konstant. Da *beide* Rangfunktionen $\operatorname{rg}_x \varphi$ und $\operatorname{rg}_x \psi$ von unten halbstetig sind, müssen sie lokal konstant sein. Also ist $\operatorname{im} \varphi = \ker \psi \subset E$ ein Untervektorraumbündel. □

Bemerkung. Bei endlich-dimensionalen Vektorräumen führt eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{j} V \xrightarrow{p} V_2 \longrightarrow 0$$

zu einem unkanonischen „Splitting“

$$V \cong V_1 \oplus V_2 .$$

Man kann nämlich ohne Schwierigkeiten einen Homomorphismus $q : V_2 \rightarrow V$ konstruieren mit $p \circ q = \text{id}_{V_2}$, der automatisch injektiv ist (siehe auch den Beweis des nächsten Satzes). Ist dann $v \in V$, so ist $v' := v - q(p(v)) \in j(V_1)$ wegen

$$p(v') = p(v - q(p(v))) = p(v) - p(q(p(v))) = p(v) - p(v) = 0 ,$$

d. h. $v = j(v_1) + q(v_2)$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$. Damit ist auf jeden Fall $V = j(V_1) + q(V_2)$. Ist aber $v = j(v_1) = q(v_2)$, so ist

$$v_2 = p \circ q(v_2) = p \circ j(v_1) = 0$$

und folglich wegen $j(v_1) = q(v_2) = 0$ auch $v_1 = 0$. Also haben wir $j(V_1) \cap q(V_2) = \{0\}$ gezeigt, d. h. die Isomorphie $V \cong j(V_1) \oplus q(V_2)$.

Diese Aussage läßt sich auf Vektorraumbündel (in der C^∞ -Kategorie) ausdehnen.

Satz 8.13 *Es sei $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} E_2 \rightarrow 0$ eine exakte Sequenz von C^∞ -Vektorraumbündeln. Dann „splittet“ diese Sequenz; d. h. es gibt einen (nicht kanonischen) Vektorraumbündel-Homomorphismus $q : E_2 \rightarrow E$ mit $p \circ q = \text{id}_{E_2}$. Insbesondere ist*

$$E \cong j(E_1) \oplus q(E_2) \cong E_1 \oplus E_2 .$$

Warnung. Dieser Satz ist i. a. falsch für C^ω -Bündel und für *holomorphe* Bündel !

Beweis. Es sei $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine trivialisierende Überdeckung von X bzgl. E , s. d. bzgl. einer lokalen Basis e_1, \dots, e_r von E auf U_α das Unterbündel E_1 erzeugt wird von e_1, \dots, e_k , $k \leq r$, und $E_2 \cong E/E_1$ von den Restklassen $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_r$. Man kann damit lokal auf U_α die Abbildung

$$q_\alpha : E_2|_{U_\alpha} \longrightarrow E|_{U_\alpha}$$

erklären durch

$$\bar{e}_i \longmapsto e_i, \quad i = k+1, \dots, r .$$

Im allgemeinen verkleben sich die zu verschiedenen $\alpha \in A$ gehörenden q_α jedoch nicht zu einem eindeutig definierten Homomorphismus $q : E_2 \rightarrow E$. Man nimmt deshalb eine der Überdeckung \mathfrak{U} untergeordnete C^∞ -Teilung der Eins, sagen wir $(\eta_\alpha)_{\alpha \in A}$, zu Hilfe und bildet

$$q := \sum_{\alpha \in A} \eta_\alpha q_\alpha .$$

Dann ist offensichtlich q ein wohldefinierter Homomorphismus von E_2 nach E , und an jeder Stelle $v_x \in E_{2x}$ gilt:

$$\begin{aligned} p \circ q(v_x) &= p \left(\sum_{\alpha} (\eta_\alpha q_\alpha)(v_x) \right) = \sum_{\alpha} \eta_\alpha(x) (p \circ q_\alpha)(v_x) \\ &= \left(\sum_{\alpha} \eta_\alpha(x) \right) v_x = v_x , \end{aligned}$$

also $p \circ q = \text{id}_{E_2}$. Aus dieser letzten Beziehung folgt unmittelbar, daß q injektiv ist. Also ist $q(E_2) \subset E$ ein Untervektorraumbündel. Der Rest des Satzes folgt dann wie im oben ausgeführten Fall von endlich-dimensionalen Vektorräumen. \square

Als einfache Folgerung gewinnt man hieraus die Tatsache, daß sich Schnitte in differenzierbaren Bündeln unter surjektiven Bündelhomomorphismen „liften“ lassen.

Folgerung 8.14 *Ist $p : E \rightarrow E_2$ ein surjektiver Homomorphismus von C^∞ -Bündeln, so ist für jede offene Menge $U \subset X$ die kanonische Abbildung*

$$\Gamma(U, E) \rightarrow \Gamma(U, E_2)$$

surjektiv.

Beweis. Man betrachte die exakte Sequenz $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E \rightarrow E_2 \rightarrow 0$ mit $E_1 = \ker p$. Es sei ferner $q : E_2 \rightarrow E$ eine wie oben konstruierte „Rechtsinverse“ zu p , d. h. $p \circ q = \text{id}_{E_2}$. Dann ist für jeden Schnitt $s_2 \in \Gamma(U, E_2)$ die Komposition $s := q \circ s_2$ ein Schnitt in E mit $p \circ s = s_2$. \square

Bemerkung. Man kann für Vektorbündel beliebigen Differenzierbarkeitsgrades κ leicht beweisen, daß eine exakte Sequenz von Bündeln

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2$$

zu einer exakten *Schnitt*-Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, E_1) \longrightarrow \Gamma(U, E) \longrightarrow \Gamma(U, E_2)$$

führt. Man sagt aus diesem Grunde auch, der Schnittfunktor sei *linksexakt*. Den eben aufgezeigten Sachverhalt des Liftens von Schnitten kann man dann auch wie folgt formulieren.

Satz 8.15 *Für C^∞ -Vektorbündel ist der Schnittfunktor exakt; d.h.: jede kurze exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

gibt Anlaß zu einer kurzen exakten Sequenz von Schnittmoduln :

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, E_1) \longrightarrow \Gamma(U, E) \longrightarrow \Gamma(U, E_2) \longrightarrow 0.$$

Für reell-analytische und komplex-analytische Vektorraumbündel (oder allgemeiner für *Garben*) ist die *Rechtsexaktheit* des Schnittfunktors nicht mehr generell gewährleistet. Deswegen benötigt man die sogenannte *Cohomologietheorie*, die jedem Vektorbündel E und jeder offenen Menge $U \subset X$ in funktorieller Weise *höhere Cohomologiegruppen* $H^q(U, E)$ zuordnet, wobei $H^0(U, E) = \Gamma(U, E)$, und jeder kurzen exakten Sequenz von Bündeln oder Garben eine *lange exakte Cohomologiesequenz*

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(U, E_1) \longrightarrow H^0(U, E) \longrightarrow H^0(U, E_2) \\ &\longrightarrow H^1(U, E_1) \longrightarrow H^1(U, E) \longrightarrow H^1(U, E_2) \\ &\longrightarrow H^2(U, E_1) \longrightarrow H^2(U, E) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Das Liftungsproblem hat dann mit dem Verschwinden der Cohomologiegruppe $H^1(U, E_1)$ zu tun, oder genauer für einen gegebenen Schnitt $s \in H^0(U, E_2)$ mit dem Verschwinden seines Bildes in $H^1(U, E_1)$. Für C^∞ -Vektorbündel sind alle höheren Cohomologiegruppen tatsächlich 0.

9 Symmetrische und alternierende Tensoren und der Differentialformenkalkül

Bevor wir uns dem eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels zuwenden, wollen wir das Tensorprodukt von Vektorbündeln wie im Fall von Vektorräumen durch eine *universelle Eigenschaft* charakterisieren. Wir brauchen dazu nur einige Definitionen aus Kapitel 7 geeignet zu übertragen und schon vorhandene Einsichten neu zu interpretieren. Zuerst benötigen wir eine Verallgemeinerung des Begriffs der *multilinearen Abbildungen* zwischen Vektorräumen auf Vektorbündel. Wir lassen uns dabei von denselben Gedanken leiten wie bei der Übertragung des Begriffs der „linearen Abbildung“.

Erinnern wir uns zu diesem Zwecke daran, daß für Vektorbündel E_1, E_2 die direkte Summe $E_1 \oplus E_2$ als *Mannigfaltigkeit* durch das Faserprodukt $E_1 \times_X E_2$ gegeben wird, dessen Faser über einem Punkt $x \in X$ mengentheoretisch mit dem kartesischen Produkt $E_{1x} \times E_{2x}$ identifiziert werden kann. Es ist daher sinnvoll, für ein weiteres Vektorbündel F auf X mit

$$\text{Bil}_X(E_1 \oplus E_2, F) \quad \text{oder} \quad \text{Bil}_X(E_1, E_2; F)$$

die Menge der fasertreuen differenzierbaren Abbildungen $E_1 \oplus E_2 \rightarrow F$ zu bezeichnen, deren Einschränkung $E_{1x} \times E_{2x} \rightarrow F_x$ auf die Fasern bilinear sind. Selbstverständlich trägt diese Menge die Struktur eines $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ -Moduls. Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so gewinnt man durch Einschränkung der beteiligten Bündel auf U auch die $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ -Moduln $\text{Bil}_U(E_1 \oplus E_2, F)$. Es ist nun leicht zu sehen, daß dieses System von Moduln identifiziert werden kann mit den Schnittmoduln in einem geeigneten Vektorbündel, das wir entsprechend unserer beim Homomorphismenbündel eingeführten Notation mit

$$\text{Bil}(E_1 \oplus E_2, F) \quad \text{oder} \quad \text{Bil}(E_1, E_2; F)$$

bezeichnen werden:

$$\Gamma(U, \text{Bil}(E_1 \oplus E_2, F)) = \text{Bil}_U(E_1 \oplus E_2, F);$$

man braucht nur

$$\text{Bil}(E_1, E_2; F) = \text{Hom}(E_1, \text{Hom}(E_2, F))$$

zu setzen, da nach Definition des Homomorphismenbündels das rechts stehende Bündel gerade die Halme

$$\text{Hom}(E_{1x}, \text{Hom}(E_{2x}, F_x)) \cong \text{Bil}(E_{1x}, E_{2x}; F_x)$$

besitzt und damit seine Schnitte über einer offenen Menge $U \subset X$ mit dem Punkt $x \in U$ differenzierbar variierende bilineare Abbildungen $E_{1x} \times E_{2x} \rightarrow F_x$ sind.

Es gibt nun in diesem Bündel einen *kanonischen* Schnitt über ganz X , wenn wir für F das *Tensorprodukt* $E_1 \otimes E_2$ einsetzen. Mit Hilfe von Satz 7.8 findet man unmittelbar eine kanonische Isomorphie

$$\begin{aligned} \text{Bil}(E_1, E_2; E_1 \otimes E_2) &= \text{Hom}(E_1, \text{Hom}(E_2, E_1 \otimes E_2)) \\ &\cong (E_1 \otimes E_2)^* \otimes (E_1 \otimes E_2) \cong \text{Hom}(E_1 \otimes E_2, E_1 \otimes E_2). \end{aligned}$$

Das rechts stehende Bündel besitzt einen natürlichen globalen Schnitt, nämlich die Identität. Überträgt man diesen vermöge des kanonischen Isomorphismus auf das Bündel der bilinearen Abbildungen, so gewinnen wir eine kanonische bilineare Abbildung

$$\beta_0 : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E_1 \otimes E_2,$$

die selbstverständlich auf den Fasern der Summe zweier Vektoren ihr Tensorprodukt zuordnet: $E_{1x} \times E_{2x} \ni (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$. Wie zu Beginn von Kapitel 7 gewinnen wir hieraus für ein beliebiges weiteres Vektorraumbündel F durch Komposition mit β_0 einen kanonischen Vektorbündel-Homomorphismus

$$\text{Hom}(E_1 \otimes E_2, F) \longrightarrow \text{Bil}(E_1 \oplus E_2, F),$$

der mit dem kanonischen Isomorphismus $\text{Hom}(E_1, \text{Hom}(E_2, F)) \cong \text{Hom}(E_1 \otimes E_2, F)$ „übereinstimmt“ (den letzteren gewinnt man aus Satz 7.8). - Wir sehen somit:

Satz 9.1 Das Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$ von Vektorbündeln E_1, E_2 ist durch die folgende universelle Eigenschaft (bis auf Isomorphie eindeutig) bestimmt :

Zu jedem Vektorbündel F und jeder bilinearen Abbildung $\beta \in \text{Bil}_U(E_1 \oplus E_2, F)$ gibt es genau einen linearen Homomorphismus $\alpha \in \text{Hom}_U(E_1 \otimes E_2, F)$, welcher das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & (E_1 \oplus E_2)|_U & \\ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta \\ (E_1 \otimes E_2)|_U & \xrightarrow{\alpha} & F|_U \end{array}$$

kommutativ macht.

Um zu dem eigentlichen Gegenstand dieses Kapitels zu gelangen, bemerken wir, daß wir ab jetzt nur *kontravariante* oder *kovariante* Tensoren mit Werten in E betrachten, also keine „gemischten“ Tensoren. Da die *kovarianten* Tensoren mit Werten in E gerade die *kontravarianten* mit Werten in E^* sind, beschränken wir uns im folgenden auf den kontravarianten Fall. Es sei $r = \text{rg } E$, und

$$E^{\oplus p} := E \oplus \dots \oplus E$$

sei die p -fache WHITNEY-Summe von E . Wie zu Beginn dieses Kapitels können wir das Bündel

$$\text{Mult}(E^{\oplus p}, F)$$

der p -multilinearen Abbildungen von E nach F einführen oder einfach per Induktion setzen:

$$\text{Mult}(E \oplus E, F) := \text{Bil}(E \oplus E, F), \quad \text{Mult}(E^{\oplus(p+1)}, F) := \text{Hom}(E, \text{Mult}(E^{\oplus p}, F)).$$

Auf dem Bündel $E^{\oplus p}$ und seinen Schnitten operiert⁷ die symmetrische Gruppe \mathfrak{S}_p vermittels

$$\mathfrak{S}_p \ni \sigma \longmapsto P_\sigma, \quad P_\sigma(v_1, \dots, v_p) := (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}).$$

P_σ ist ein Vektorraumbündel-Homomorphismus von $E^{\oplus p}$ in sich, und es gilt

$$P_{\sigma_2} \circ P_{\sigma_1} = P_{\sigma_2 \circ \sigma_1}.$$

Wegen $P_{\text{id}} = \text{id}$ und $P_\sigma \circ P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma \circ \sigma^{-1}}$ folgt, daß P_σ invertierbar, also ein Isomorphismus ist. Wir haben damit eine *Darstellung*

$$\mathfrak{S}_p \longrightarrow \text{Isom}_X E^{\oplus p}$$

von \mathfrak{S}_p in die Gruppe $\text{Isom}_X E^{\oplus p}$ der X -Isomorphismen von $E^{\oplus p}$ etabliert (und entsprechend für jede offene Teilmenge $U \subset X$).

Das Ziel dieses Kapitels ist es, *symmetrische* bzw. *alternierende* multilineare Abbildungen durch geeignete Tensoren zu charakterisieren.

Definition. Eine p -multilineare Abbildung $\beta \in \text{Mult}_U(E^{\oplus p}, F)$ heißt *symmetrisch* bzw. *alternierend*, wenn

$$\beta \circ P_\sigma = \beta \quad \text{bzw.} \quad \beta \circ P_\sigma = (\text{sign } \sigma) \beta$$

für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. Wir schreiben $\text{Sym}_U(E^{\oplus p}, F)$ bzw. $\text{Alt}_U(E^{\oplus p}, F)$ für die korrespondierenden \mathcal{C}^∞ -Untermoduln von $\text{Mult}_U(E^{\oplus p}, F)$.

⁷Genaue Definitionen zu den Begriffen *Operation einer Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit* und *Darstellung einer Gruppe* etc. findet man in Kapitel 14 nebst Anhang.

Wodurch müssen wir das Tensorprodukt $E^{\otimes p}$ in Satz 1 ersetzen, um eine entsprechende Aussage für symmetrische und alternierende multilineare Abbildungen zu erhalten? Zur Beantwortung dieser Frage ziehen wir die oben konstruierte p -multilineare Abbildung $\beta_0 : E^{\oplus p} \rightarrow E^{\otimes p}$ zu Rate. Mit

$$\beta_0(v_1, \dots, v_p) = v_1 \otimes \dots \otimes v_p$$

ist auch $\beta_0 \circ P_\sigma$ p -multilinear, und nach der definierenden Eigenschaft des Tensorprodukts gibt es genau einen Vektorraumbündel-Homomorphismus $L_\sigma : E^{\otimes p} \rightarrow E^{\otimes p}$, welcher das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} E^{\oplus p} & \xrightarrow{P_\sigma} & E^{\oplus p} \\ \beta_0 \downarrow & & \downarrow \beta_0 \\ E^{\otimes p} & \xrightarrow{L_\sigma} & E^{\otimes p} \end{array}$$

Wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts folgt

$$L_{\text{id}} = \text{id} \quad \text{und} \quad L_{\sigma_2} \circ L_{\sigma_1} = L_{\sigma_2 \circ \sigma_1}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_p,$$

also insbesondere $L_{\sigma^{-1}} = L_\sigma^{-1}$. Wir gewinnen somit eine weitere Darstellung

$$\mathfrak{S}_p \longrightarrow \text{Isom}_X E^{\otimes p}.$$

Selbstverständlich wird L_σ in einer lokalen Basis e_1, \dots, e_r gegeben durch

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \longmapsto e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_p)}.$$

Da man Homomorphismen addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren kann, bilden wir jetzt das *Mittel* bzw. *alternierende Mittel* über alle Homomorphismen L_σ :

$$\tilde{S} := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} L_\sigma, \quad \tilde{A} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\text{sign } \sigma) L_\sigma.$$

\tilde{S} und \tilde{A} sind Vektorraumbündel-Homomorphismen $E^{\otimes p} \rightarrow E^{\otimes p}$, aber i. a. keine Isomorphismen. Es ist gebräuchlich, im Zusammenhang mit Tensoren eher die Operatoren $S := p! \tilde{S}$ und $A := p! \tilde{A}$ zu verwenden.

Satz 9.2 *Es gilt $\tilde{S}^2 = \tilde{S}$ und $\tilde{A}^2 = \tilde{A}$.*

Beweis. Es genügt wegen der Linearität der Abbildungen, diese Aussagen für „reine“ Tensoren zu beweisen. Wir führen den Beweis für A anstelle von \tilde{A} durch; für S ist er entsprechend (und sogar noch einfacher) zu erhalten.

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} A^2(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) &= A \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\text{sign } \sigma) L_\sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \right) = A \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} (\text{sign } \sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)} \right) \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_p} (\text{sign } \tau \text{ sign } \sigma) v_{(\tau \circ \sigma)(1)} \otimes \dots \otimes v_{(\tau \circ \sigma)(p)}. \end{aligned}$$

Durchlaufen σ und τ unabhängig voneinander die Gruppe \mathfrak{S}_p , so durchläuft $\tau \circ \sigma$ die Gruppe \mathfrak{S}_p genau $\text{ord } \mathfrak{S}_p = p!$ mal. Wegen $\text{sign } \tau \text{ sign } \sigma = \text{sign } (\tau \circ \sigma)$ ist also

$$A^2(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) = p! \sum_{\sigma} (\text{sign } \sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)} = p! A(v_1 \otimes \dots \otimes v_p). \quad \square$$

Um zu erkennen, daß die Bilder dieser Homomorphismen *Untervektorbündel* sind, benötigen wir laut dem vorigen Kapitel folgende Aussage.

Satz 9.3 Die Vektorraumbündel-Homomorphismen $S, A : E^{\otimes p} \longrightarrow E^{\otimes p}$ haben konstanten Rang.

Beweis. Es sei e_1, \dots, e_r eine lokale Basis von E . Dann sind die „gemittelten“ Elemente

$$\begin{aligned} e_{i_1} \cdots e_{i_p} &:= S(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} &:= A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) \end{aligned}$$

Schnitte in $E^{\otimes p}$. Aufgrund der Definition von S und A ergibt sich sofort, daß für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ die Identitäten

$$e_{\sigma(i_1)} \cdots e_{\sigma(i_p)} = e_{i_1} \cdots e_{i_p}, \quad e_{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(i_p)} = (\text{sign } \sigma) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

bestehen. Insbesondere ist $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} = 0$, wenn zwei der Indizes übereinstimmen. Also sind höchstens die Schnitte

$$(+) \quad e_{i_1} \cdots e_{i_p} \quad \text{mit} \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq r$$

bzw. die Schnitte

$$(++) \quad e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \quad \text{mit} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq r$$

linear unabhängig. Man zeigt leicht (oder vergewissert sich unter Berufung auf Aussagen der *Multilinear Algebra*), daß die Elemente in (+) bzw. (++) an jeder Stelle $x \in X$ tatsächlich eine Basis von $S_x(E_x^{\otimes p})$ bzw. $A_x(E_x^{\otimes p})$ bilden. Also sind (+) bzw. (++) lokale Basen von $S(E^{\otimes p})$ bzw. $A(E^{\otimes p})$. \square

Durch einfaches Abzählen können wir sogar den *Rang* dieser Bildbündel bestimmen.

Folgerung 9.4 Die Bilder im S und im A sind Unterbündel von $E^{\otimes p}$ vom Rang $\binom{r+p-1}{p}$ bzw. $\binom{r}{p}$.

Definition. Die Untervektorraumbündel

$$S_p E := \text{im } S, \quad \Lambda^p E := \text{im } A$$

heißen die Bündel der (p -fach kontravarianten) *symmetrischen* bzw. *alternierenden* (oder *schief-symmetrischen*) Tensoren mit Werten in E .

Mit der kanonischen Abbildung $\beta_0 : E^{\oplus p} \rightarrow E^{\otimes p}$ sind die Zusammensetzungen

$$S \circ \beta_0 : E^{\oplus p} \longrightarrow S_p E \quad \text{und} \quad A \circ \beta_0 : E^{\oplus p} \longrightarrow \Lambda^p E$$

p -multilinear und *symmetrisch* bzw. *alternierend*:

$$\begin{aligned} (S \circ \beta_0)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) &= (S \circ \beta_0)(v_1, \dots, v_p), \\ (A \circ \beta_0)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) &= (\text{sign } \sigma) \cdot (A \circ \beta_0)(v_1, \dots, v_p) \end{aligned}$$

für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$. $S_p E$ und $\Lambda^p E$ haben nun die folgende, einfach zu beweisende *universelle* Eigenschaft, die sie (wie das Tensorprodukt) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmen.

Satz 9.5 Zu jedem Vektorbündel F und jedem symmetrischen bzw. alternierenden Schnitt $\beta \in \text{Mult}_U(E^{\oplus p}, F)$ gibt es genau einen Homomorphismus $\alpha \in \text{Hom}_U(S_p E, F)$ bzw. $\alpha \in \text{Hom}_U(\Lambda^p E, F)$, welcher das jeweilige (auf U eingeschränkte) Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & E^{\oplus p} & \\
 S \circ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta \\
 S_p E & \xrightarrow{\alpha} & F
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & E^{\oplus p} & \\
 A \circ \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta \\
 \Lambda^p E & \xrightarrow{\alpha} & F
 \end{array}$$

kommutativ macht.

Beweis. Wir nehmen ohne Einschränkung $U = X$ an. Für eine beliebige p -multilineare Abbildung $\beta : E^{\oplus p} \rightarrow F$ betrachten wir das Standarddiagramm und fragen, unter welchen Voraussetzungen der Homomorphismus $\alpha_0 : E^{\otimes p} \rightarrow F$ z. B. über $\Lambda^p E$ faktorisiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & E^{\oplus p} & \\
 \beta_0 \swarrow & & \searrow \beta \\
 E^{\otimes p} & \xrightarrow{\alpha_0} & F \\
 A \swarrow & & \searrow \alpha \\
 & \Lambda^p E &
 \end{array}$$

In einer lokalen Basis e_1, \dots, e_r von E gilt nach Konstruktion

$$\alpha_0(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) = \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Wenn α_0 über $\Lambda^p E$ faktorisiert, so folgt für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ wegen $A(e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_p)}) = (\text{sign } \sigma) A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p})$, daß auch $\beta(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_p)}) = (\text{sign } \sigma) \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ gelten muß, d. h. β ist notwendig alternierend.

Ist umgekehrt β alternierend, so haben wir für alle $\sigma \in \mathfrak{S}_p$:

$$\alpha_0(e_{\sigma(i_1)} \otimes \dots \otimes e_{\sigma(i_p)}) = (\text{sign } \sigma) \cdot \alpha_0(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}).$$

Bezeichnet nun $i : \Lambda^p E \hookrightarrow E^{\otimes p}$ die kanonische Injektion, so folgt aus der vorstehenden Bemerkung, daß $\alpha_0 \circ i \circ A = p! \alpha_0$. Damit ist

$$\alpha := \frac{1}{p!} \alpha_0 \circ i : \Lambda^p E \longrightarrow F$$

ein Homomorphismus der gesuchten Art. In einer lokalen Basis wird α gegeben durch

$$\alpha(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \beta(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}).$$

Es kann keine zweite solche Abbildung geben, da der Homomorphismus A surjektiv ist.

Der symmetrische Fall kann nach demselben Muster behandelt werden. □

Übungsaufgabe. Man bestimme aus dem 1-Cozyklus $A_{\beta\alpha}$ von E diejenigen von $S_p E$ und $\Lambda^p E$.

Bemerkung und Definition. Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0$$

von Vektorraumbündeln gibt Anlaß zu einer entsprechenden exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(E_2, F) \longrightarrow \text{Hom}(E, F) \longrightarrow \text{Hom}(E_1, F) \longrightarrow 0.$$

Wendet man diese Bemerkung auf die Epimorphismen $S : E^{\oplus p} \rightarrow S_p E$ und $A : E^{\oplus p} \rightarrow \Lambda^p E$ an, so sieht man, daß $\text{Hom}(S_p E, F)$ und $\text{Hom}(\Lambda^p E, F)$ als Unterbündel von $\text{Hom}(E^{\otimes p}, F) \cong$

$\text{Mult}(E^{\oplus p}, F)$ aufgefaßt werden können. Wir schreiben $\text{Sym}(E^{\oplus p}, F)$ bzw. $\text{Alt}(E^{\oplus p}, F)$ für diese Unterbündel der *symmetrischen* bzw. *alternierenden* multilinearen Abbildungen. Es gilt also insbesondere

$$\Gamma(U, \text{Sym}(E^{\oplus p}, F)) \cong \text{Sym}_U(E^{\oplus p}, F) \quad \text{und} \quad \Gamma(U, \text{Alt}(E^{\oplus p}, F)) \cong \text{Alt}_U(E^{\oplus p}, F).$$

Als nächstes wollen wir einige natürliche Homomorphismen und Isomorphismen untersuchen. Zuerst beschäftigen wir uns mit der Konstruktion der *äußeren* und *symmetrischen Algebra*.

Satz 9.6 *Die natürlichen Vektorraumbündel-Homomorphismen*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda^p E \otimes \Lambda^q E \longrightarrow \Lambda^{p+q} E \\ \lambda_p \otimes \lambda_q \longmapsto \tilde{A}(\lambda_p \otimes \lambda_q) \end{array} \right. \quad \text{bzw.} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_p E \otimes S_q E \longrightarrow S_{p+q} E \\ \lambda_p \otimes \lambda_q \longmapsto \tilde{S}(\lambda_p \otimes \lambda_q) \end{array} \right.$$

sind assoziativ und antikommutativ bzw. kommutativ :

$$\tilde{A}(\lambda_q \otimes \lambda_p) = (-1)^{pq} \tilde{A}(\lambda_p \otimes \lambda_q), \quad \tilde{S}(\lambda_q \otimes \lambda_p) = \tilde{S}(\lambda_p \otimes \lambda_q).$$

Warnung. Bei der Beschreibung der Homomorphismen im vorigen Satz wird das Tensorzeichen a priori auf der linken und rechten Seite in verschiedenen Bedeutungen benutzt: links als Element in $\Lambda^p E \otimes \Lambda^q E$ bzw. $S_p E \otimes S_q E$, rechts als Element in $E^{\otimes p} \otimes E^{\otimes q} = E^{\otimes(p+q)}$! Der Satz sagt gerade aus, daß diese Ambivalenz unbedenklich ist.

Beweis. Wir behandeln nur den alternierenden Fall und überlassen die einfache Übertragung des Beweises im symmetrischen Fall dem Leser. Wir skizzieren die einzelnen Schritte.

1. Die entscheidende Bemerkung ist in den Formeln

$$\tilde{A}^{p+q}(\tilde{A}^p(\lambda_p) \otimes \lambda_q) = \tilde{A}^{p+q}(\lambda_p \otimes \lambda_q), \quad \tilde{A}^{p+q}(\lambda_p \otimes \tilde{A}^q(\lambda_q)) = \tilde{A}^{p+q}(\lambda_p \otimes \lambda_q)$$

verborgen, in der wir aus Gründen der größeren Genauigkeit mit \tilde{A}^ℓ anstelle von \tilde{A} den *Alternierungsoperator* auf $E^{\otimes \ell}$ bezeichnen, $\ell \in \{p, q, p+q\}$. Man gewinnt sie sehr einfach unter Benutzung der Tatsache, daß die Gruppe \mathfrak{S}_p als die Untergruppe von \mathfrak{S}_{p+q} aufgefaßt werden kann, welche die Zahlen $j > p$ in $\{1, 2, \dots, p+q\}$ festläßt. Dies impliziert sofort die Assoziativität:

$$\tilde{A}(\tilde{A}(\lambda_p \otimes \lambda_q) \otimes \lambda_m) = \tilde{A}((\lambda_p \otimes \lambda_q) \otimes \lambda_m) = \tilde{A}(\lambda_p \otimes (\lambda_q \otimes \lambda_m)) = \tilde{A}(\lambda_p \otimes \tilde{A}(\lambda_q \otimes \lambda_m)).$$

2. Aus Teil 1 gewinnt man für eine lokale Basis sofort die Beziehung

$$\begin{aligned} \tilde{A}((e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \otimes (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q})) &= \tilde{A}(A(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) \otimes A(e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q})) \\ &= \frac{p! q!}{(p+q)!} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q} \end{aligned}$$

und damit $\tilde{A}(\lambda_p \otimes \lambda_q) = (-1)^{p+q} \tilde{A}(\lambda_q \otimes \lambda_p)$. □

Definition und Bemerkung. Auf dem (endlich-dimensionalen) Schnittmodul

$$\Gamma(U, \bigoplus_{p=0}^r \Lambda^p E) = \bigoplus_{p=0}^r \Gamma(U, \Lambda^p E)$$

kann also durch lineare Fortsetzung der obigen Homomorphismen vermöge des sogenannten *äußeren* oder *Dach-Produkts*

$$\lambda_p \wedge \lambda_q = \frac{(p+q)!}{p! q!} \tilde{A}(\lambda_p \otimes \lambda_q), \quad \lambda_k \in \Gamma(U, \Lambda^k E),$$

eine assoziative und antikommutative Algebra-Struktur erklärt werden. Man nennt den Schnittmodul zusammen mit dieser Algebra-Struktur auch die *äußere Algebra* über $\Gamma(U, E)$. In einer lokalen Basis

e_1, \dots, e_r stimmt für $p = q = 1$ die Definition von $e_j \wedge e_k$ mit unserer früheren Definition überein, und Teil 2 des vorigen Beweises zeigt, daß die Definition des äußeren Produkts auch nicht in Konflikt zu unserer früheren Definition von $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ geraten kann. Für

$$\lambda_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq r} a_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}, \quad \lambda_q = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq r} b_{j_1, \dots, j_q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}$$

ergibt sich somit das Produkt zu

$$\lambda_p \wedge \lambda_q = \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} a_{i_1, \dots, i_p} b_{j_1, \dots, j_q} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_q}.$$

Den symmetrischen Fall kann man ganz entsprechend behandeln. Allerdings ist die *symmetrische Algebra*

$$\Gamma(U, \bigoplus_{p=0}^{\infty} S_p E) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \Gamma(U, S_p E)$$

im Allgemeinen ein unendlich-dimensionaler $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Modul. Über einer trivialisierenden offenen Menge U mit lokaler Basis e_1, \dots, e_r ist dieser Modul zusammen mit der induzierten Algebra-Struktur nichts anderes als der *Polynomring*

$$\mathcal{C}^\infty(U)[e_1, \dots, e_r].$$

Der nächste Satz macht Aussagen über die Verträglichkeit des *Dualisierens* mit dem Bilden der symmetrischen und alternierenden Tensorprodukte.

Satz 9.7 *Man hat natürliche Isomorphismen*

$$\Lambda^p(E^*) \cong (\Lambda^p E)^*, \quad S_p(E^*) \cong (S_p E)^*.$$

Beweis. Es gibt eine kanonische p -multilineare alternierende Abbildung $(E^*)^{\oplus p} \rightarrow \text{Alt}(E^{\oplus p}; X \times \mathbb{R}) \cong (\Lambda^p E)^*$, nämlich

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \mapsto [(v_1, \dots, v_p) \mapsto \det(\varphi_j(v_k))_{1 \leq j, k \leq p}].$$

Also existiert eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccc} & (E^*)^{\oplus p} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \Lambda^p(E^*) & \xrightarrow{\quad \exists \quad} & (\Lambda^p E)^* \end{array}$$

die dem Element $\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_p}$ die alternierende multilineare Abbildung $(v_1, \dots, v_p) \mapsto \det(\varphi_{i_j}(v_k))$ zuordnet. In lokalen Basen geht dabei $(e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*)$ über in die duale Basis zu $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$. Also ist $\Lambda^p(E^*) \rightarrow (\Lambda^p E)^*$ ein Isomorphismus.

Für $S_p(E^*)$ schließt man entsprechend, wobei man die Determinante durch die „Permanente“

$$\text{Perm}(a_{jk}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(p)p}$$

ersetzen muß. □

Folgerung 9.8 *Es gilt*

$$\Lambda^p E^* \cong \text{Alt}(E^{\oplus p}, X \times \mathbb{R}), \quad S_p E^* \cong \text{Sym}(E^{\oplus p}, X \times \mathbb{R}),$$

d. h. die Schnitte in $\Lambda^p E^* \subset (E^*)^{\otimes p} = T_0^p E = \text{Mult}(E^{\oplus p}, X \times \mathbb{R})$ sind genau die alternierenden, die in $S_p E^* \subset T_0^p E$ die symmetrischen einfach p -fach kovarianten Tensoren mit Werten in E .

Wir notieren noch weiter den folgenden Satz, ohne ihn jedoch zu beweisen.

Satz 9.9 *Es gibt kanonische Vektorraumbündel-Homomorphismen*

$$E \otimes \Lambda^p E^* \longrightarrow \Lambda^{p-1} E^*$$

(„inneres“ Produkt).

Beweis. Übungsaufgabe. □

Im Differentialformen-Kalkül spielt das „Liften“ von Formen eine wichtige Rolle. Wir wollen uns daher an dieser Stelle noch einmal grundsätzlich mit dem Liften von Vektorbündeln und Homomorphismen zwischen Vektorbündeln beschäftigen. Sind E_1, E_2 zwei Vektorbündel auf X und ist $f : Y \rightarrow X$ eine differenzierbare Abbildung, so gewinnt man aus der Beschreibung der Homomorphismen durch Cozyklen im Anschluß an Satz 5.4 eine kanonische Isomorphie

$$\mathrm{Hom}(f^*E_1, f^*E_2) \cong f^* \mathrm{Hom}(E_1, E_2).$$

Nun kann man ganz allgemein jedem Schnitt $s : X \rightarrow E$ in einem Vektorbündel $\pi : E \rightarrow X$ auf eindeutige Weise einen Schnitt $\tilde{s} : Y \rightarrow f^*E$ in dem unter $f : Y \rightarrow X$ gelifteten Bündel f^*E durch

$$\tilde{s}(y) := (s(f(y)), y) \in E \times_X Y = f^*E$$

zuordnen. Wir schreiben auch $f^*s := \tilde{s}$ und nennen f^*s die *Liftung* des Schnittes s unter f .

Wendet man diese Bemerkung auf das Bündel $E := \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ und den oben angegebenen Isomorphismus an, so können wir jeden Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_X(E_1, E_2) = \Gamma(X, \mathrm{Hom}(E_1, E_2))$ liften zu einem Element $f^*\varphi$ in $\mathrm{Hom}_Y(f^*E_1, f^*E_2)$. Unter erneuter Berufung auf die Beschreibung von Homomorphismen durch Cozyklen erhalten wir sofort das folgende

Lemma 9.10 a) *Für die Identität $\mathrm{id}_E = \mathrm{id} : E \rightarrow E$ gilt $f^*\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{f^*E}$;*

b) *es gilt $f^*(\psi \circ \varphi) = f^*\psi \circ f^*\varphi$ für Homomorphismen $\varphi \in \mathrm{Hom}_X(E_1, E_2)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_X(E_2, E_3)$.*

Bemerkung. Man umschreibt das vorstehende Lemma auch mit den Worten: f^* ist ein *Funktor* zwischen der Kategorie der Vektorbündel auf X und der der Vektorbündel auf Y .

Dieser Funktor ist sogar *exakt*:

Satz 9.11 *Ist*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E_2 \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz auf X , so ist auch die geliftete Sequenz

$$0 \longrightarrow f^*E_1 \xrightarrow{f^*\varphi} f^*E \xrightarrow{f^*\psi} f^*E_2 \longrightarrow 0$$

exakt.

Beweis. Man braucht Exaktheit nur auf den Halmen über $y \in Y$ zu prüfen. Nun ist aber $(f^*E)_y = E_x$ etc. und z. B. $(f^*\psi)_y = \psi_x : E_x = (f^*E)_y \rightarrow (f^*E_2)_y = E_{2x}$, $x = f(y)$. Dies liefert sofort die Behauptung. □

Folgerung 9.12 *Ist $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ ein Vektorbündel-Homomorphismus, so gilt*

$$f^* \mathrm{im} \varphi = \mathrm{im} f^*\varphi, \quad f^* \ker \varphi = \ker f^*\varphi.$$

Ist insbesondere φ ein Isomorphismus, so auch f^φ. Des weiteren gilt $f^*(E^{\oplus p}) \cong (f^*E)^{\oplus p}$.*

Beweis. Trivial. □

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Liften des *dualen* Bündels E^* . Da das Liften eines 1-Cozyklus unter f mit dem Bilden des *kontragredienten* Cozyklus vertauschbar ist, erhält man sofort das

Lemma 9.13 $f^*E^* \cong (f^*E)^*$.

Jedem Homomorphismus $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ ist der *duale* Homomorphismus $\varphi^* : E_2^* \rightarrow E_1^*$ kanonisch zugeordnet. In lokalen Basen e_1, \dots, e_r bzw. f_1, \dots, f_s wird φ^* beschrieben durch

$$(\varphi^* f_k^*)(e_j) = f_k^*(\varphi \circ e_j).$$

Man rechnet unmittelbar nach, daß folgendes richtig ist.

Satz 9.14 *Für jeden Homomorphismus $\varphi \in \text{Hom}_X(E_1, E_2)$ ist*

$$f^*\varphi^* = (f^*\varphi)^*.$$

Wir wenden diese Überlegungen jetzt auf das Tensorprodukt an. Nach Konstruktion ist $E_1 \otimes E_2 \cong \text{Hom}(E_1^*, E_2)$. Sind nun $\varphi_j : E_j \rightarrow F_j$ Homomorphismen, $j = 1, 2$, so wird jedem Schnitt $s \in \text{Hom}_U(E_1^*, E_2)$ durch $s \mapsto \tilde{s}$, $\tilde{s}(x) := \varphi_{2x} \circ s(x) \circ \varphi_{1x}^*$, ein Schnitt $\tilde{s} \in \text{Hom}_U(F_1^*, F_2)$ zugeordnet. Den resultierenden Homomorphismus bezeichnen wir mit

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2 : E_1 \otimes E_2 \longrightarrow F_1 \otimes F_2.$$

In lokalen Basen ist selbstverständlich

$$(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(e_j \otimes f_k) = \varphi_1(e_j) \otimes \varphi_2(f_k).$$

Satz 9.15 *Es bestehen kanonische Isomorphismen*

$$f^*(E_1 \otimes E_2) \cong f^*E_1 \otimes f^*E_2.$$

Bezüglich dieser kann $f^(\varphi_1 \otimes \varphi_2)$ mit $f^*\varphi_1 \otimes f^*\varphi_2$ identifiziert werden.*

Beweis. Nur der erste Teil bedarf einer Begründung, die sich allerdings nach den getroffenen Vorbereitungen fast von selbst ergibt:

$$f^*(E_1 \otimes E_2) \cong f^*\text{Hom}(E_1^*, E_2) \cong \text{Hom}(f^*E_1^*, f^*E_2) \cong \text{Hom}((f^*E_1)^*, f^*E_2) \cong f^*E_1 \otimes f^*E_2. \quad \square$$

Die Anwendung dieser Überlegungen auf das *symmetrische* und *alternierende* Produkt eines Vektorbündels E auf X ist ebenfalls „straightforward“. Wir bezeichnen den *Symmetrisierungs-Homomorphismus* $S : E^{\oplus p} \rightarrow E^{\oplus p}$ mit S_X und den korrespondierenden Homomorphismus für das geliftete Bündel f^*E mit

$$S_Y : (f^*E)^{\oplus p} \longrightarrow (f^*E)^{\oplus p}.$$

Es ist unmittelbar unter Verwendung der Isomorphie $(f^*E)^{\oplus p} \cong f^*E^{\oplus p}$ klar, daß man S_Y mit f^*S_X identifizieren kann:

$$S_Y = f^*S_X.$$

Entsprechend erhält man $A_Y = f^*A_X$, und hieraus als

Folgerung 9.16 *Man hat kanonische Isomorphismen*

$$f^*(S_p E) \cong S_p(f^*E), \quad f^*(\Lambda^p E) \cong \Lambda^p(f^*E).$$

Beweis. Wir behandeln den symmetrischen Fall; der alternierende ergibt sich durch formales Ersetzen des Symbols S durch das Symbol A . Wegen der Isomorphie $(f^*E)^{\otimes p} \cong f^*(E^{\otimes p})$ sieht man sofort, daß auch für S_X , aufgefaßt als Homomorphismus $S_X : E^{\otimes p} \rightarrow E^{\otimes p}$, die Beziehung $S_Y = f^*S_X$ besteht. Es folgt

$$S_p(f^*E) = \text{im } f^*S_X \cong f^* \text{im } S_X = f^*(S_pE). \quad \square$$

Folgerung 9.17 *Ist $\varphi : E \rightarrow F$ ein Vektorbündel-Homomorphismus, so gibt es eindeutig bestimmte Vektorbündel-Homomorphismen*

$$S_p\varphi : S_pE \longrightarrow S_pF, \quad \Lambda^p\varphi : \Lambda^pE \longrightarrow \Lambda^pF,$$

die die folgenden Diagramme kommutativ machen:

$$\begin{array}{ccc} E^{\otimes p} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes p}} & F^{\otimes p} \\ S \downarrow & & \downarrow S \\ S_pE & \xrightarrow{S_p\varphi} & S_pF \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E^{\otimes p} & \xrightarrow{\varphi^{\otimes p}} & F^{\otimes p} \\ A \downarrow & & \downarrow A \\ \Lambda^pE & \xrightarrow{\Lambda^p\varphi} & \Lambda^pF \end{array}$$

Mit $f : Y \rightarrow X$ ist $f^*(S_p\varphi) \cong S_p(f^*\varphi)$ und $f^*(\Lambda^p\varphi) \cong \Lambda^p(f^*\varphi)$.

Wir wenden dies alles jetzt noch auf den (äußeren) *Differentialformen-Kalkül* an, also auf Schnitte in

$$\Lambda^p T_X^* = (\Lambda^p T_X)^*.$$

Als erstes wollen wir zeigen, daß Differentialformen sich liften lassen unter differenzierbaren Abbildungen

$$f : Y \longrightarrow X.$$

Zunächst ist klar, daß sich jeder Schnitt s über U in einem beliebigen Bündel $E \rightarrow X$ zu einem Schnitt in f^*E über $f^{-1}(U)$ liften läßt. Wir sind weiter im Besitz der kanonischen Abbildung

$$T_Y \longrightarrow f^*T_X.$$

Durch Dualisieren und äußere Produktbildung erhalten wir hieraus die kanonischen Abbildungen

$$f^*(\Lambda^p T_X^*) \longrightarrow \Lambda^p T_Y^*.$$

Jeder Schnitt $\omega \in \Gamma(U, \Lambda^p T_X^*)$ liefert dann einen Schnitt $f^*\omega \in \Gamma(f^{-1}(U), f^*\Lambda^p T_X^*)$ und damit eine Differentialform in $\Gamma(f^{-1}(U), \Lambda^p T_Y^*)$, die wir ebenfalls mit $f^*\omega$ oder $\omega \circ f$ bezeichnen. Man rechnet leicht nach, daß mit

$$\omega = \sum g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

die *geliftete* Form $f^*\omega$ die folgende Gestalt besitzt:

$$f^*\omega = \sum (g_{i_1 \dots i_p} \circ f) df_{i_1} \wedge \dots \wedge df_{i_p}.$$

Bemerkung. Das Liften geht auch für *beliebige kovariante* Tensorfelder gut, aber nicht für *kontravariante* oder *gemischte* Tensorfelder (hier nur, wenn f ein Diffeomorphismus ist).

Der Nachweis des folgenden Satzes ist eine leichte Übung (zu Teil c) siehe die Bemerkung im Anschluß an Satz 6).

Satz 9.18 a) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2,$

- b) $f^*(g\omega) = (g \circ f) \cdot f^*\omega$,
 c) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$,
 d) $(f_2 \circ f_1)^*\omega = f_2^*(f_1^*\omega)$.

Schließlich wollen wir noch ein paar wichtige Anmerkungen zu dem Begriff des äußeren *Differentials* von beliebigen Differentialformen machen. Ist $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $U \subset X$ offen, so haben wir $df \in \mathcal{C}^\infty(U, T_X^*)$ definiert durch

$$(df)(v) = v(f), \quad v \in \mathcal{C}^\infty(U, T_X).$$

Wir haben damit aber keinen Bündelhomomorphismus $X \times \mathbb{R} \rightarrow T_X^*$ erklärt, denn die Abbildung

$$(*) \quad d: \mathcal{C}^\infty(U) \longrightarrow \Gamma(U, T_X^*)$$

ist zwar \mathbb{R} -linear, aber nicht $\mathcal{C}^\infty(U)$ -linear. Es gilt nämlich

$$d(fg)(v) = v(fg) = fv(g) + gv(f) = (fdg + gdf)v$$

für ein beliebiges Vektorfeld v auf U ; also ist die korrekte Formel: $d(fg) = fdg + gdf$.

Wir wollen diese Abbildung nun fortsetzen zu einem Endomorphismus auf dem $\mathcal{C}^\infty(U)$ -Modul

$$\Gamma(U, \Lambda T_X^*) := \bigoplus_{p=0}^n \Gamma(U, \Lambda^p T_X^*), \quad n = \dim X.$$

Die mit Hilfe von Satz 6 auf diesem Modul erklärte assoziative und antikommutative Multiplikation $(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi$ macht ihn zu einer Algebra; sie heißt die *äußere Algebra* über $U \subset X$.

Durch Festlegung geeigneter Bedingungen ist eine solche Fortsetzung nur auf genau eine Weise möglich. Dies besagt der folgende

Satz 9.19 *Für jede Mannigfaltigkeit X gibt es genau eine Abbildung*

$$d: \Gamma(X, \Lambda T_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \Lambda T_X^*),$$

die den folgenden Bedingungen genügt:

- a) d ist \mathbb{R} -linear;
 b) $d^2 = 0$;
 c) $d\Gamma(X, \Lambda^p T_X^*) \subset \Gamma(X, \Lambda^{p+1} T_X^*)$, und für $p = 0$ ist d das Differential von Funktionen;
 d) $d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^p \varphi \wedge d\psi$, $\varphi \in \Gamma(X, \Lambda^p T_X^*)$.

Beweis. 1. d ist notwendig lokal, d. h. sind $\varphi, \psi \in \Gamma(X, \Lambda^p T_X^*)$ Formen mit $\varphi|_U = \psi|_U$ für eine offene Menge U , so ist $d\varphi|_U = d\psi|_U$. Der Beweis folgt im wesentlichen dem Argument im Anhang zu Kapitel 6: Wegen der \mathbb{R} -Linearität von d können wir $\varphi|_U \equiv 0$ annehmen und zu $x \in U$ eine differenzierbare Funktion h auf X wählen mit $h \equiv 0$ in $x \in V \subset\subset U$ und $h \equiv 1$ auf $X \setminus \bar{U}$. Es folgt $\varphi = h\psi$ und mit d): $d\varphi = dh \wedge \psi + hd\psi$. Also ist $d\varphi|_V \equiv 0$ und damit $d\varphi|_U \equiv 0$.

2. d induziert (eindeutig bestimmte) Abbildungen

$$d_U: \Gamma(U, \Lambda T_X^*) \longrightarrow \Gamma(U, \Lambda T_X^*), \quad U \subset X \text{ offen},$$

mit den obigen Eigenschaften.

Ist nämlich $\varphi \in \Gamma(U, \Lambda T_X^*)$, so wähle man zu $x \in U$ eine Umgebung V und eine Form $\psi \in \Gamma(X, \Lambda T_X^*)$ mit $\varphi|_V = \psi|_V$. Man definiert $d\varphi|_V = d\psi|_V$, und dies liefert nach 1. eine wohldefinierte Form $d\varphi$ auf U .

3. Man braucht die Existenz von d nur für offene Mengen U aus einer geeigneten Kartenüberdeckung zu beweisen (denn wegen der Eindeutigkeitsaussage stimmen d_{U_1} und d_{U_2} auf dem Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ automatisch überein).

4. Es sei also ohne Einschränkung $U = X$ mit Koordinaten x_1, \dots, x_n . Wegen des zweiten Teils von c) muß für $f \in C^\infty(U)$ gelten:

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Die Differentialform $\sum \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ erfüllt aber ebenfalls diese Bedingung. Also ist notwendig

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \quad \text{für 0-Formen.}$$

Aus b) und d) folgt per Induktion nach p :

$$d(dx_{i_0} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = d^2 x_{i_0} \wedge (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) - dx_{i_0} \wedge d(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = 0.$$

Somit ist notwendig

$$(+) \quad d(f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}) = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Mit der geforderten \mathbb{R} -Linearität folgt hieraus, daß d auf $\Gamma(U, \Lambda^p T_X^*)$ eindeutig definiert ist. Man rechnet schließlich (mit etwas Mühe) nach, daß (+) alle gewünschten Bedingungen erfüllt. \square

Aus der expliziten Beschreibung des Differentials in der Formel (+) und der entsprechenden Formel für die geliftete Form gewinnt man ohne Schwierigkeiten die Vertauschbarkeit der Operationen *Differential-Bildung* und *Liften*.

Satz 9.20 Ist $f : Y \rightarrow X$ differenzierbar, $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^p T_X^*)$, so gilt

$$df^* \omega = f^* d\omega.$$

Bemerkung. Es ist auch in diesem abstrakten Kontext der *Satz von STOKES* gültig: Ist die Mannigfaltigkeit X orientierbar und $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^n T_X^*)$, $n = \dim X$, so läßt sich für jedes (geeignete) Kompaktum $K \subset X$ das Integral $\int_K \omega$ erklären (bzgl. einer fest gewählten Orientierung). Hat dann $K \subset X$ sogar einen glatten Rand ∂K , so trägt auch dieser eine induzierte Orientierung, und es gilt für $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^{n-1} T_X^*)$ der Satz von Stokes in der gewohnt eleganten Form⁸:

$$\int_{\partial K} \omega = \int_K d\omega.$$

Wir wollen zum Abschluß noch angeben, wie $d\omega$ als *alternierender Tensor* wirkt. Dazu braucht man das *LIE-Produkt* von Vektorfeldern.

Lemma 9.21 Sind ξ_1, ξ_2 Vektorfelder auf X , so auch

$$[\xi_1, \xi_2] := \xi_1 \circ \xi_2 - \xi_2 \circ \xi_1.$$

Gilt in einer (lokalen) Karte $\xi_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}$, so ist

$$[\xi_1, \xi_2] = \sum_{j,\ell=1}^n \left(a_{1j} \frac{\partial a_{2\ell}}{\partial x_j} - a_{2j} \frac{\partial a_{1\ell}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_\ell}.$$

⁸Nach Arnold [1] auch die Formel von NEWTON-LEIBNIZ-GAUSS-GREEN-OSTROGRADSKII-STOKES-POINCARÉ.

Beweis. $[\xi_1, \xi_2]$ operiert \mathbb{R} -linear auf C^∞ -Funktionen. Man braucht also nur noch die Produktregel nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} (\xi_1 \circ \xi_2)(fg) &= \xi_1(f\xi_2g + g\xi_2f) \\ &= f(\xi_1 \circ \xi_2)(g) + (\xi_1f)(\xi_2g) + g(\xi_1 \circ \xi_2)(f) + (\xi_1g)(\xi_2f). \end{aligned}$$

Durch Vertauschung der Indizes 1 und 2 und anschließende Subtraktion beider Gleichungen folgt die Behauptung. Die letzte Formel bestätigt man durch eine einfache Rechnung. \square

Definition. Das Vektorfeld $[\xi_1, \xi_2]$ heißt das LIE-Produkt oder auch die LIE-Klammer der Vektorfelder ξ_1 und ξ_2 .

Satz 9.22 Der \mathbb{R} -Vektorraum $\Gamma(X, T_X)$ wird durch das Lie-Produkt

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(X, T_X) \times \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \Gamma(X, T_X)$$

zu einer Liealgebra. D. h. es gilt:

- a) $[\xi_1, \xi_2]$ ist bilinear in ξ_1 und ξ_2 ;
- b) $[\xi_2, \xi_1] = -[\xi_1, \xi_2]$;
- c) es gilt die JACOBI-Identität

$$[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [\xi_2, [\xi_3, \xi_1]] + [\xi_3, [\xi_1, \xi_2]] = 0.$$

Beweis. Triviale Rechnung. \square

Die gewünschte Beschreibung von $d\omega$ als alternierende Differentialform wird in dem letzten Satz dieses Kapitels gegeben.

Satz 9.23 Es seien $\omega \in \Gamma(X, \Lambda^p T_X^*)$ und $v_1, \dots, v_{p+1} \in \Gamma(X, T_X)$ vorgegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} d\omega(v_1, \dots, v_{p+1}) &= \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} v_j(\omega(v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_{p+1})) \\ &\quad + \sum_{j < k} (-1)^{j+k} \omega([v_j, v_k], v_1, \dots, \widehat{v}_j, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_{p+1}). \end{aligned}$$

Beweis. Leichte Übungsaufgabe. \square

10 Riemannsche, symplektische und Kähler - Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel beabsichtigen wir, die wichtigsten Klassen von Mannigfaltigkeiten vorzustellen, für die das Tangentialbündel zu seinem dualen Bündel auf *kanonische* Weise isomorph ist. Dies sind die *Riemannschen* und die *symplektischen* Mannigfaltigkeiten, deren Rolle in der *klassischen Mechanik* wir in dem ersten Anhang zu diesem Kapitel zumindest streifen werden. Die komplex-analytischen *KÄHLER-Mannigfaltigkeiten*, die wir am Ende des Kapitels besprechen wollen, vereinigen auf genuine Weise die beiden vorgenannten Aspekte miteinander.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einer wesentlich allgemeineren Definition.

Definition. Es sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein reelles C^∞ -Vektorraum-bündel. Eine *Metrik* auf E ist ein $(2, 0)$ -Tensor $h \in \Gamma(X, E^{*\otimes 2})$ auf X mit Werten in E , der *symmetrisch* und an jeder Stelle x *positiv definit* ist.

Bemerkung. Wie wir später in diesem Kapitel noch genauer ausführen werden, haben wir bei *komplexen* Bündeln *Hermitesche* Metriken zu betrachten.

Wir wollen die obige Definition einer Metrik auf einem Vektorbündel sogar weiter verallgemeinern. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst noch einmal allgemeiner beliebige *symmetrische* 2-fach kovariante Tensoren mit Werten in E . Lokal schreibt sich ein solcher Tensor h bzgl. einer lokalen Basis e_1, \dots, e_r in der Form

$$h = \sum_{j \leq k} \tilde{h}_{jk} e_j^* \cdot e_k^* .$$

Unter Berücksichtigung von

$$e_j^* \cdot e_k^* = e_j^* \otimes e_k^* + e_k^* \otimes e_j^*$$

gewinnt man hieraus ohne Schwierigkeiten eine Darstellung

$$(*) \quad h = \sum_{j,k=1}^r h_{jk} e_j^* \otimes e_k^*$$

mit der *Symmetrie-Bedingung* $h_{jk} = h_{kj}$.

Man kann diese Bedingung auch auf einfachere Weise einsehen. Ist ein Tensor h wie in (*) gegeben, so drückt sich seine „Symmetrie“ notwendigerweise durch $h_{jk} = h_{kj}$ aus, da

$$h_{jk} = \sum h_{\ell m} \delta_{\ell j} \delta_{mk} = \sum h_{\ell m} (e_\ell^* \otimes e_m^*) (e_j \otimes e_k) = h(e_j \otimes e_k)$$

und damit

$$h_{jk} = h(e_j \otimes e_k) = h(e_k \otimes e_j) = h_{kj} .$$

Umgekehrt schließt man genauso.

In einer trivialisierenden offenen Menge $U_\alpha \subset X$ von E mit lokaler Basis $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ besitzt also jeder symmetrische Tensor h eine Darstellung vermöge einer symmetrischen $r \times r$ -Matrix $H^\alpha = (h_{jk}^\alpha)$ mit den Einträgen $h_{jk}^\alpha = h(e_j^\alpha \otimes e_k^\alpha)$. Bei einem Basiswechsel

$$e_j^\alpha = \sum_{k=1}^r A_{\beta\alpha}^{kj} e_k^\beta$$

gewinnt man hieraus sofort die entsprechende Basiswechsel-Formel

$$h_{jk}^\alpha = \sum_{\ell,m=1}^r A_{\beta\alpha}^{\ell j} A_{\beta\alpha}^{mk} h_{\ell m}^\beta, \quad \text{d. h.} \quad H^\alpha = {}^t A_{\beta\alpha} H^\beta A_{\beta\alpha} .$$

Definition. Ein symmetrischer Tensor h mit Werten in dem Vektorbündel E heißt *positiv definit*, wenn für jeden (lokalen) Schnitt s in E die Funktion $h(s \otimes s)$ nur an den Stellen verschwindet, wo dies

auch für s der Fall ist. Mit $s = \sum v^j e_j$ und $h(s \otimes s) = \sum h_{jk} v^j v^k$ ist dies gleichbedeutend damit, daß die darstellende Matrix von h (in jedem lokalen Koordinaten-System) *positiv definit* ist.

Bemerkung. Aufgrund des sogenannten *HURWITZ-Kriteriums* (siehe auch Anhang 2 zu diesem Kapitel) ist eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit, wenn alle ihre Hauptunterdeterminanten positiv sind. Dies impliziert, daß ein symmetrischer Tensor schon dann in einer gewissen Umgebung eines Punktes x_0 positiv definit ist, wenn dies nur im Punkte x_0 selbst gilt.

Bemerkung. Es ist nicht schwer, aus gegebenen Metriken neue zu machen. Es sei dem Leser überlassen, aus einer Metrik auf E eine solche auf dem dualen Vektorbündel E^* zu konstruieren und auf dem gelifteten Bündel f^*E unter einer differenzierbaren Abbildung $f : Y \rightarrow X$. Insbesondere trägt mit E auch jede Einschränkung $E|_Y$, $Y \subset X$ eine Untermannigfaltigkeit, eine kanonische Metrik. Ebenso kann man eine Metrik auf E auf jedes Unterbündel $E_1 \subset E$ einschränken. Hat man ferner zwei Vektorbündel E_1, E_2 mit Metriken gegeben, so tragen auch $E_1 \oplus E_2$ und $E_1 \otimes E_2$ kanonische Metriken.

Gelegentlich setzen wir nur voraus, daß der vorgegebene Tensor h *nicht ausgeartet* ist, oder gleichbedeutend, daß die lokal darstellenden Matrizen H^α an keiner Stelle $x \in U_\alpha$ eine verschwindende Determinante besitzen. Aus der multilinearen Algebra ist dann bekannt, daß man durch einen *linearen* Basiswechsel der lokalen Basis $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ an einer fest vorgegebenen Stelle $x_0 \in U_\alpha$ erreichen kann, daß $H^\alpha(x_0)$ eine Diagonalmatrix $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ wird, wobei die Anzahl der negativen Eigenwerte nur von dem symmetrischen Tensor h abhängig ist und als *Trägheits-Index* oder kurz *Index* von h im Punkte x_0 bezeichnet wird. (*Trägheitssatz* von SYLVESTER; zu weiteren Einzelheiten siehe Anhang 2).

Definition und Bemerkung. Ein nicht ausgearteter symmetrischer $(2, 0)$ -Tensor h mit Werten in dem Vektorbündel E heißt eine *Pseudometrik* auf E , wenn der Index von h konstant auf X ist. Man nennt dann diesen Index auch den *Index* der Pseudometrik. Eine Metrik ist damit eine Pseudometrik vom Index 0. In der Tat ist der Index eines nicht ausgearteten symmetrischen $(2, 0)$ -Tensors stets *lokal konstant*, wie wir in Anhang 2 beweisen werden. Somit ist die Forderung an den Index von h im Prinzip überflüssig.

Da aufgrund der Definition eine Pseudometrik ein *nicht ausgearteter* Tensor ist, ergibt sich unter Verwendung unserer Überlegungen am Ende von Kapitel 7 das folgende Resultat.

Folgerung 10.1 *Das duale Bündel E^* ist (bei Vorgabe einer Pseudometrik h auf dem Bündel E auf kanonische Weise) zu dem Bündel E isomorph.*

Das erste Zusammentreffen mit dem folgenden Resultat ist erfahrungsgemäß eine Überraschung.

Satz 10.2 *Jedes C^∞ -Bündel E besitzt (unkanonische) Metriken. Insbesondere ist jedes C^∞ -Bündel E zu seinem dualen Bündel (unkanonisch) isomorph.*

Beweis. Lokal ist dies sicher richtig, da das triviale Bündel $E = X \times \mathbb{R}^r$ mit globaler Basis e_1, \dots, e_r die euklidische Metrik

$$\sum_{j=1}^r e_j^* \otimes e_j^*$$

besitzt. Mit einer differenzierbaren Teilung der Eins $\{\eta_\alpha\}$ klebt man solche lokalen Metriken h_α zu einer globalen Metrik $h = \sum \eta_\alpha h_\alpha$ zusammen. \square

Bemerkung. Der vorstehende Beweis kann nicht auf die Situation (echter) Pseudometriken ausgedehnt werden. Er ist in diesem Fall tatsächlich im Allgemeinen falsch. Ebenso ist die Dualitätsaussage im (reell- und komplex-) analytischen Fall nicht generell erfüllt.

Es ist üblich, Metriken und Pseudometriken auf dem Tangentialbündel T_X einer Mannigfaltigkeit X nicht mit dem Symbol h zu belegen, sondern mit g zu bezeichnen.

Definition. Eine Mannigfaltigkeit X zusammen mit einer (Pseudo-) Metrik g auf dem Tangentialbündel T_X , lokal also

$$g = \sum g_{jk} dx^j \otimes dx^k, \quad g_{jk} = g_{kj},$$

heißt eine (*Pseudo-*) *Riemannsche Mannigfaltigkeit* mit *Riemannscher (Pseudo-) Metrik* (oder Riemannischem (pseudo-) metrischem Tensor) g . Um die ausgezeichnete Metrik g hervorzuheben, kodiert man den vorliegenden Sachverhalt auch genauer in dem Symbol (X, g) . Man schreibt anstelle von g oft auch ds^2 oder ds_X^2 . Eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit vom Index 1 wird auch als *Minkowskische Mannigfaltigkeit* oder als *Raum-Zeit* bezeichnet; solche Mannigfaltigkeiten bilden die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

Beispiel. Das typische Beispiel einer Raumzeit ist der *Minkowski-Raum* \mathbb{R}^{n+1} mit der Pseudometrik $ds^2 = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n - dx^0 \otimes dx^0$.

Der zuvor bewiesene Satz impliziert sofort den

Satz 10.3 *Jede differenzierbare Mannigfaltigkeit trägt (unkanonische) Riemannsche Metriken.*

Warnung. Nicht jede Mannigfaltigkeit trägt eine Pseudometrik mit vorgegebenem Index ≥ 1 ! Insbesondere taugt nicht jede Mannigfaltigkeit als Modell für unser Universum in Raum und Zeit.

Bemerkung. Durch eine geeignete *lineare* Transformation der lokalen Basis eines Vektorraumbündels mit einer Pseudometrik vom Index p kann man an jeder fest gewählten Stelle $x_0 \in X$ erreichen, daß die Pseudometrik in einer Umgebung gegeben wird durch

$$\sum_{j,k=1}^r h_{jk} e_j^* \otimes e_k^*$$

mit $h_{jk}(x_0) = 0, j \neq k, h_{jj}(x_0) = 1, j = 1, \dots, r-p, h_{jj}(x_0) = -1, j = p+1, \dots, r$. Diese Bemerkung, angewendet auf *lineare Koordinatentransformationen* auf der Mannigfaltigkeit X , liefert an jeder Stelle x_0 einer Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit X „gute“ Koordinaten, so daß wie eben

$$g = \sum g_{jk} dx^j \otimes dx^k$$

mit $g_{jk}(x_0) = 0, j \neq k, g_{jj}(x_0) = 1, j = 1, \dots, r-p, g_{jj}(x_0) = -1, j = p+1, \dots, r$. Insbesondere können wir erreichen, daß für eine *Riemannsche* Mannigfaltigkeit die Matrix $(g_{jk}(x_0))$ die Einheitsmatrix ist. Wir zeigen später sogar, daß man in diesem Fall noch zusätzlich fordern darf, daß alle Differentiale dg_{jk} an der Stelle x_0 verschwinden. Dagegen ist es im Allgemeinen nicht möglich, die Matrix $(g_{jk}(x))$ für alle Punkte x in einer *ganzen Umgebung* von x_0 durch Koordinatentransformation zur Einheitsmatrix zu machen. Dies würde andernfalls ja bedeuten, daß jede Riemannsche Mannigfaltigkeit lokal wie der euklidische Raum aussieht und somit keine Krümmung besitzen dürfte.

Dennoch kann man durch Übertragung der Beweisidee des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens den folgenden Satz herleiten.

Satz 10.4 *Zu jedem Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ mit Riemannscher Metrik $h = (h_{jk})$ und jedem Punkt $x_0 \in X$ gibt es lokale Basen von E in einer Umgebung U von x_0 , so daß $h_{jk}(x) = \delta_{jk}, x \in U$.*

Bemerkung. Wie widerlegt man den sich hieraus ergebenden vermeintlichen Widerspruch zu der Bemerkung davor über Riemannsche Metriken? Ganz einfach durch die Feststellung, daß nicht jede *beliebige* lokale Koordinatentransformation auf dem Tangentialbündel T_X von einem Koordinatenwechsel auf der *Mannigfaltigkeit* X herkommt! Dies sieht man am besten in der dualen Situation des Cotangentialbündels. Eine *beliebige* Koordinatentransformation, wie in Satz 4 zugelassen, ist hier von der Gestalt

$$\sum_{j=1}^n f_{jk}(x) dx^j, \quad k = 1, \dots, n,$$

mit einer invertierbaren Matrix (f_{jk}) von differenzierbaren Funktionen. Damit eine solche Transformation aber von einem Koordinatenwechsel auf X herkommt, müssen die 1-Formen $\sum_{j=1}^n f_{jk}(x) dx^j$ jeweils Differentiale einer neuen Koordinate, also insbesondere *exakte* und damit auch *geschlossene*

Formen sein. Dies ist zwar für *konstante* Koordinatentransformationen immer der Fall, im Allgemeinen aber selbstverständlich nicht erfüllt.

Es sei nun (X, g_X) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und $Y \xrightarrow{i} X$ sei eine Untermannigfaltigkeit. Man hat dann wie immer eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow T_Y \longrightarrow i^*T_X$$

und (nach der zweiten Bemerkung auf p. 76) auch eine induzierte Metrik auf i^*T_X , die sich zu einer Metrik g_Y auf T_Y einschränken läßt. Wir sehen also:

Satz 10.5 *Ist (X, g_X) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, so trägt jede Untermannigfaltigkeit $Y \subset X$ eine kanonische induzierte Metrik $g_Y := g_X|_Y$.*

Bettet man also z. B. X in einen \mathbb{R}^N ein, was nach dem Einbettungssatz von WHITNEY ja für $N = 2n + 1$, $n = \dim X$, stets möglich ist, so erhält man auf X auch die von \mathbb{R}^N induzierte Metrik. Dies wirft sofort ein generelles Problem auf:

Problem. Es seien (X, g_X) und (Y, g_Y) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, und es sei X in Y als (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit einbettbar. Gibt es dann auch eine solche Einbettung, für die $g_X = g_Y|_X$ ist? (Man spricht dann auch von *isometrischer* Einbettung).

Einen großen Durchbruch bzgl. dieser Frage erzielte J. NASH⁹ im Jahre 1954 im Alter von 26 Jahren:

Satz 10.6 (Nash) *Läßt sich X (kompakt) in \mathbb{R}^N einbetten, so gibt es auch eine isometrische C^1 -Einbettung.*

Nun ist die Bedingung C^1 natürlich sehr schwach; z. B. gehen dabei alle Aussagen über die Krümmung verloren, da in den 2. Fundamentaltensor die zweiten Ableitungen der Koeffizienten der Riemannschen Metrik eingehen. Man braucht daher stärkere Aussagen, die Nash tatsächlich 1956 beweisen konnte.

Satz 10.7 (Einbettungssatz von Nash) *Ist $N \geq n(n+1)(3n+11)/2$, so läßt sich jede n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Klasse C^κ isometrisch von der Klasse C^κ in \mathbb{R}^N einbetten, falls $3 \leq \kappa \leq \infty$.*

Bemerkung. Es handelt sich bei diesem Problem natürlich um das Lösen von *nichtlinearen* partiellen Differentialgleichungen:

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle = g_{jk}(x^1, \dots, x^n), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N).$$

Ich will dieses Resultat noch etwas erläutern. Zuerst: wann ist eine Immersion

$$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{E}^n, \quad I \subset \mathbb{R}$$

eine isometrische Einbettung? Offensichtlich genau dann, wenn

$$dt \otimes dt = \varphi^* \left(\sum_{j=1}^n dx_j \otimes dx_j \right) = \sum_{j=1}^n \varphi'_j(t)^2 dt \otimes dt,$$

i. e. wenn $\sum \varphi'_j{}^2 \equiv 1$, d. h. wenn die Kurve auf Bogenlänge parametrisiert ist. Somit besitzt z. B. der Torus

$$T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$$

⁹Nobelpreisträger des Jahres 1995 für Wirtschaftswissenschaften mit einer mathematischen Arbeit aus der Spieltheorie, die für Mathematiker kaum an seine anderen weit bedeutenderen Ergebnisse heranragt. J. Milnor sagt in einem Artikel im Mathematical Intelligencer, daß sie „... may seem like the least of his achievements“. Siehe: A Nobel Prize for John Nash. The Mathematical Intelligencer. Vol. 17, Nr.3, 1995, pp. 11–17.

eine induzierte Metrik, die lokal euklidisch ist: Es gibt lokal Koordinaten s, t , so daß

$$g_{S^1 \times S^1} = ds \otimes ds + dt \otimes dt .$$

$T^2 = S^1 \times S^1$ mit dieser Metrik heißt auch der *flache* Torus.

Natürlich gibt es C^∞ -Einbettungen von T^2 als kompakte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 . Nach Nash geht dies also auch *isometrisch* mit einer C^1 -Abbildung.¹⁰ Aber eine C^κ -isometrische Einbettung $T^2 \subset \mathbb{E}^3$ mit hinreichend großer Differenzierbarkeitsordnung $\kappa \geq 2$ kann es nicht geben, da jede kompakte Fläche in \mathbb{R}^3 Punkte mit positiver Gaußscher Krümmung besitzt. Nach dem *theorema egregium* von Gauß müßte aber der flache Torus T^2 , isometrisch eingebettet in \mathbb{E}^3 , überall die Gaußsche Krümmung 0 besitzen.

Bemerkung und Beispiel. Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist nicht jede Untermannigfaltigkeit einer Minkowskischen Mannigfaltigkeit eine solche bzgl. des induzierten Tensors! Betrachte z. B. im Minkowski-Raum \mathbb{R}^{n+1} den (Mantel des) Lichtkegel(s)

$$X_0 = \{ (x^0)^2 = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 \} .$$

$X_0 \setminus \{0\}$ ist eine n -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Im Falle $n = 2$ können wir (einen Teil von) X_0 parametrisieren durch

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \varphi, \quad x^0 = r > 0, \quad -\pi < \varphi < \pi .$$

Es folgt unmittelbar

$$g_{X_0} = r^2 d\varphi \otimes d\varphi + (1 - 1) dr \otimes dr = r^2 d\varphi \otimes d\varphi ,$$

d. h. die Einschränkung des pseudometrischen Tensors auf X_0 ist ausgeartet.

Für $X_a^+ = \{ (x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + a^2 \}$, einem zweischaligen Hyperboloid, gewinnt man entsprechend mit $x^0 = \sqrt{r^2 + a^2}$, $a > 0$:

$$g_{X_a^+} = r^2 d\varphi \otimes d\varphi + \left(1 - \frac{r^2}{r^2 + a^2} \right) dr \otimes dr = r^2 d\varphi \otimes d\varphi + \frac{a^2}{r^2 + a^2} dr \otimes dr ,$$

d. h. eine Riemannsche Metrik. Man überzeugt sich leicht davon, daß dies in *allen* Punkten von X_a^+ korrekt ist, insbesondere für die zwei Punkte mit $x^1 = x^2 = 0$, also $x^0 = \pm a$, in denen die obige Form in r und φ wegen $r = 0$ ausgeartet zu sein scheint. In der Tat ist sie dies nicht, da bei Verwendung von Polarkoordinaten stets $r > 0$ gelten muß, die obige Formel also überhaupt nicht angewendet werden darf. Es handelt sich bei diesem „Phänomen“, das bei genauerer Betrachtung gar nicht existent ist, um den in der Literatur oft als *Koordinaten-Singularität* bezeichneten Effekt.

Im Fall

$$X_b^- = \{ (x^0)^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 - b^2 \}, \quad b \neq 0 ,$$

einem einschaligen Hyperboloid, ergibt sich mit $x^0 = \sqrt{r^2 - b^2}$, $r > |b|$:

$$g_{X_b^-} = r^2 d\varphi \otimes d\varphi - \frac{b^2}{r^2 - b^2} dr \otimes dr ,$$

also eine Minkowski-Metrik.

Wir kommen als nächstes zu einer weiteren Klasse von Mannigfaltigkeiten mit Zusatzstruktur, die in der Physik eine überaus prominente Rolle spielt (siehe auch Anhang 1).

Definition. Eine Mannigfaltigkeit X zusammen mit einer nicht ausgearteten alternierenden 2-Form ω , die geschlossen ist (d. h. $d\omega = 0$), heißt eine *symplektische Mannigfaltigkeit*.

Bemerkung. Da ω alternierend und nicht ausgeartet ist, muß notwendig $\dim X \equiv 0 \pmod{2}$ sein. (Siehe hierzu auch Lemma 9). Wir setzen $\dim X = 2n$.

¹⁰Nash führt einen reinen Existenzbeweis. Ich konnte weder mir selbst vorstellen noch in der Literatur ausfindig machen, wie dieser Torus tatsächlich „aussieht“.

Das ist das für die mathematische Physik bei weitem wichtigste Beispiel (*HAMILTON-Formalismus*). Ausgangspunkt hierzu ist die Formulierung der klassischen Mechanik à la LAGRANGE (zu weiteren Einzelheiten siehe den Anhang 1 zu diesem Kapitel), für die man einen (beliebigen) *Konfigurationsraum* Q mit „verallgemeinerten“ Ortskoordinaten $q = (q^1, \dots, q^n)$ zu Grunde legen muß. Unter \dot{q} muß man dann einen Tangentialvektor an die Mannigfaltigkeit Q verstehen. Oder genauer: Wenn $q = q(t)$, $t \in I$, eine *Trajektorie* oder *Bewegung* des Systems beschreibt, so ist $\dot{q} = \dot{q}(t)$ eine (differenzierbare) Abbildung $\dot{q} : I \rightarrow T_Q$ mit $\pi(\dot{q}(t)) = q(t)$ bzgl. der Projektion $\pi : T_Q \rightarrow Q$. Die Differentialgleichungen für die Trajektorien gewinnt man mit Hilfe des *Prinzips der kleinsten (besser: stationären) Wirkung* aus einer *Lagrange-Funktion* $L = L(q, \dot{q}, t)$ mit $q \in Q$ und $\dot{q} \in T_Q$. Mit den „verallgemeinerten“ Impulsen $p = (p_1, \dots, p_n)$, die durch

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

definiert sind, schreiben sich diese Differentialgleichungen (in jedem Koordinatensystem) nach EULER und LAGRANGE in der Form

$$\dot{p}_j = \frac{\partial L}{\partial q_j}.$$

Setzt man

$$H(p, q, t) = \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}, t)$$

(*Hamilton-Funktion*), so gewinnt man hieraus die wunderschönen symmetrischen *Hamiltonschen Gleichungen*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Damit aber diese Gleichungen sinnvoll sind, muß man, da insbesondere $\langle p, \dot{q} \rangle$ eine wohlbestimmte Funktion sein soll, die Koordinate p als eine 1-Form auffassen, also als Element im Cotangentialbündel

$$X = T_Q^*,$$

das man in diesem Kontext auch als *Impuls-Phasenraum* des Lagrange- oder Hamilton-Systems bezeichnet. (Das *Tangentialbündel* T_Q wird *Geschwindigkeits-Phasenraum* genannt).

Überraschenderweise hat man das folgende Resultat.

Satz 10.8 *Für jede Mannigfaltigkeit Q trägt das Cotangentialbündel $X = T_Q^*$ eine natürliche symplektische Struktur.*

Beweis. Es werde mit π die Projektion $X = T_Q^* \rightarrow Q$ bezeichnet. Wir haben dann die Tangentialabbildung

$$\pi_* = D\pi : T_X \rightarrow T_Q,$$

und ist $p \in X = T_Q^*$, $q = \pi(x)$, $v \in T_{X,p}$, so kann man eine 1-Form $\tilde{\omega}$ auf T_Q erklären durch

$$\tilde{\omega}(v) := p(\pi_*(v)).$$

Man sieht leicht: Ist lokal $T_Q^*|_U = U \times \mathbb{R}^n$ mit Koordinaten (q, p) , so ist

$$\tilde{\omega} = \sum p_j dq^j.$$

(Man kann natürlich auch $\tilde{\omega}$ lokal durch diese Gleichung definieren und nachrechnen, daß $\tilde{\omega}$ auf ganz T_Q^* wohldefiniert ist). Setze jetzt $\omega := -d\tilde{\omega}$. Dann ist $d\omega = -d^2\tilde{\omega} = 0$ und (lokal)

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j.$$

Insbesondere ist, wovon man sich leicht überzeugt, die 2-Form ω nicht ausgeartet. □

Bemerkung. Man kann tatsächlich zeigen, daß es zu jeder symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) lokal *symplektische* (oder auch *kanonisch* genannte) Koordinaten gibt, d. h. Koordinaten $q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n$, so daß

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq^j \wedge dp_j$$

(Satz von DARBOUX; zum Beweis siehe z. B. Berndt [5]). Lokal sehen also alle symplektischen Mannigfaltigkeiten völlig gleich aus; die Theorie der symplektischen Mannigfaltigkeiten befaßt sich daher im Gegensatz zu der der Riemannschen Mannigfaltigkeiten ausschließlich mit *globalen* Untersuchungen. Selbstverständlich sind Untermannigfaltigkeiten Y von (X, ω) bzgl. der eingeschränkten Form $\omega|_Y$ im Allgemeinen keine symplektischen Mannigfaltigkeiten.

Wir beweisen zumindest die *punktuale* Aussage zu dem Satz von Darboux.

Lemma 10.9 *Es sei V ein Vektorraum der Dimension n und B eine alternierende, nicht ausgeartete Bilinearform. Dann gibt es eine Basis $e_1, e_2, \dots, e_{2k-1}, e_{2k}$ von V (insbesondere ist $n = 2k$ gerade), so daß mit $V_j = \text{span}(e_{2j-1}, e_{2j})$, $j = 1, \dots, k$, gilt:*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

bzgl. B , d. h. $B(v_j, v_{j'}) = 0$, $v_j \in V_j, v_{j'} \in V_{j'}, j \neq j'$, und $B(e_{2j-1}, e_{2j}) = 1$.

Beweis. Wir führen Induktion nach $k \geq 0$. Es seien e_1, \dots, e_{2k} schon konstruiert. Ist V noch nicht die orthogonale Summe von V_1 bis V_k , so betrachte man

$$V_0^\perp = \{v \in V : B(v, v_0) = 0 \text{ für alle } v_0 \in V_0 = V_1 \oplus \dots \oplus V_k\}.$$

Für $v_0 = \sum_{j=1}^{2k} \lambda_j e_j$ ist $B(v_0, e_{2j-1}) = -\lambda_{2j}$, $B(v_0, e_{2j}) = \lambda_{2j-1}$, also für beliebiges $v \in V$:

$$B(v - v_0, e_{2j-1}) = B(v, e_{2j-1}) + \lambda_{2j} = 0,$$

$$B(v - v_0, e_{2j}) = B(v, e_{2j}) - \lambda_{2j-1} = 0,$$

$j = 1, \dots, k$, sofern man die Koeffizienten λ_j richtig wählt. Also gilt

$$V = V_0 \oplus V_0^\perp,$$

und B induziert eine nicht ausgeartete alternierende Form auf V_0^\perp . Nach Voraussetzung existiert ein Vektor $e_{2k+1} \in V_0^\perp$, der von Null verschieden ist. Dieser ist notwendig von e_1, \dots, e_{2k} unabhängig. Da $B|_{V_0^\perp}$ nicht ausgeartet ist, gibt es einen (von e_{2k+1} unabhängigen) Vektor $e_{2k+2} \in V_0^\perp$ mit $B(e_{2k+1}, e_{2k+2}) \neq 0$, also ohne Einschränkung $B(e_{2k+1}, e_{2k+2}) = 1$. \square

Ein wenig mehr über symplektische Mannigfaltigkeiten findet man im Anhang 1 zu diesem Kapitel.

Im dritten Teil dieses Paragraphen wollen wir den *komplex-analytischen*, speziell den KÄHLER-Fall erörtern. Dazu müssen wir zuerst ein paar Bemerkungen zur *Komplexifizierung* von Bündeln formulieren. Es sei also X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $E \rightarrow X$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang r . Man hat weiter, wenn man \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum auffaßt, das triviale \mathbb{R} -Vektorraumbündel $\mathbb{C} \times X \rightarrow X$ vom Rang 2, so daß man das reelle Bündel

$$E^{\mathbb{C}} := E \otimes (\mathbb{C} \times X)$$

vom (reellen) Rang $2r$ bilden kann. Jede Faser $E_x^{\mathbb{C}}$ dieses Bündels ist \mathbb{R} -isomorph zu

$$E_x \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^r \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^r.$$

Die Fasern $E_x^{\mathbb{C}}$ besitzen aber automatisch eine \mathbb{C} -Vektorraumstruktur: Für $c \in \mathbb{C}$ wird durch

$$c \cdot \sum_{j=1}^{\ell} v_j \otimes c_j = \sum_{j=1}^{\ell} v_j \otimes (cc_j)$$

eine solche Struktur erklärt, die mit der \mathbb{R} -Vektorraumstruktur vermöge der Inklusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ kompatibel ist. - Man sieht leicht:

Lemma 10.10 $E^{\mathbb{C}}$ ist ein komplexes Vektorraumbündel vom komplexen Rang r . Genauer: Ist \mathfrak{U} eine trivialisierende Überdeckung von E zum Cozyklus $(A_{\beta\alpha})$, so gilt

$$E^{\mathbb{C}}|_{U_\alpha} \cong \mathbb{C}^r \times U_\alpha,$$

und der beschreibende 1-Cozyklus dieses Bündels wird ebenfalls durch die Matrizen $A_{\beta\alpha}$ gegeben, wenn man diese auffaßt als Elemente von $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ bezüglich der natürlichen Inklusion $\mathrm{GL}(r, \mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$.

Bemerkung. Man macht sich sofort klar, daß die Schnitte in $E^{\mathbb{C}}$ von der Form

$$s = s_1 + i s_2, \quad s_1, s_2 \text{ Schnitte in } E$$

sind. Man schreibt selbstverständlich $s_1 = \mathrm{Re} s$, $s_2 = \mathrm{Im} s$.

Bemerkung. Man schließt aus dem vorstehenden Lemma sofort, daß man die Vorgänge des *Komplexifizierens* und *Dualisierens* von Bündeln vertauschen kann:

$$(E^*)^{\mathbb{C}} \cong (E^{\mathbb{C}})^*.$$

Hierbei bestehen die Fasern des dualen Bündels zu einem *komplexen* Vektorraumbündel selbstverständlich aus den *komplexen* Linearformen.

Umgekehrt benötigen wir auch eine Beschreibung der *reellen* Struktur eines *komplexen* Vektorraumbündels $E \rightarrow X$, das ja vermöge der kanonischen Einbettung $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ als reelles Vektorraumbündel aufgefaßt werden kann. Sei dazu E durch den komplexen 1-Cozyklus $(A_{\beta\alpha})$ gegeben. In lokalen Koordinatensystemen $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha$ schreiben sich Schnitte s in E in der Form

$$s = \sum_{j=1}^r z^j e_j^\alpha, \quad z^j \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{C}).$$

Zerlegen wir $z^j = x^j + iy^j$ in Real- und Imaginärteil, so schreibt sich s auch eindeutig als

$$s = \sum_{j=1}^r x^j e_j^\alpha + \sum_{j=1}^r y^j (ie_j^\alpha), \quad x^j, y^j \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha, \mathbb{R}).$$

Bezüglich dieser lokalen *reellen* Basen $e_1^\alpha, \dots, e_r^\alpha, ie_1^\alpha, \dots, ie_r^\alpha$ bestimmen sich die Übergangsmatrizen für das unterliegende reelle Bündel dann unmittelbar zu

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re} A_{\beta\alpha} & -\mathrm{Im} A_{\beta\alpha} \\ \mathrm{Im} A_{\beta\alpha} & \mathrm{Re} A_{\beta\alpha} \end{pmatrix}.$$

Für eine konzeptionell saubere Begründung von *Sesquilinear-Formen*, insbesondere von *Hermite-schen Metriken*, benötigt man noch den Begriff des *konjugiert-komplexen* Vektorraums \bar{V} zu einem komplexen Vektorraum V . Als Mengen und abelsche Gruppen sollen V und \bar{V} übereinstimmen:

$$\bar{V} = V.$$

Die Skalarenmultiplikation soll jedoch verschieden sein: ist $\lambda \in \mathbb{C}$ und $w \in \bar{V}$, so sei $\lambda \cdot w := \bar{\lambda} w$, wobei auf der rechten Seite w als Element von V aufgefaßt wird. Schreibt man für Vektoren $v \in V$ grundsätzlich \bar{v} für denselben Vektor, aber aufgefaßt als Element von \bar{V} , so schreibt sich das neue Gesetz der Multiplikationen schlicht als

$$\bar{\lambda} \bar{v} = \overline{\lambda v}.$$

Hat man einen Basiswechsel $f_k = \sum_{j=1}^r a_{jk} e_j$ in V , so transformieren sich die entsprechenden Basen von \bar{V} mittels der konjugiert-komplexen Matrix:

$$\bar{f}_k = \sum_{j=1}^r \bar{a}_{jk} \bar{e}_j.$$

Dieses Konzept läßt sich nun ohne Anstrengung auf komplexe Vektorraumbündel übertragen.

Satz 10.11 Ist $E = \bigsqcup E_x$ ein komplexes Vektorraumbündel, so trägt

$$\bar{E} := \bigsqcup_{x \in X} \bar{E}_x$$

genau eine komplexe Vektorbündelstruktur derart, daß mit jedem Schnitt s in E durch

$$\bar{s}(x) := \overline{s(x)}$$

ein Schnitt \bar{s} in \bar{E} gegeben wird. Wird E durch den 1-Cozyklus $(A_{\beta\alpha})$ beschrieben, so wird \bar{E} bestimmt durch den konjugierten Cozyklus $(\overline{A_{\beta\alpha}})$.

Bemerkung. Es existiert ein kanonischer fasertreuer Diffeomorphismus $E \rightarrow \bar{E}$, der auf den Fasern additiv, aber *antilinear* ist: $\lambda v \mapsto \bar{\lambda} \bar{v}$. Bezüglich der unterliegenden *reellen* Struktur ist dies selbstverständlich ein reeller Vektorraumbündel-Isomorphismus. Man kann diese beiden Bündel tatsächlich als *gleich* ansehen, denn der durch die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_r \end{pmatrix}$$

gegebene *universelle* Basiswechsel erfüllt die Identität:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\beta\alpha} & -\operatorname{Im} A_{\beta\alpha} \\ \operatorname{Im} A_{\beta\alpha} & \operatorname{Re} A_{\beta\alpha} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} A_{\beta\alpha} & \operatorname{Im} A_{\beta\alpha} \\ -\operatorname{Im} A_{\beta\alpha} & \operatorname{Re} A_{\beta\alpha} \end{pmatrix} J.$$

Es sei jetzt die Mannigfaltigkeit X zusätzlich von einer *geraden* reellen Dimension $2n$. Wir modellieren dann X lokal mit offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ mit einem willkürlich gewählten \mathbb{R} -Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$. (Dies ist aber bei weitem noch nicht das, was man unter einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit versteht). Wir betrachten wie üblich die reellen Bündel T_X und T_X^* ; es ist aber grundsätzlich angemessen und unter der obigen Voraussetzung geradezu notwendig, auch *komplexwertige* Vektorfelder und Formen zu betrachten, also, wie man sich sofort klar macht, Schnitte in den komplexifizierten Bündeln

$$T_X^{\mathbb{C}} := (T_X)^{\mathbb{C}} \quad \text{bzw.} \quad T_X^{*\mathbb{C}} := (T_X^*)^{\mathbb{C}} = (T_X^{\mathbb{C}})^*.$$

Haben wir lokale Koordinaten $z^j = x^j + i y^j$, so ist es naheliegend, die komplexen 1-Formen

$$dz^j := dx^j + i dy^j, \quad \overline{dz^j} := dx^j - i dy^j$$

zu betrachten. Wegen

$$dx^j = \frac{1}{2}(dz^j + \overline{dz^j}), \quad dy^j = \frac{1}{2i}(dz^j - \overline{dz^j})$$

bilden sie eine Basis der Schnitte in $T_X^{*\mathbb{C}}$. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion, so bildet man sinnvollerweise

$$df := d\operatorname{Re} f + i d\operatorname{Im} f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j} dy^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z^j}} \overline{dz^j}$$

mit den sogenannten *WIRTINGER-Ableitungen* nach den „komplexen Variablen“ z^j bzw. $\overline{z^j}$. Diese sind \mathbb{C} -linear in f , genügen der Produktregel und der Kettenregel (in der aber beide Typen der Wirtinger-Ableitungen vorkommen), und es ist

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \overline{z^j}} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z^j} \right)}, \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial z^j} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z^j}} \right)}.$$

Konkret gewinnt man mit

$$\frac{\partial f}{\partial z^j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad i \left(\frac{\partial f}{\partial z^j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} \right) = \frac{\partial f}{\partial y^j}$$

die expliziten Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial z^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} - i \frac{\partial f}{\partial y^j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x^j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y^j} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x^j} - \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y^j} \right)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} + i \frac{\partial f}{\partial y^j} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x^j} - \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y^j} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y^j} + \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x^j} \right).$$

Man kann auch leicht die duale Basis in $T_X^{\mathbb{C}}$ bestimmen, deren Elemente wir nach schon gewohntem Muster mit $\partial/\partial z^j$, $\partial/\partial \bar{z}^j$ bezeichnen. Diese müssen mit den Wirtinger-Ableitungen korrespondieren, so daß man nur die Wahl hat:

$$\frac{\partial}{\partial z^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} - i \frac{\partial}{\partial y^j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + i \frac{\partial}{\partial y^j} \right).$$

Man rechnet sofort die Dualität dieser Basis zu der Basis dz^j , $d\bar{z}^j$, $j = 1, \dots, n$, nach.

Wir fassen zur Deutlichkeit noch einmal zusammen: Die komplexen Vektorraumbündel $T_X^{\mathbb{C}}$ und $T_X^{*\mathbb{C}}$ sind vom komplexen Rang $2 \dim_{\mathbb{C}} X = 2n$ und besitzen als lokale Basen die komplexen Vektorfelder

$$\frac{\partial}{\partial z^j}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

bzw. die komplexen 1-Formen.

$$dz^j, \quad d\bar{z}^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Aus der oben schon erwähnten Kettenregel folgt dann unmittelbar, daß bei lokalem Koordinatenwechsel $F = G + iH$ das komplexifizierte Tangentialbündel $T_X^{\mathbb{C}}$ sich in den eben angegebenen lokalen Basen mittels der *komplexen Funktionalmatrix*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

transformiert. Da der Basiswechsel von diesen Wirtinger-Basen zu den ursprünglichen reellen Basen mit einer „universellen“ linearen Transformation $C \in \operatorname{GL}(2n, \mathbb{C})$ vonstatten geht, hat man sogar eine ganz explizite Beziehung der obigen Übergangsmatrizen zu den „klassischen“ Transformationsmatrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} C.$$

Insbesondere stimmen die Determinanten beider Matrizen überein.

Offensichtlich hat man eine spezielle Situation vorliegen, wenn die komplexe $n \times n$ -Matrix in dem rechten oberen (und dann auch in dem linken unteren) Quadranten verschwindet. Zerlegt man generell eine komplexwertige Funktion $f = g + ih$ in ihren Real- und Imaginärteil g und h , so sind die Bedingungen $\frac{\partial f}{\partial z^j} = 0$ äquivalent zu den sogenannten CAUCHY-RIEMANNSCHEN *Differentialgleichungen*:

$$g_{x^j} = h_{y^j}, \quad g_{y^j} = -h_{x^j}, \quad j = 1, \dots, n,$$

also aufgrund der Theorie der holomorphen Funktionen in einer komplexen Veränderlichen zu der Holomorphie der Funktion $f(z^1, \dots, z^n)$ bei jeweiligem Festhalten von $n - 1$ der Variablen. Es ist eine simple Übungsaufgabe, mit Hilfe einer leicht zu gewinnenden n -dimensionalen Verallgemeinerung des Cauchy-Integrals aus dieser „partiellen Holomorphie“ von f unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß f im reellen Sinne stetig partiell differenzierbar ist, auf die *Holomorphie* von f zu schließen: f ist um jeden Punkt ihres (offenen) Definitionsgebietes $U \subset \mathbb{C}^n$ in eine konvergente Potenzreihe in den n komplexen Veränderlichen z^1, \dots, z^n entwickelbar. - Ein tiefliegendes Resultat von HARTOGS besagt, daß die eben genannte Zusatzbedingung überflüssig ist.

Satz 10.12 (Hartogs) Die komplexwertige Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, U eine offene Teilmenge von \mathbb{C}^n , ist genau dann holomorph, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.

Bemerkung. Mit anderen Worten: f ist genau dann holomorph, wenn die komplexe 1-Form

$$\bar{\partial} f := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j$$

verschwindet. Man schreibt selbstverständlich auch

$$\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^j} dz^j$$

und hat damit für jede komplexwertige Funktion f eine Zerlegung des Differentials

$$df = \partial f + \bar{\partial} f.$$

Holomorphie von f bedeutet somit auch, daß $df = \partial f$.

Es ist nun naheliegend, die folgende Definition zu geben.

Definition. Eine *komplex-analytische* (oder auch kurz: *komplexe*) Mannigfaltigkeit X wird gegeben durch einen Atlas

$$(V_\alpha, \varphi_\alpha, U_\alpha), \quad V_\alpha \subset \mathbb{C}^n, \quad X = \bigcup U_\alpha,$$

mit *biholomorphen* Koordinatentransformationen $\varphi_{\beta\alpha} : V_{\beta\alpha} \rightarrow V_{\alpha\beta}$.

Rechnet man in diesem Fall die Funktionalmatrix von $\varphi_{\beta\alpha}$ bzgl. der Koordinaten z_α^j in den Wirtinger-Ableitungen aus, so zerfällt sie in der Form

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha} & 0 \\ 0 & \overline{\left(\frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha} \right)} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist die Funktionaldeterminante im komplex-analytischen Fall gleich

$$\left| \det \frac{\partial \varphi_{\beta\alpha}}{\partial z_\alpha} \right|^2,$$

also automatisch positiv. Dies führt unmittelbar zu dem

Korollar 10.13 *Komplex-analytische Mannigfaltigkeiten sind orientierbar.*

Noch wichtiger ist für uns der folgende Satz, der sich unmittelbar aus der obigen Form der Funktionalmatrix ergibt. Es sei noch angemerkt, daß man auf einer komplexen Mannigfaltigkeit von *holomorphen* Vektorbündeln sprechen kann; per definitionem gestatten diese Trivialisierungen, in denen die Übergangsmatrizen holomorphe Einträge besitzen.

Warnung. Ist E holomorph, so ist dies \bar{E} im Allgemeinen nicht. Das konjugierte Bündel ist dann aber *antiholomorph*.

Satz 10.14 Auf einer komplex-analytischen Mannigfaltigkeit X der komplexen Dimension n gibt es ein (eindeutig bestimmtes) komplexes holomorphes Unterbündel $T_X^{(1,0)}$ des komplexen Tangentialbündels $T_X^{\mathbb{C}}$ vom komplexen Rang n , so daß

$$T_X^{\mathbb{C}} = T_X^{(1,0)} \oplus T_X^{(0,1)} \quad \text{mit} \quad T_X^{(0,1)} := \overline{T_X^{(1,0)}}.$$

$T_X^{(1,0)}$ wird bei holomorpher Koordinatenüberdeckung beschrieben durch den 1-Cozyklus

$$\left(\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} \right).$$

Beweis. Es ist nur noch zu beachten, daß die Einträge der Matrix $\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha}$ holomorphe Funktionen sind. \square

Definition. $T_X^{(1,0)}$ heißt das *holomorphe Tangentialbündel*, sein duales Bündel das *holomorphe Cotangentialbündel*, für das wir auch $T_X^{*(1,0)}$ schreiben.

Bemerkung. Das holomorphe Tangentialbündel besteht als Unterbündel des komplexen Tangentialbündels tatsächlich, was wir hier nicht weiter ausführen wollen, aus allen komplexen Tangentialvektoren an *holomorphe* Kurven $\gamma: \Delta \rightarrow X$, Δ eine Kreisscheibe in \mathbb{C} . Schreibt man $T_X^{*(0,1)}$ für das konjugiert-komplexe Bündel zu $T_X^{*(1,0)}$, so hat man eine kanonische Zerlegung $T_X^{\mathbb{C}} \cong T_X^{*(1,0)} \oplus T_X^{*(0,1)}$.

Bemerkung und Definition. Holomorphe Schnitte in dem holomorphen Tangentialbündel bzw. holomorphen Cotangentialbündel sind lokal von der Form

$$\sum_{j=1}^n f_j \frac{\partial}{\partial z^j} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^n f_j dz^j \quad \text{mit} \quad f_1, \dots, f_n \quad \text{holomorph.}$$

Sie heißen *holomorphe Vektorfelder* bzw. *holomorphe 1-Formen*.

Das Bündel \overline{E} wird, wie oben schon erwähnt, gebraucht, um *Hermitesche* Metriken auf E zu definieren. Auf einem \mathbb{C} -Vektorraum V ist eine Hermitesche Form ja nicht \mathbb{C} -bilinear, sondern \mathbb{C} -sesquilinear¹¹, d. h. \mathbb{C} -linear im ersten und \mathbb{C} -antilinear im zweiten Argument (oder umgekehrt, je nach Geschmack). Also ist eine Hermitesche Form auf dem komplexen Vektorraumbündel E zu definieren durch einen Schnitt in

$$(E \otimes \overline{E})^* = E^* \otimes \overline{E}^*.$$

Mit Hilfe von Übergangsmatrizen sieht man sofort $\overline{E}^* = \overline{E^*}$. Wir geben also die folgende

Definition. Eine *Sesquilinearform* H auf E (über U) wird durch einen Schnitt h in $E^* \otimes \overline{E}^*$ (über U) bestimmt vermöge der Definition

$$H(s_1, s_2) := h(s_1, \overline{s_2})$$

für Schnitte $s_1, s_2 \in \Gamma(U, E)$. H ist dann offensichtlich additiv in beiden Einträgen, im ersten sogar \mathbb{C} -linear, im zweiten aber \mathbb{C} -antilinear. Die Form H heißt *Hermitesch*, wenn $H(s_2, s_1) = \overline{H(s_1, s_2)}$, d. h. wenn $h(s_2, \overline{s_1}) = \overline{h(s_1, \overline{s_2})}$; sie heißt eine *Hermitesche Metrik*, wenn H überall positiv definit ist (was wegen $H(s, s) = \overline{H(s, s)} \in \mathbb{R}$ Sinn macht).

Eine solche Sesquilinearform schreibt sich bzgl. einer lokalen Basis e_1, \dots, e_r von E in der Form

$$h = \sum h_{jk} e_j^* \otimes \overline{e_k^*}, \quad h_{jk} = h(e_j, \overline{e_k}) = \overline{H(e_j, e_k)}.$$

Die Eigenschaft, Hermitesch zu sein, ist dann äquivalent zu $H(e_k, e_j) = \overline{H(e_j, e_k)}$ für alle j und k und damit zu

$$h_{kj} = \overline{h_{jk}},$$

¹¹das heißt so viel wie 1/2-fach linear.

wie man dies aus der linearen Algebra kennt, die Positiv-Definitheit zu der entsprechenden Eigenschaft der Hermiteschen Matrix (h_{jk}) .

Mit differenzierbaren Teilungen der Eins gewinnt man auch in diesem Kontext das folgende

Lemma 10.15 *Jedes komplexe differenzierbare Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ trägt Hermitesche Metriken.*

Definition. Eine *Hermitesche Metrik* H auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X ist eine Hermitesche Metrik auf dem *holomorphen* Tangentialbündel $T_X^{(1,0)}$, wird also lokal bestimmt durch einen Tensor der Gestalt

$$h = \sum h_{jk} dz^j \otimes \overline{dz^k}, \quad h_{kj} = \overline{h_{jk}}, \quad (h_{jk}) > 0.$$

Um einen Zusammenhang zwischen solchen Hermiteschen Metriken und gewissen Tensoren auf dem reellen Tangentialbündel T_X herstellen zu können, benötigen wir das folgende Resultat.

Satz 10.16 *Für eine komplexe Mannigfaltigkeit X ist das (reelle) Tangentialbündel kanonisch isomorph zu dem dem holomorphen Tangentialbündel unterliegenden reellen Bündel.*

Beweis. Wir betrachten einen lokalen biholomorphen Kartenwechsel $F = G + iH$ auf der komplexen Mannigfaltigkeit X . Zu dem holomorphen Tangentialbündel gehört dann als Transformationsmatrix die holomorphe Funktionalmatrix

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial F^j}{\partial z^k} \right)_{1 \leq j, k \leq r}.$$

Nach der Beobachtung im Anschluß an Lemma 9 wird seine reelle Struktur beschrieben durch die reellen $n \times n$ -Matrizen $\operatorname{Re} \frac{\partial F}{\partial z}$ und $\operatorname{Im} \frac{\partial F}{\partial z}$. Aufgrund des Wirtinger-Kalküls hat man aber (siehe oben)

$$\operatorname{Re} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right), \quad \operatorname{Im} \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} \right).$$

Da X eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt, die sich in Kurzform in der Gestalt

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

notieren lassen. Also besitzt das in Rede stehende reelle Bündel die Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix},$$

und dies ist nichts anderes als die Übergangsmatrix zu dem reellen Tangentialbündel. \square

Was wir jetzt noch brauchen, ist ein einfaches Ergebnis aus der Theorie der Hermiteschen Vektorräume.

Satz 10.17 *Es sei V ein komplexer Vektorraum der Dimension n , $V_{\mathbb{R}}$ der unterliegende reelle Vektorraum der Dimension $2n$, und H sei eine positiv definite Hermitesche Form auf V . Dann werden durch*

$$\langle u, v \rangle := \operatorname{Re} H(u, v)$$

eine positiv definite symmetrische und durch

$$[u, v] := \operatorname{Im} H(u, v)$$

eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf $V_{\mathbb{R}}$ definiert.

Beweis. $\langle u, v \rangle$ und $[u, v]$ sind Bilinearformen auf $V_{\mathbb{R}}$, und wegen $H(v, u) = \overline{H(u, v)}$ ist $\langle v, u \rangle = \langle u, v \rangle$ und $[v, u] = -[u, v]$. Weiter ist $\langle u, u \rangle = \operatorname{Re} H(u, u) = H(u, u) \geq 0$ und 0 nur dann, wenn $u = 0$. Die letzte Behauptung folgt aus der Positiv-Definitheit und der Formel $[u, v] = \langle iu, v \rangle$. \square

Wendet man all dies auf die obige Situation an und beachtet man Satz 16, so erhält man unmittelbar fast alle Aussagen in dem folgenden Satz.

Satz 10.18 *Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n , und H sei eine Hermitesche Metrik (auf dem holomorphen Tangentialbündel). Dann induziert H vermöge der obigen Konstruktion auf der X unterliegenden reellen Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$:*

1. eine Riemannsche Metrik $g = \operatorname{Re} h$;
2. eine nichtausgeartete alternierende 2-Form $\omega = -\operatorname{Im} h$.

Wird h lokal geschrieben als

$$\sum h_{jk} dz^j \otimes \overline{dz^k},$$

so schreibt sich ω in der Form¹²

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz^j \wedge \overline{dz^k}.$$

Beweis. Nur noch die letzte Behauptung bedarf einer Begründung. Es ist

$$\begin{aligned} h &= \sum h_{jk} dz^j \otimes \overline{dz^k} = \sum h_{jk} (dx^j + i dy^j) \otimes (dx^k - i dy^k) \\ &= \sum h_{jk} (dx^j \otimes dx^k + dy^j \otimes dy^k + i(dy^j \otimes dx^k - dx^j \otimes dy^k)). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $\overline{h_{jk}} = h_{kj}$:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} h &= 2 \sum (\operatorname{Im} h_{jk} (dx^j \otimes dx^k + dy^j \otimes dy^k) + \operatorname{Re} h_{jk} (dy^j \otimes dx^k - dx^j \otimes dy^k)) \\ &= \sum \operatorname{Im} h_{jk} (dx^j \otimes dx^k - dx^k \otimes dx^j + dy^j \otimes dy^k - dy^k \otimes dy^j) + \\ &\quad \sum \operatorname{Re} h_{jk} (dy^j \otimes dx^k + dy^k \otimes dx^j - dx^j \otimes dy^k - dx^k \otimes dy^j) \\ &= \sum \operatorname{Im} h_{jk} (dx^j \wedge dx^k + dy^j \wedge dy^k) + \sum \operatorname{Re} h_{jk} (dy^j \wedge dx^k - dx^j \wedge dy^k). \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} \sum h_{jk} dz^j \wedge \overline{dz^k} &= \sum h_{jk} (dx^j + i dy^j) \wedge (dx^k - i dy^k) \\ &= \sum h_{jk} (dx^j \wedge dx^k + dy^j \wedge dy^k + i(dy^j \wedge dx^k - dx^j \wedge dy^k)) \end{aligned}$$

rein imaginär, da

$$\overline{\sum h_{jk} dz^j \wedge \overline{dz^k}} = \sum \overline{h_{jk}} \overline{dz^j} \wedge dz^k = -\sum h_{kj} dz^k \wedge \overline{dz^j}.$$

(Dies kann man auch der davorstehenden Darstellung in den reellen Koordinaten ansehen). Es folgt

$$\begin{aligned} -i \sum h_{jk} dz^j \wedge \overline{dz^k} &= \operatorname{Im} \left(\sum h_{jk} dz^j \wedge \overline{dz^k} \right) \\ &= \sum (\operatorname{Im} h_{jk} (dx^j \wedge dx^k + dy^j \wedge dy^k) + \operatorname{Re} h_{jk} (dy^j \wedge dx^k - dx^j \wedge dy^k)), \end{aligned}$$

¹²Es ist diese Manifestation von ω , die die Wahl des Vorzeichens in 2. bestimmt. Selbstverständlich kann man, was auch manche Autoren tun, ω als $\operatorname{Im} h$ definieren.

und dieser Ausdruck ist, wie oben ausgerechnet, gleich $2 \operatorname{Im} h$. □

Bemerkung. Entsprechend ergibt sich für den Riemannschen metrischen Tensor $g = \operatorname{Re} h$ die explizite Formel

$$2 \operatorname{Re} h = \sum (\operatorname{Re} h_{jk} (dx^j dx^k + dy^j dy^k) + \operatorname{Im} h_{jk} (dx^j dy^k - dy^j dx^k)) .$$

Symplektische Mannigfaltigkeiten verhalten sich nicht optimal bzgl. des Übergangs zu Untermannigfaltigkeiten, wie man sich sofort an Beispielen klar macht. Die Situation ist wesentlich besser bei *Kählerschen Mannigfaltigkeiten*.

Definition. Eine komplexe Mannigfaltigkeit heißt *Kählersch* oder eine *Kähler-Mannigfaltigkeit*, wenn es eine Hermitesche Metrik h auf X gibt, so daß X bzgl. der Form ω *symplektisch* ist, d. h. wenn $d\omega = 0$ gilt. Dann heißt h auch eine *Kähler-Metrik* und ω die zugehörige *Kähler-Form*.

Bemerkung. Die Kähler-Form ω ist eine alternierende Differentialform vom Grad 2, also ein Schnitt in dem Bündel $\Lambda^2 T_X^{*\mathbb{C}}$. Sie ist aber noch von speziellerer Gestalt, da in jedem ihrer Summanden nur jeweils ein Differential dz^j mit einem Differential \overline{dz}^k multipliziert wird. Man nennt solche Differentialformen *vom Typ (1, 1)* oder spricht kurz von einer *(1, 1)-Form*. Noch allgemeiner besteht auf jeder komplexen Mannigfaltigkeit eine direkte Summenzerlegung

$$\Lambda^\ell T_X^{*\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p+q=\ell} T_X^{*(p,q)}$$

in die Vektorraumbündel der Differentialformen vom Typ (p, q) , deren Schnitte sich in jedem Koordinatensystem in der Gestalt

$$\sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n \\ 1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n}} a_{j_1, \dots, j_p, k_1, \dots, k_q} dz^{j_1} \wedge \dots \wedge dz^{j_p} \wedge \overline{dz}^{k_1} \wedge \dots \wedge \overline{dz}^{k_q}$$

schreiben lassen. Die Operatoren ∂ und $\bar{\partial}$ von den C^∞ -Funktionen in die Differentialformen vom Typ $(1, 0)$ bzw. $(0, 1)$ lassen sich auf kanonische Weise „fortsetzen“ zu Operatoren

$$\partial : \Gamma(X, T_X^{*(p,q)}) \longrightarrow \Gamma(X, T_X^{*(p+1,q)}), \quad \bar{\partial} : \Gamma(X, T_X^{*(p,q)}) \longrightarrow \Gamma(X, T_X^{*(p,q+1)}).$$

Definition. Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine Teilmenge. Y heißt eine *komplexe Untermannigfaltigkeit* von X , wenn es zu jedem Punkt $y_0 \in Y$ eine *holomorphe* Karte $U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ von X um $y_0 = 0$ gibt, so daß $Y \cap V$ beschrieben wird durch $\{ z^{k+1} = \dots = z^n = 0 \}$. Y ist dann selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit der (komplexen) Dimension k .

Bemerkung. Die lokale Definition ist äquivalent zu a) oder b):

a) Es gibt *holomorphe* Funktionen f_{k+1}, \dots, f_n auf X nahe y_0 , so daß

$$Y \cap U = \{ f_{k+1} = \dots = f_n = 0 \} \quad \text{und die Matrix} \quad \frac{\partial(f_{k+1}, \dots, f_n)}{\partial(z^1, \dots, z^n)}$$

maximalen Rang hat;

b) Y wird durch *holomorphe* Funktionen in k komplexen Veränderlichen *parametrisiert*.

Wir können nun das *Permanenz-Prinzip* für Kähler-Mannigfaltigkeiten formulieren.

Satz 10.19 *Es sei $Y \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Kähler-Mannigfaltigkeit X (mit Kähler-Metrik h und Kähler-Form ω). Dann ist $h_Y = h|_Y$ eine Kähler-Metrik auf Y mit Kähler-Form $\omega_Y = \omega|_Y$.*

Beweis. Da Y eine komplexe Untermannigfaltigkeit von X ist, ist das *holomorphe* Tangentialbündel $T_Y^{(1,0)}$ von Y ein holomorphes Unterbündel von $i^*T_X^{(1,0)}$, $i: Y \hookrightarrow X$ die natürliche Einbettung. Also induziert h eine Metrik h_Y auf Y mit $\omega_Y = \text{Im } h_Y = \text{Im } h|_{T_Y^{(1,0)}} = \omega|_Y = i^*\omega$ und $d\omega_Y = di^*\omega = i^*d\omega = i^*0 = 0$. \square

Damit unsere Definition nicht im luftleeren Raum bleibt, brauchen wir einige relevante Beispiele.

Beispiel. Betrachte \mathbb{C}^n mit der üblichen Hermiteschen Metrik $h = \sum_{j=1}^n dz^j \otimes d\bar{z}^j$. Hier ist der assoziierte Riemannsche metrische Tensor nach der oben angegebenen Formel gleich

$$\sum (dx^j \otimes dx^j + dy^j \otimes dy^j),$$

also die übliche euklidische Metrik auf $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Mit

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\bar{z}^j$$

ist, wie gewünscht, tatsächlich $d\omega = 0$. Man sieht an diesem Beispiel, daß der negative bei der Definition von ω in Satz 18 nicht willkürlich gewählt wurde, sondern gerade so, daß in dem vorliegenden Standardbeispiel sich $\omega = \sum dx^j \wedge dy^j$ ergibt.

Unmittelbare Konsequenz des vorstehenden Beispiels ist der folgende

Satz 10.20 *Jede komplexe Untermannigfaltigkeit von \mathbb{C}^N trägt eine Kählerstruktur.*

Bemerkung. Die Klasse der Untermannigfaltigkeiten $X \subset \mathbb{C}^N$ besteht genau aus den sogenannten *Steinischen Mannigfaltigkeiten*, die sich abstrakt charakterisieren lassen durch „Reichhaltigkeitsbedingungen“ an die Algebra der globalen holomorphen Funktionen auf X .

Die andere interessante große Klasse von Mannigfaltigkeiten ist die der Untermannigfaltigkeiten des komplex-projektiven Raumes $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Diese sind die (kompakten) projektiv-algebraischen komplexen Mannigfaltigkeiten, die bevorzugte Studienobjekte der *Algebraischen Geometrie* sind. Auch diese sind Kählersch. Um dies einzusehen, brauchen wir nur auf $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ eine Kähler-Metrik ausfindig zu machen.

Zum Abschluß dieses Kapitels also noch einige Untersuchungen zum komplex-projektiven Raum. Es ist per definitionem

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \{ \text{komplexe Geraden durch } 0 \text{ in } \mathbb{C}^{n+1} \} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*,$$

wobei $(z^0, \dots, z^n) \sim (w^0, \dots, w^n)$ genau dann, wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ existiert, so daß $w^j = \lambda z^j$, $j = 0, \dots, n$. Es gibt eine kanonische surjektive Abbildung

$$p: \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) =: \mathbb{P}_n.$$

Das Bild $p(z)$ von $z = (z^0, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ in \mathbb{P}_n bezeichnet man mit

$$p(z) =: [z] =: [z^0 : \dots : z^n].$$

Man nennt dann z^0, \dots, z^n auch die *homogenen Koordinaten* von $[z]$.

Wir wollen nun in geeigneter Weise die Hermitesche Standard-Struktur

$$\langle z, w \rangle := \sum_{j=0}^n z^j \bar{w}^j, \quad z, w \in \mathbb{C}^{n+1}$$

von \mathbb{C}^{n+1} auf \mathbb{P}_n übertragen. Es sei dazu

$$S^{2n+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{n+1} : \|z\|^2 = \langle z, z \rangle = 1 \}.$$

Für Punkte $z_1, z_2 \in S^{2n+1}$ ist offensichtlich $z_1 \sim z_2$, wenn $z_1^j = \lambda z_2^j$ mit $\lambda \in S^1 \subset \mathbb{C}^*$. Also ist \mathbb{P}_n auch Quotient des kompakten Raumes S^{2n+1} :

$$\mathbb{P}_n = S^{2n+1}/S^1,$$

also selbst (in der Quotiententopologie) kompakt. Man sieht leicht, daß \mathbb{P}_n auch hausdorffsch bzgl. der Quotiententopologie ist.

Wir setzen $Z_j = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : z^j \neq 0\}$; dies ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, und es ist $p^{-1}p(Z_j) = Z_j$, also in der Quotiententopologie

$$U_j := p(Z_j) \subset \mathbb{P}_n \quad \text{offen.}$$

Diese $n+1$ Mengen überdecken ganz \mathbb{P}_n und werden die Grundlage für eine komplex-analytische Kartenüberdeckung liefern.

Es werde nämlich $V_j = \mathbb{C}^n$ gesetzt mit den Koordinaten $w_j = (w_j^0, \dots, \widehat{w_j^j}, \dots, w_j^n)$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_j : \begin{cases} V_j \longrightarrow & U_j \\ w_j \longmapsto & p(w_j^0, \dots, 1, \dots, w_j^n) \end{cases}$$

ein Homöomorphismus. Man rechnet leicht nach, daß die Homöomorphismen $\varphi_k^{-1} \circ \varphi_j$ (geeignet eingeschränkt) biholomorph sind (sie sind sogar rationale Funktionen in den Koordinaten). Also erbt

$$\mathbb{P}_n = \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) = \bigcup_{j=0}^n U_j$$

eine komplex-analytische Struktur.

Wir betrachten jetzt die Standard-Hermitesche Struktur

$$h = \sum_{j=0}^n dz^j \otimes \overline{dz^j} \quad \text{auf } \mathbb{C}^{n+1}.$$

Diese ist offensichtlich unter der Operation $z \mapsto cz$, $c \in S^1$, invariant. Wir können sie deshalb auf S^{2n+1}/S^1 einschränken. Wir berechnen ihre Darstellung auf V_0 , wobei wir bei den Koordinaten den Index 0 fortlassen:

$$(w^1, \dots, w^n) \longmapsto \left(\frac{1}{r}, \frac{w^1}{r}, \dots, \frac{w^n}{r} \right) \in S^{2n+1},$$

wobei $r^2 = 1 + \|w\|^2$ und $\|w\|^2 = w^1 \overline{w^1} + \dots + w^n \overline{w^n}$. Es ist also $z^0 = \frac{1}{r}$ und $z^j = \frac{w^j}{r}$. Daraus berechnet man

$$dz^0 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\overline{w^j} dw^j + w^j \overline{dw^j}}{r^3}$$

und $dz^j = w^j dz^0 + z^0 dw^j$. Damit bekommt man leicht als geliftete Form

$$h_0 := h|_{V_0} = \frac{1}{(1 + \|w\|^2)^2} \sum h_{jk} dw^j \otimes \overline{dw^k}$$

mit

$$h_{jk} = (1 + \|w\|^2) \delta_{jk} - \overline{w^j} w^k.$$

Satz 10.21 Die Form h_0 ist positiv-definit Hermitesch, und ihr Imaginärteil ist geschlossen.

Beweis. Es ist $h_{kj} = \overline{h_{jk}}$. Ferner gilt, bis auf einen positiven Faktor C :

$$\begin{aligned} C h_0(u, u) &= \sum_{j,k} h_{jk} u^j \overline{u^k} = \sum_{j,k} (1 + \|w\|^2) \delta_{jk} u^j \overline{u^k} - \sum_{j,k} \overline{w^j} w^k u^j \overline{u^k} \\ &= \|u\|^2 + \|u\|^2 \|w\|^2 - \langle \overline{w}, u \rangle \langle w, \overline{u} \rangle \geq \|u\|^2 \end{aligned}$$

wegen der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Den Nachweis der Geschlossenheit der h zugeordneten 2-Form ω erbringen wir weiter unten. \square

Definition. Die oben konstruierte Kähler-Metrik h auf \mathbb{P}_n heißt die *Fubini-Study-Metrik*. Sie ist (bis auf einen skalaren Faktor) bestimmt durch die Forderung nach Invarianz unter den Automorphismen von \mathbb{P}_n , die durch die unitäre Gruppe $U(n+1)$ erzeugt werden.

Da der obige Beweis noch unvollständig ist, geben wir eine andere Konstruktion für die Form ω an, die fast ohne Rechnung ihre Geschlossenheit ergibt. Es sei $U \subset \mathbb{P}_n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ ein *holomorpher* Schnitt zu der Projektion p , d. h. $p \circ f = \text{id}_U$. Solche Schnitte existieren stets lokal; z. B. wird auf U_0 durch $(w_1, \dots, w_n) \mapsto (1, w_1, \dots, w_n)$ ein Schnitt gegeben. (Hinter dieser Aussage verbirgt sich die leicht zu beweisende Tatsache, daß die Abbildung $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n$ ein \mathbb{C}^* -*Hauptfaser* oder *-Prinzipalbündel* ist). Man setze dann (der an sich irrelevante Faktor $1/2\pi$ dient nur dazu, das Integral $\int_{\mathbb{P}_n} \omega \wedge \dots \wedge \omega$ auf 1 zu normieren):

$$\omega = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|f\|^2.$$

Diese $(1, 1)$ -Form ist unabhängig von der Liftung; denn jede andere Liftung schreibt sich in der Form $g f$, wobei g eine nirgends verschwindende *holomorphe* Funktion ist. Die beiden Formen unterscheiden sich also additiv um ein Vielfaches von

$$\partial \bar{\partial} \log |g|^2 = \partial \bar{\partial} (\log g + \log \bar{g}) = \partial (\bar{\partial} \log g) - \bar{\partial} (\partial \log \bar{g}) = 0$$

mit einem (lokalen) holomorphen Zweig von $\log g$, für den automatisch $\log \bar{g}$ *antiholomorph* ist. Es ist folglich hierdurch eine wohlbestimmte $(1, 1)$ -Form ω auf \mathbb{P}_n definiert, und es gilt

$$d\omega = (\partial + \bar{\partial})\omega = \frac{i}{2\pi} (\partial + \bar{\partial}) \partial \bar{\partial} \log \|f\|^2 = 0$$

wegen $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$ und, was wir oben schon benutzt haben, $\partial \bar{\partial} = -\bar{\partial} \partial$. Also ist ω eine geschlossene Form.

Diese Form stimmt tatsächlich mit der Kähler-Form zu der Fubini-Study-Metrik überein. Die konkrete Berechnung von ω ist simpel: Wählt man speziell $f : U_0 \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ wie oben, so findet man

$$\partial \bar{\partial} \log (1 + \|w\|^2) = \sum \frac{\partial^2}{\partial w^j \partial \overline{w^k}} \log (1 + \|w\|^2) dw^j \wedge \overline{dw^k}$$

und damit

$$\frac{\partial^2}{\partial w^j \partial \overline{w^k}} \log (1 + \|w\|^2) = \frac{\partial}{\partial w^j} \left(\frac{w^k}{1 + \|w\|^2} \right) = \frac{(1 + \|w\|^2) \delta_{jk} - \overline{w^j} w^k}{(1 + \|w\|^2)^2},$$

also die uns schon bekannte Formel.

Eine ähnliche Situation liegt übrigens *immer* im Fall von Kähler-Metriken vor. Die Bedingung $d\omega = 0$ ist wegen des Poincaréschen Lemmas äquivalent zu $\omega = d\sigma$ (zumindest auf *sternförmigen* Gebieten, also insbesondere auf \mathbb{C}^n). σ heißt dann eine (lokale) *Stammform* von ω . Wegen

$$d\bar{\sigma} = (\partial + \bar{\partial})\bar{\sigma} = \partial \bar{\sigma} + \bar{\partial} \bar{\sigma} = \overline{\partial \sigma} + \bar{\partial} \bar{\sigma} = \overline{\partial \sigma + \partial \sigma} = \overline{d\sigma} = \bar{\omega} = \omega$$

können wir σ durch $\frac{1}{2}(\sigma + \bar{\sigma})$ ersetzen, also σ als *reelle* 1-Form annehmen. Dann schreibt sich $\sigma = \alpha + \bar{\alpha}$ mit einer $(1, 0)$ -Form α . Aus $\omega = (\partial + \bar{\partial})(\alpha + \bar{\alpha}) = \partial\alpha + (\bar{\partial}\alpha + \partial\bar{\alpha}) + \bar{\partial}\bar{\alpha}$ folgt weiter aus Gradgründen, da ω eine $(1, 1)$ -Form ist:

$$\omega = \bar{\partial}\alpha + \partial\bar{\alpha}, \quad \partial\alpha = \bar{\partial}\bar{\alpha} = 0.$$

Nun ist entsprechend zu dem Poincaréschen Lemma für den Operator d das *Dolbeaultsche Lemma* für $\bar{\partial}$ gültig. Es gibt somit lokal (d. h. auf sternförmigen Gebieten) eine Funktion h mit $\bar{\partial}h = \bar{\partial}\bar{h} = \bar{\alpha}$ und damit auch $\partial\bar{h} = \alpha$. Es folgt

$$\omega = \bar{\partial}\partial\bar{h} + \partial\bar{\partial}h = \partial\bar{\partial}(h - \bar{h}) = 2i\partial\bar{\partial}(\operatorname{Im} h).$$

Wir geben deshalb die folgende

Definition. Eine (lokale) reelle Funktion ψ mit

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^j \partial \bar{z}^k} = h_{jk}$$

heißt ein *Potential* der Hermiteschen Metrik $\sum h_{jk} dz^j \otimes \bar{d}z^k$.

Satz 10.22 *Eine Hermitesche Metrik auf einer komplexen Mannigfaltigkeit besitzt genau dann lokale Potentiale, wenn sie Kählersch ist.*

Beweis. Eine Richtung haben wir soeben bewiesen. Die andere folgt wie im Fall der Fubini-Study-Metrik, da lokal mit einem Potential ψ gilt:

$$\omega = \frac{i}{2} \sum h_{jk} dz^j \wedge \bar{d}z^k = \frac{i}{2} \partial\bar{\partial}\psi \quad \text{und damit} \quad d\omega = 0. \quad \square$$

Bemerkung. Als kompakte komplexe Mannigfaltigkeit besitzt der komplex-projektive Raum (wegen des Maximum-Prinzips) nur *konstante* holomorphe Funktionen. Dieses Manko wird aber dadurch wettgemacht, daß es holomorphe Vektorraumbündel auf \mathbb{P}_n mit „vielen“ holomorphen Schnitten gibt. Die „Mutter“ aller dieser Bündel ist das sogenannte *tautologische Bündel*

$$L = \{(w, [z]) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}_n : w = 0 \text{ oder } [w] = [z]\}.$$

Dieses besitzt zwar keine holomorphen Schnitte (außer dem Nullschnitt), aber sein duales Bündel L^* , das das *Hyperebenen-Bündel* genannt wird, besitzt nichttriviale holomorphe Schnitte, die gerade den von Null verschiedenen komplexen Linearformen auf \mathbb{C}^{n+1} entsprechen. Allgemeiner kann man jedes homogene Polynom vom Grad d in $n+1$ komplexen Veränderlichen als einen holomorphen Schnitt in dem d -fachen Tensorprodukt von L^* mit sich selbst identifizieren. Die Kähler-Form ω kann übrigens in ganz natürlicher Weise einer kanonischen Hermiteschen Metrik auf L als *Krümmungsform* assoziiert werden.¹³

Homogene Polynome sind zwar keine Funktionen auf \mathbb{P}_n ; trotzdem ist es sinnvoll, davon zu sprechen, daß ein homogenes Polynom an einer Stelle $[z] \in \mathbb{P}_n$ verschwindet. So verschwindet eine nichttriviale Linearform in $n+1$ Veränderlichen auf \mathbb{P}_n gerade in einer linearen Hyperebene $\mathbb{P}_{n-1} \subset \mathbb{P}_n$. Dies ist der Grund für die oben angegebene Bezeichnung für das duale Bündel des tautologischen Bündels.

Definition. Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{P}_n$ heißt *projektiv-algebraisch*, wenn homogene Polynome P_1, \dots, P_r in $n+1$ komplexen Veränderlichen existieren, so daß

$$X = p(\{P_1 = \dots = P_r = 0\}).$$

Man kann leicht in lokalen Koordinaten nachrechnen, daß solche Mengen *komplex-analytisch*, also lokal das gemeinsame Nullstellengebilde von endlich vielen holomorphen Funktionen sind. Der berühmte Satz von CHOW besagt, daß auch die Umkehrung richtig ist. Wir formulieren den Satz nur für komplexe *Untermannigfaltigkeiten* von \mathbb{P}_n . Er ist ebenso für *analytische Mengen* in \mathbb{P}_n richtig.

¹³Das assoziierte $\mathbb{C}^* = \operatorname{GL}(1, \mathbb{C})$ -Hauptfaserbündel zu L ist gerade $p : (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{P}_n$.

Satz 10.23 *Jede komplexe Untermannigfaltigkeit von \mathbb{P}_n ist projektiv-algebraisch.*

Beweisidee. Es sei $X \subset \mathbb{P}_n$ und $Y = \overline{p^{-1}(X)}$ der Abschluß der Untermannigfaltigkeit $p^{-1}(X) \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ in \mathbb{C}^{n+1} , also $Y = p^{-1}(X) \cup \{0\}$, da $p^{-1}(X)$ ein *komplexer Kegel* ist: mit $z \in p^{-1}(X)$ und $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ist auch λz in dieser Menge. Nach dem Fortsetzungssatz von Cartan-Thullen ist Y auch im Nullpunkt komplex-analytisch, wird also in einer Umgebung $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$ der Null durch das Verschwinden endlich vieler holomorpher Funktionen auf U beschrieben. Wegen der Kegeleigenschaft ist Y aber vollständig durch $Y \cap U$ bestimmt. Da der Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1},0}$ der konvergenten Potenzreihen um den Urprung 0 noethersch ist, wird das Ideal \mathfrak{a} aller holomorphen Funktionskeime, die lokal um Null auf Y verschwinden, endlich erzeugt. Man macht sich leicht klar, daß deshalb zum Beweis des Satzes von Chow nur noch folgendes zu zeigen ist:

Ist $f \in \mathfrak{a}$ und $f = \sum_{j=0}^{\infty} P_j$ die Entwicklung der Funktion f in ihre homogene Bestandteile aus der Taylor-Formel, so sind schon alle $P_j \in \mathfrak{a}$.

Dies ist einfach zu sehen; es ist nämlich $P_0 = f(0) = 0$, und sind P_0, \dots, P_{j-1} schon als in \mathfrak{a} liegend erkannt, so ist mit $y \in Y$ (nahe 0) und $|t| \leq 1$ auch $ty \in Y$, also $0 = f(ty) = P_0(ty) = \dots = P_{j-1}(ty)$. Es folgt:

$$0 = t^j P_j(y) + t^{j+1} P_{j+1}(y) + \dots$$

Dividiert man hier durch t^j , $t \neq 0$, und läßt dann t gegen Null gehen, so folgt $P_j(y) = 0$, $y \in Y$. \square

Bemerkung. Auch die projektiv-algebraischen Mannigfaltigkeiten kann man wie die Steinschen Mannigfaltigkeiten abstrakt durch eine „Reichhaltigkeitsbedingung“ charakterisieren. Sie besitzen holomorphe Vektorraumbündel mit *vielen* holomorphen Schnitten; im Englischen werden solche Bündel „ample“ genannt.

Bemerkung. Der projektive Raum ist auf vielfältige Weise mit der Operation von Liegruppen auf Mannigfaltigkeiten verbunden:

$$\mathbb{P}_n \cong \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \cong S^{2n+1} / S^1.$$

Der Zusammenhang ist sogar noch tiefergehend: \mathbb{P}_n ist ein sogenannter *homogener Raum*. Um dieses in voller Allgemeinheit zu verstehen, werden wir uns später mit Liegruppen und ihren Aktionen auf Mannigfaltigkeiten beschäftigen (müssen).

Anhang 1: Analytische Mechanik

Wir erinnern zunächst an den Begriff des *klassischen LAGRANGE-Systems*. Es besteht aus einem Raum der Konfigurationen, oder dem *Konfigurationsraum* $Q \subset \mathbb{R}^n$ mit den Variablen oder *Ortskoordinaten* $q \in Q$, dem *Phasenraum* $P = Q \times \mathbb{R}^n$ mit den Variablen (q, v) , wobei v *Geschwindigkeitskoordinaten* bezeichnen, und einer *Lagrange-Funktion* $L : P \rightarrow \mathbb{R}$. Die *Dynamik* des Systems wird beschrieben durch die *Euler-Lagrange Gleichungen* der Variationsrechnung (zur Begründung siehe weiter unten):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Genauer bedeutet dies: Eine Funktion $q : I \rightarrow Q$ auf einem Zeitintervall $I := [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ist eine *Bewegung* oder *Trajektorie* des Systems, wenn q das System von Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t)) \right) = \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t))$$

befriedigt. In der Tat sind diese Lösungen die *stationären* Kurven des *Wirkungsintegrals*

$$S(q) = \int_I L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

in dem Sinne, daß $\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(q + \varepsilon h) \right|_{\varepsilon=0} = 0$ für beliebige Funktionen $h : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Beispiel. Ein Spezialfall sind die *Newtonschen Bewegungsgleichungen* für ein m -Teilchensystem in einem konservativen Kraftfeld. Hier ist $Q = \mathbb{R}^{3m}$, wobei wir mit $q^i = q^i(t) \in \mathbb{R}^3$ den Ort und mit $v^i = v^i(t) \in \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit des i -ten Teilchens zur Zeit t bezeichnen. Wir müssen also die Orte (q^1, \dots, q^m) aller Teilchen als einen Punkt in \mathbb{R}^{3m} auffassen, entsprechend den Vektor aller Geschwindigkeiten. Ist nun $U = U(q)$ ein *Potential*, so schreibt sich die Lagrange-Funktion in der Form

$$L = T - U \quad \text{mit der kinetischen Energie } T = \sum \frac{1}{2} m_i \|v_i\|^2,$$

worin $m_i > 0$ die *Masse* des i -ten Teilchens ist und U als potentielle Energie angesehen wird. Setzt man nun $F := -\text{grad } U$ für die wirkende *Kraft*, so implizieren die Euler-Lagrange-Gleichungen wegen

$$\frac{\partial L}{\partial v^i} = m_i v^i, \quad \frac{\partial L}{\partial q^i} = -\frac{\partial U}{\partial q^i} =: F_i$$

sofort das Newtonsche Bewegungsgesetz

$$m_i \dot{v}^i = F_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Es ist aufgrund wichtiger Beispiele zwingend notwendig, die Voraussetzungen an Orts- und Phasenraum von vornherein viel allgemeiner zu gestalten. So ist z. B. für ein *Doppelpendel* der Ortsraum die Untermannigfaltigkeit $S^2 \times S^2 \subset \mathbb{R}^6$ und der entsprechende Phasenraum das Tangentialbündel.

Wir nehmen also im folgenden an, daß uns eine Mannigfaltigkeit X gegeben ist, und betrachten das Tangentialbündel $P = T_X$ als den Phasenraum; ferner sei uns eine Funktion $L : P = T_X \rightarrow \mathbb{R}$ vorgegeben, die wir als *Lagrange-Funktion* bezeichnen. Zu jeder Kurve $\gamma : I = [t_0, t_1] \rightarrow X$ können wir wie vorhin das *Wirkungsintegral*

$$S(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

aufstellen und wieder danach fragen, wann γ ein *stationärer Wert* für das Wirkungsintegral wird. In diesem Fall werden wir γ eine *Bewegung* oder *Trajektorie* des (verallgemeinerten) Lagrange-Systems nennen. Allerdings müssen wir erst klären, was genau „Stationarität“ bedeuten soll. Dazu betrachtet

man (kleine) 1-Parameterdeformationen der gegebenen Kurve γ , also differenzierbare Abbildungen $\Gamma : I \times J \rightarrow X$, wobei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das den Ursprung enthält, und weiter die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\Gamma(t_0, \varepsilon) = \gamma(t_0), \quad \Gamma(t_1, \varepsilon) = \gamma(t_1), \quad \Gamma(t, 0) = \gamma(t).$$

Wir schreiben auch kurz γ_ε anstelle von Γ .

Definition Eine Kurve γ heißt *stationärer Wert* des Wirkungsintegrals, wenn für alle 1-Parameterdeformationen γ_ε von γ

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = 0$$

ist.

Wir wollen im folgenden zumindest andeuten, wie man beweisen kann, daß Stationarität in diesem Sinne äquivalent ist zu der Gültigkeit der Euler-Lagrange-Gleichungen in jeder Karte eines Atlases auf X . Wir folgen dabei SCHOTTENLOHER; siehe [36], pp. 118ff.

Wir schreiben zunächst auf, was lokale Gültigkeit besagt. Wir betrachten dazu eine Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow U \subset X$ und bilden $D\varphi : T_V = V \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} T_X|_U$. Ferner sei

$$\widehat{L}(q, v) := L((D\varphi)_q(v)).$$

Hat man eine weitere Parametrisierung $\tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow U \subset X$ der selben Menge U , und bildet man $\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{v}) = L((D\tilde{\varphi})_{\tilde{q}}(\tilde{v}))$, so ergibt sich mit dem Koordinatenwechsel $F = \psi \circ \tilde{\varphi} : \tilde{V} \rightarrow V$, also $\tilde{\varphi} = \varphi \circ F$, die Beziehung

$$\tilde{L}(\tilde{q}, \tilde{v}) = \widehat{L}(F(q), (DF)_{\tilde{q}}\tilde{v}).$$

Damit ist leicht zu sehen, daß durch $\gamma \mapsto \tilde{\gamma} := F \circ \gamma$ die Lösungen der Variationsgleichungen zu \widehat{L} auf V in Lösungen des Problems zu \tilde{L} auf \tilde{V} übergehen und umgekehrt. Genauer hat man die Beziehung, die als Gleichung von Zeilenvektoren aufzufassen ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{v}} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}} = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial v} \right) - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q} \right) ((DF)_{\tilde{q}}\tilde{v}).$$

Für einen Tangentialvektor $w \in T_{X, \gamma(t)}$ haben wir in den beiden Koordinatensystemen die Darstellungen

$$w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial q^k} = \sum_k \tilde{w}^k \frac{\partial}{\partial \tilde{q}^k}, \quad \text{wobei} \quad w^j = \sum_k \tilde{w}^k \frac{\partial F^j}{\partial \tilde{q}^k}.$$

Die darüber stehende Relation kann dann so gedeutet werden, daß für jedes Vektorfeld w entlang von γ der Ausdruck

$$\sum_k \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{v}^k} \right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \tilde{q}^k} \right) \tilde{w}^k = \sum_{k,j} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q^j} \right) \frac{\partial F^j}{\partial \tilde{q}^k} \tilde{w}^k = \sum_j \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \widehat{L}}{\partial v^j} \right) - \frac{\partial \widehat{L}}{\partial q^j} \right) w^j$$

kartenunabhängig ist und damit eine wohlbestimmte *Differentialform längs* $\gamma(t)$ definiert:

$$\alpha_L(t) : T_{X, \gamma(t)} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Man rechnet für jede 1-Parameterdeformation γ_ε von γ nach, daß

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(\gamma_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_1} \alpha_L(t) w(t) dt \quad \text{mit} \quad w(t) := \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Gamma(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \in T_{X, \gamma(t)}.$$

Nun kann man *jedes* Vektorfeld $w = w(t)$ entlang γ durch eine Deformation von γ wie in der vorstehenden Formel realisieren. Hieraus schließt man, daß γ genau dann ein stationärer Wert des

Wirkungsintegrals ist, wenn $\alpha_L(t)$ zu jeder Zeit t gleich Null ist, und dies wiederum ist äquivalent dazu, daß γ in jeder Karte die Euler–Lagrange–Gleichungen erfüllt.

Bemerkung. In der physikalischen Literatur wird die Form α_L , genauer ihr Negatives, die *Variationsableitung* von L genannt und mit $\frac{\delta L}{\delta q} dq$ bezeichnet.

Im *klassischen* Fall mit $L = T - U$ kann man die kinetische Energie T als eine *Riemannsche Metrik* auf T_X auffassen. In Verallgemeinerung dieser Tatsache gibt man die folgende Definition (siehe SCHOTTENLOHER, [36], p. 124):

Definition. Ein *natürliches* Lagrange–System ist gegeben durch eine Funktion

$$L : T_X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L = T - U,$$

wobei $2T = g$ eine Riemannsche Metrik auf X und U eine Potentialfunktion auf X ist.

Die gesamte Dynamik eines solchen natürlichen Lagrange–Systems ist ein Teilgebiet der Riemannschen Geometrie. Wie für Hyperflächen in \mathbb{R}^n kann man auch auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten *Geodätische, kovariante Ableitungen* $\nabla_w v$ von Vektorfeldern v entlang einem Vektorfeld w (oder sogar entlang einer Kurve $\gamma(t)$) etc. definieren. (Mehr Einzelheiten finden sich in Kapitel 11 und 12). Wir werden das wesentliche Ergebnis weiter unten formulieren, brauchen dazu aber noch einen Begriff.

Der (bezüglich der Metrik g gebildete) *geometrische Gradient* $\text{grad}_g f$ einer Funktion f auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) ist das Vektorfeld, das unter der von g vermittelten Isomorphie $T_X \rightarrow T_X^*$ dem Differential df entspricht. (Man kann denselben Begriff also auch im Pseudo–Riemannschen Fall einführen). Dies bedeutet, daß für jedes Vektorfeld v gilt:

$$g(v, \text{grad}_g f) = L_v f$$

(in einer lokalen Karte ist dann

$$\text{grad}_g f = \sum g^{jk} f_{,k} \frac{\partial}{\partial q^j}, \quad f_{,k} = \frac{\partial f}{\partial q^k},$$

wobei (g^{jk}) die zu (g_{jk}) inverse Matrix beschreibt).

Den folgenden Satz findet man ebenfalls bei Schottenloher (Satz II. 8. 21).

Satz 10.24 Für ein natürliches System $L = \frac{1}{2}g - U$ ist eine Kurve

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

genau dann eine Bewegung des Systems, wenn

$$D_\gamma \dot{\gamma} = -\text{grad}_g U(\gamma).$$

Die Geodätischen von (X, g) sind genau die Bewegungen γ mit kinetischer Energie $T(\dot{\gamma}) = 1/2$. Ist $X^* := \{q \in X : U(q) < E\}$ nicht leer für ein $E \in \mathbb{R}$, so ist $\gamma : I \rightarrow X^*$ genau dann eine Bewegung des Systems mit (konstanter) Gesamtenergie

$$E = T(\dot{\gamma}) + U(\gamma),$$

wenn γ (nach Umparametrisierung auf Bogenlänge) eine Geodätische der Riemannschen Mannigfaltigkeit (X^*, g^*) ist, wobei $g^* = 2(E - U)g$.

Wie kommt man nun zum *Hamilton–Formalismus* auf dem Cotangentialbündel (und warum hat dieser Vorteile gegenüber dem Lagrange–Formalismus)? Man macht den Ansatz

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}$$

und löst die Gleichung $p = \frac{\partial L}{\partial v}(q, v) = \frac{\partial T}{\partial v}(q, v)$ nach $v = \Phi(q, p)$ auf (*Legendre-Transformation*) (sofern dies möglich ist). Im klassischen Fall (siehe weiter oben) ist

$$L = \frac{1}{2} \sum m_i \|v^i\|^2 - U(q),$$

folglich $\frac{\partial L}{\partial v^i} = m_i v^i$ und damit $p_i = m_i v^i$ bzw. $v^i = \frac{1}{m_i} p_i$. Die p -Koordinaten heißen deshalb auch *verallgemeinerte Impulse*. Im Allgemeinen kann man v nach p (zumindest lokal) auflösen, wenn die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^k} \right)$$

invertierbar ist.

Man sieht noch deutlicher im Falle von *natürlichen* Lagrange-Systemen, was bei der Legendre-Transformation vor sich geht. Hier hat man

$$T(q, v) = \frac{1}{2} \sum g_{jk}(q) v^j v^k$$

und damit

$$(+) \quad p_\ell = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g_{jk}(q) (\delta_{j\ell} v^k + \delta_{k\ell} v^j) = \sum_j g_{\ell j} v^j.$$

Somit ist mit der inversen Matrix (g^{jk}) :

$$v^j = \sum g^{jk}(q) p_k.$$

Man kann die Gleichung (+) auffassen als Kontraktion des Vektorfeldes v mit dem Tensor g mit Werten in T_X^* . Das verbleibende *Feld* p ist dann notwendig ein Schnitt im Cotangentialbündel T_X^* . Oder anders ausgedrückt: (+) ist nichts anderes als die durch die Metrik g induzierte Isomorphie $T_X \xrightarrow{\sim} T_X^*$.

Man definiert nun die *Hamilton-Funktion*:

$$H(q, p) := p \Phi(q, p) - L(q, \Phi(q, p));$$

diese ist wohldefiniert auf T_X^* . Im Falle eines natürlichen Systems $L = T - U$ berechnet man leicht

$$p \Phi(q, p) = \sum p_j \Phi^j(q, p) = \sum g^{jk}(q) p_j p_k = 2T(q, \Phi(q, p))$$

und folglich

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum g^{jk}(q) p_j p_k + U(q).$$

Als erstes wesentliches Resultat erhalten wir, daß die Bewegungsgleichungen im Hamiltonschen Formalismus eine sehr elegante Form annehmen (man nennt sie auch *kanonische* Gleichungen).

Satz 10.25 *Die Lösungen des Lagrange-Systems stehen in bijektiver Korrespondenz zu den Lösungen des Hamiltonschen Systems, gegeben durch die Gleichungen:*

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Beweis. Sei $q = q(t)$ Lösung des Lagrange-Systems und $p = p(t) = \frac{\partial L}{\partial v}(q(t), \dot{q}(t))$. Dann ist $\dot{q} = \dot{q}(t) = \Phi(q(t), p(t))$ und zu jeder Zeit t :

$$\frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = \Phi(q, p) + p \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \dot{q},$$

$$\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) = p \frac{\partial \Phi}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial \Phi}{\partial q} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = -\dot{p}.$$

Ist umgekehrt (p, q) Lösung der kanonischen Gleichungen, so ist notwendig nach Definition

$$p = \frac{\partial L}{\partial v}(q, \Phi(q, p)),$$

und aus den kanonischen Gleichungen folgt

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) = \Phi(q, p) + p \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v}(q, \Phi(q, p)) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \Phi(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q) = -p \frac{\partial \Phi}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial q}(q, \Phi(q, p)) + \frac{\partial L}{\partial v}(q, \Phi(q, p)) \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q}(q, \Phi(q, p)) = \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}), \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(q, \dot{p}) = \dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{p}). \quad \square$$

Folgerung 10.26 Die Hamiltonfunktion H ist eine Bewegungskonstante des Systems (Energie).

Beweis. Es gilt:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} = \dot{q} \dot{p} - \dot{p} \dot{q} = 0. \quad \square$$

Bemerkung. Kommt H von einem Lagrange-System L her, so hat im allgemeinen H mehr *Symmetrien* als L . Außerdem stammen im Hamilton-Formalismus Bewegungskonstanten *immer* von Symmetrien her (siehe SCHOTTENLOHER [36]). Die Energieerhaltung $H = \text{const.}$ z. B. ist eine Konsequenz aus Invarianz der kanonischen Gleichungen unter der *symplektischen Involution* $(q, p) \mapsto (-p, q)$ auf $T_{\mathbb{R}^n}^*$. (Weitere Bemerkungen zu diesem Themenkreis siehe weiter unten).

Definition. Sind $F, G : T_{\mathbb{R}^n}^* \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so ist auch ihre *Poisson-Klammer*

$$\{F, G\} = \sum_j \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q^j} \right\}$$

eine wohldefinierte Funktion auf dem Impuls-Phasenraum.

Satz 10.27 (Poisson) Ist H eine Hamilton-Funktion auf $T_{\mathbb{R}^n}^*$, so ist $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ genau dann Bewegung des Systems, wenn

$$\dot{F} = \{F, H\},$$

d. h.

$$\frac{d}{dt} F(\gamma(t)) = \{F(\gamma(t)), H(\gamma(t))\}$$

für alle Funktionen F auf $T_{\mathbb{R}^n}^*$. Insbesondere ist F genau dann eine Bewegungskonstante, wenn $\{F, H\} = 0$.

Der *Beweis* ergibt sich durch einfache Rechnung wie im Falle $F = H$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = \{F, H\}.$$

Die Umkehrung folgt, wenn man für F die Koordinatenfunktionen q^k bzw. p_j einsetzt. □

Als nächstes wollen wir am Beispiel des n -dimensionalen harmonischen Oszillators

$$\ddot{q} = -q, \quad q = (q^1, \dots, q^n) \in \mathbb{R}^n$$

das Prinzip der *Reduktion der Freiheitsgrade* erläutern. Durch Einführung des Impulses $p = \dot{q}$ kommt man von den Newtonschen Bewegungsgleichungen unmittelbar zu dem Hamiltonschen System

$$(+) \quad \dot{q} = p, \quad \dot{p} = -q \quad \text{mit} \quad H(q, p) = \frac{1}{2} (\|q\|^2 + \|p\|^2),$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbb{R}^n bezeichnet. Da die totale Energie E auf Bahnen konstant ist, folgt, daß bei fester Energie E die Bahnen in der Teilmenge

$$H^{-1}(E) = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \|q\|^2 + \|p\|^2 = 2E\}$$

verlaufen; es ist

$$H^{-1}(E) = \emptyset, \quad E < 0; \quad H^{-1}(E) = \{0\}, \quad E = 0; \quad H^{-1}(E) \cong S_r^{2n-1}, \quad r = \sqrt{2E}, \quad E > 0.$$

Somit ist nur der Fall $E > 0$ von Interesse. Wegen des (lokalen) Existenz- und Eindeutigkeitsatzes für Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung ist $H^{-1}(E)$ in 1-dimensionale Bahnen *geblättert*. Es ist daher naheliegend, den *Bahnenraum* zur Energie einzuführen:

$$B_E := H^{-1}(E)/\sim, \quad z \sim z' \iff z, z' \text{ liegen auf derselben Bahn.}$$

Damit wir keine Schwierigkeiten haben, sollte dies eine Mannigfaltigkeit der Dimension $2n - 2$ sein. Dies ist in unserem Beispiel tatsächlich richtig; B_E ist sogar eine ganz prominente komplex-analytische Mannigfaltigkeit, nämlich - wie wir sofort ableiten werden - der komplex-projektive Raum $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ (also eine kompakte symplektische Mannigfaltigkeit, die wegen der Kompaktheit kein Cotangentialbündel sein kann).

Da das System (+) vollständig in die n Systeme

$$\dot{q}^j = p_j, \quad \dot{p}_j = -q^j, \quad j = 1, \dots, n,$$

zerfällt, ist es naheliegend, die komplexen Koordinaten $z_j = p_j + i q^j$ einzuführen, also \mathbb{R}^{2n} mit \mathbb{C}^n zu identifizieren, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Die Differentialgleichungen (+) schreiben sich dann in der Form

$$\dot{z} = \dot{p} + i \dot{q} = -q + i p = i z,$$

also in jeder Komponente $\dot{z}_j = i z_j$ mit der Lösung $z_j(t) = c_j e^{it}$. Hieraus folgt unmittelbar $z' \sim z \iff z' = e^{i\varphi} z$ mit $\varphi = t'_0 - t_0 \in \mathbb{R}$. Somit ist $z' \sim z$ auf $H^{-1}(E) \cong S_r^{2n-1}$ genau dann, wenn $z' = \lambda z$ mit $\lambda \in S^1 = U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Somit ist, wie behauptet,

$$H^{-1}(E)/\sim \cong S_r^{2n-1}/\sim \cong \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}).$$

Die Dynamik auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$ induziert tatsächlich ein (verallgemeinertes) Hamiltonsches System auf $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$, das invariant unter der kanonischen symplektischen Form ist. Man kann also nach weiteren Bewegungsinvarianten fahnden und damit evtl. die Freiheitsgrade erneut um 2 verringern.

Dieses nur vage angedeutete Procedere in dem obigen Beispiel ist ein Spezialfall der allgemeinen *Marsden-Weinstein-Reduktion*. Hierbei hat man eine *symplektische* Operation einer Liegruppe G auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit X vorliegen (d. h. G operiert durch *Symplektomorphismen*, i. e. Diffeomorphismen von X , die die symplektische Form ω invariant lassen). Zu einer solchen Operation existiert immer (lokal) eine *Impuls-Abbildung*

$$m : X \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

von X in das Dual der Liealgebra $\mathfrak{g} = \text{Lie } G := T_{G,e}$. Als Vektorraum ist $\mathfrak{g} \cong \mathbb{R}^d$, wobei d die Dimension der Liegruppe G ist, und alle Komponenten m_1, \dots, m_d von m sind Bewegungsinvarianten. Ähnlich wie oben definiert man den Bahnenraum

$$X_0 = m^{-1}(c)/\sim$$

und erhält in günstigen Fällen eine $2(n - d)$ -dimensionale symplektische Mannigfaltigkeit, die man den *Marsden-Weinstein-Quotienten* von X nennt. Man kann dann das Verfahren erneut starten, d. h.

nach Symmetrien auf X_0 suchen, Bewegungsinvarianten bzgl. der assoziierten Impuls–Abbildung konstruieren etc. (siehe auch Berndt [5], pp. 100 ff.).

Das gesamte Verfahren steckt in nuce schon in einem klassischen Satz, der auf Jacobi und Liouville zurückgeht (siehe Berndt, loc. cit., p. 103). Hierbei hat man auf der symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) globale Funktionen $F_1 := H, F_2, \dots, F_d \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ gegeben, die bzgl. der Poisson–Klammer vertauschen. Der Satz besagt dann, daß man die Zahl der Freiheitsgrade des Systems um $2d$ verringern kann. Insbesondere ist das System *vollständig integrierbar*, wenn $d = \dim X$.

Um dies noch ein wenig genauer zu erläutern, müssen wir noch erklären, was wir überhaupt unter einem *verallgemeinerten* Hamiltonschen System auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit (X, ω) verstehen wollen. Hierzu wählt man eine Funktion $H \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ und dazu das eindeutig unter dem durch ω vermittelten Isomorphismus $T_X^* \rightarrow T_X$ dem Differential dH zugeordnete Vektorfeld v_H (in der Standard–Literatur meist X_H genannt), also den *symplektischen Gradienten* von H . Man nennt dann v_H ein *Hamiltonsches Vektorfeld* zur Energie H und (X, ω, v_H) ein (verallgemeinertes) Hamiltonsches System.

Bemerkung. In lokalen kanonischen Koordinaten $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ ist $\omega = \sum dq^j \wedge dp_j$, und wegen

$$dH = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial q^j} dq^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right\}$$

schreibt sich v_H in der Form

$$v_H = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right\}.$$

Man sieht sofort: eine Kurve $\gamma = \gamma(t) : I \rightarrow X$ ist genau dann *Integralkurve* von v_H , d. h. $(D\gamma)(t) = v_H(\gamma(t))$, wenn die Hamiltonschen Gleichungen in ihrer klassischen Form erfüllt sind:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j, \quad \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j.$$

Selbstverständlich folgt hieraus, daß H eine Bewegungsinvariante ist. Ein Vektorfeld v auf X liefert nun immer durch Integration eine 1–parametrische Schar Φ von Diffeomorphismen, den sogenannten *Fluß*, den man (zumindest lokal) auch als Operation der Liegruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf X auffassen kann.

Kommen wir nun noch einmal zu dem Satz von Jacobi und Liouville zurück. Die Funktionen F_1, \dots, F_d liefern sogar 1–parametrische Scharen von Symplektormorphismen. Nun ist die Poisson–Klammer per definitionem

$$\{F, G\} = \omega(v_F, v_G);$$

in kanonischen Koordinaten also

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial F}{\partial q^j} \frac{\partial G}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial G}{\partial q^j} \right\}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\{F, G\} = L_{v_G} F = dF(v_G).$$

Außerdem berechnet man leicht

$$v_{\{F, G\}} = -[v_F, v_G].$$

Die Voraussetzung des Satzes von Jacobi und Liouville impliziert also die Vertauschbarkeit der Hamiltonschen Vektorfelder $v_j := v_{F_j}$ und damit

$$[v_j, v_k] = -v_{\{F_j, F_k\}} = 0.$$

Dann vertauschen auch die zugehörigen Flüsse Φ_j , und hieraus resultiert eine (lokale) symplektische Operation von $(\mathbb{R}^{2d}, +)$ auf X . Die Jacobi–Liouville–Reduktion ist dann nichts anderes als die Marsden–Weinstein–Reduktion zu dieser Operation.

Anhang 2: Pseudometriken

Das Ziel dieses kurzen Anhangs ist es, einen Beweis des folgenden Satzes, der weiter oben im Text schon erwähnt wurde, nachzuliefern. Die benötigten Aussagen aus der Theorie der quadratischen Formen zitieren wir nach Kapitel VII aus F. LORENZ: *Lineare Algebra II*. 2. überarbeitete Auflage, Mannheim–Wien Zürich: BI Wissenschaftsverlag 1989. Den Sylvesterschen Trägheitssatz, der überhaupt erst garantiert, daß der (Trägheits–) Index einer symmetrischen Bilinearform wohldefiniert ist, findet man dort auf p. 63.

Satz 10.28 *Der Index einer nicht ausgearteten symmetrischen Bilinearform h auf einem differenzierbaren Vektorraumbündel $E \rightarrow X$ ist lokal konstant.*

Offensichtlich folgt dieser Satz, wenn man das folgende Resultat auf die h beschreibende Matrix H bzgl. einer lokalen Trivialisierung von E in einer Umgebung des fest gewählten Punktes x_0 anwendet und ohne Einschränkung voraussetzt, daß H an der Stelle x_0 die Diagonalgestalt $\text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ mit p negativen Eigenwerten -1 besitzt.

Satz 10.29 *Es sei h eine symmetrische Bilinearform auf dem r -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum V , und $H = (h_{jk})$ sei die beschreibende Matrix von h bzgl. einer beliebigen Basis von V . Definiert man*

$$d_k := \det \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{k1} & \cdots & h_{kk} \end{pmatrix}$$

und setzt man $d_k \neq 0, k = 1, \dots, r$, voraus, so ist der Trägheitsindex von h gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel der Folge $1, d_1, \dots, d_r$.

Zum *Beweis* siehe loc.cit., p. 72.

Eine unmittelbare Konsequenz aus diesem Satz ist das von mir als *HURWITZ-Kriterium* bezeichnete Resultat, das nach Falko Lorenz auch SYLVESTER und KRONECKER zugeschrieben wird, vermutlich aber auf JACOBI zurückgeht. Historisch und didaktisch gesehen hat es seinen richtigen Platz natürlich vor Satz 29.

Folgerung 10.30 *Sind unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes alle d_k positiv, so ist h positiv definit.*

Bemerkung. Da die Determinante einer positiv definiten symmetrischen Form positiv ist und sich die Positiv-Definitheit auf Einschränkungen auf Unterräume vererbt, ist das Hurwitz-Kriterium auch notwendig.

Man kann übrigens Satz 28 auch leicht nur unter Verwendung der Folgerung 30 ableiten. Es ergibt sich hieraus sofort, daß es zu jedem Punkt x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 Unterräume $E_x^\pm \subset E_x$ der Dimension $r - p$ bzw. p gibt, s. d. die Einschränkung $h_x^\pm := h|_{E_x^\pm}$ positiv bzw. negativ definit ist. Es genügt dann zu zeigen (der Beweis, wobei der Fall der Positiv-Definitheit auf den negativ definiten Fall durch Übergang von h zu $-h$ zurückgeführt werden kann und umgekehrt, sei dem Leser überlassen):

Lemma 10.31 *Es sei h eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V , und h sei auf dem Unterraum $W \subset V$ von der Dimension p negativ definit bzw. positiv definit. Dann ist der Index von h größer oder gleich p bzw. $\geq r - p$.*

11 Zusammenhänge auf Vektorraumbündeln und Parallelismus

Für eine n -dimensionale Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{E}^N$ haben wir im vergangenen Semester jedem (lokalen) Vektorfeld v auf X die *kovariante Ableitung* entlang eines fest vorgegebenen Vektorfeldes w zugeordnet und mit $\nabla_w v$ bezeichnet. Schreibt man in einer lokalen Parametrisierung $\varphi : V \rightarrow U \subset X \subset \mathbb{E}^N$

$$w = \sum_j^n w^j(x) \varphi_{,j}(x), \quad v = \sum_k^n v^k(x) \varphi_{,k}(x)$$

mit $x \in V \subset \mathbb{R}^n$, so ist

$$\nabla_w v = \sum_{j,\ell} \left(\sum_k \Gamma_{jk}^\ell v^k + v_{,j}^\ell \right) w^j \varphi_{,\ell}$$

mit den *Christoffel-Symbolen* Γ_{jk}^ℓ , die nur von der *inneren Geometrie* der euklidischen Mannigfaltigkeit X abhängen, also von den Koeffizienten des metrischen Tensors von X und deren Ableitungen. Wie immer bezeichnet ein unterer Index der Form „ j “ die partielle Ableitung einer Funktion in x nach der Variablen x^j . Es ist somit insbesondere $\nabla_w v$ wieder ein Vektorfeld auf X .

Man kann diese Formel sogar dann anwenden, wenn das Vektorfeld v nur *längs einer Kurve* $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ erklärt ist und man für w das ebenfalls nur längs γ definierte *Tangentenfeld* $\dot{\gamma}$ von γ einsetzt. In diesem Falle schreibt man auch

$$\frac{D_{\dot{\gamma}} v}{dt} \quad \text{anstelle von} \quad \nabla_{\dot{\gamma}} v.$$

Das Vektorfeld v heißt *längs γ parallel*, wenn

$$\frac{D_{\dot{\gamma}} v}{dt} = 0.$$

Da dieses System von gewöhnlichen Differentialgleichungen genau eine Lösung bei festem „Anfangsvektor“ besitzt, kann man auch vom *Paralleltransport* eines Vektors $v \in T_{X,\gamma(0)}$ entlang der Kurve γ sprechen. Die hierdurch induzierte Abbildung $T_{X,\gamma(0)} \rightarrow T_{X,\gamma(1)}$ ist tatsächlich ein (durch γ bestimmter) linearer Isomorphismus, der das euklidische Skalarprodukt auf den Tangentialräumen respektiert, also eine *orthogonale* Abbildung. Damit kann man Tangentialvektoren in beiden Tangentialräumen (in Abhängigkeit von γ) miteinander vergleichen; dieses Phänomen wird mit dem Schlagwort *Parallelismus* beschrieben. Geodätische sind solche Kurven, deren Tangentialvektorenfeld entlang der Kurve parallel ist. Schließlich läßt sich das Phänomen der *Krümmung* an einer Stelle x_0 durch Paralleltransport längs in x_0 startender und endender „loops“ beschreiben.

Wir wollen diese kurze Skizze dazu benutzen, um in einem völlig abstrakten Rahmen entsprechende Begriffsbildungen einzuführen. Dazu rufen wir uns die folgenden Regeln für die kovarianten Ableitungen ins Gedächtnis, die man auch aus der obigen Formel ohne Mühe ableiten kann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_w(v_1 + v_2) = \nabla_w v_1 + \nabla_w v_2, \\ \nabla_w(fv) = f \nabla_w v + w(f)v, \\ \nabla_{f_1 w_1 + f_2 w_2} v = f_1 \nabla_{w_1} v + f_2 \nabla_{w_2} v. \end{array} \right.$$

Hierbei bedeuten v, w etc. Vektorfelder auf X und f etc. differenzierbare Funktionen.

Betrachte jetzt die hierdurch erzeugte Abbildung

$$\Gamma(X, T_X) \ni v \longmapsto [\Gamma(X, T_X) \ni w \longmapsto \nabla_w v \in \Gamma(X, T_X)].$$

In der eckigen Klammer steht eine $\mathcal{C}^\infty(X)$ -lineare Abbildung, also ein Element in $\Gamma(X, \text{Hom}(T_X, T_X)) = \Gamma(X, T_X^* \otimes T_X)$. Insgesamt liefert eine solche kovariante Ableitung eine (nur \mathbb{R} -lineare!) Abbildung

$$D : \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \Gamma(X, T_X^* \otimes T_X)$$

von dem Vektorraum der *Vektorfelder* in den Vektorraum der $(1, 1)$ -Tensoren mit der folgenden Verallgemeinerung der *Leibniz-Regel*:

$$D(fv) = fDv + df \otimes v, \quad f \in C^\infty(X), \quad v \in \Gamma(X, T_X).$$

Diese Begriffsbildung können wir jetzt sofort auf einen allgemeineren Kontext übertragen, wobei wir das Tangentialbündel T_X durch ein beliebiges Vektorraumbündel E ersetzen.

Definition. Es sei E ein Vektorraumbündel auf der Mannigfaltigkeit X . Ein *Zusammenhang* auf E ist eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$$D : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, T_X^* \otimes E)$$

mit

$$D(fe) = fDe + df \otimes e, \quad f \in C^\infty(X), \quad e \in \Gamma(X, E).$$

Man nennt $\Gamma(X, T_X^* \otimes E)$ auch den Raum der E -wertigen 1-Formen auf X .

Satz 11.1 Die Definition eines Zusammenhangs ist lokal, d. h. verschwindet ein Schnitt e von E in einer offenen Menge $U \subset X$, so auch De . Ist \mathfrak{U} eine offene Überdeckung von X , und sind Zusammenhänge auf den Mengen $U_j \in \mathfrak{U}$ definiert, die auf den Durchschnitten $U_j \cap U_k$ „übereinstimmen“, so wird dadurch eindeutig ein Zusammenhang auf X bestimmt.

Beweis. Wie im Beweis für das Differential d (siehe den ersten Teil des Beweises von Satz 9.19). \square

Beispiel. Ist E ein triviales Bündel, so ist die äußere Differentiation d (angewendet auf die „Komponenten“ eines Schnittes) ein Zusammenhang auf E .

Definition und Bemerkung. Ist E ein beliebiges Bündel und D ein Zusammenhang auf E , so kann man für $e \in \Gamma(X, E)$ den Schnitt $D(e)$ auch auffassen als eine lineare Abbildung

$$D(e) : \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \Gamma(X, E).$$

Für $w \in \Gamma(X, T_X)$ schreibt man dann

$$\nabla_w e := \nabla_w^D e = D(e)(w) \in \Gamma(X, E)$$

und nennt diesen Ausdruck die *kovariante Ableitung* von e nach w (bzgl. des Zusammenhangs D). Umgekehrt gewinnt man aus einer solchen kovarianten Ableitung (mit den gleichen Axiomen wie im klassischen Fall) auch wieder den Zusammenhang zurück. Kovariante Ableitungen und Zusammenhänge sind also nur zwei verschiedene Aspekte ein und desselben Sachverhalts.

Definition. Ein *Zusammenhang* auf der Mannigfaltigkeit X ist per definitionem ein Zusammenhang auf dem Tangentialbündel T_X . Dazu gehört immer der Begriff einer *kovarianten Ableitung* von Vektorfeldern entlang von Vektorfeldern.

Beispiel. Offensichtlich hat man auf dem euklidischen Raum \mathbb{E}^N einen kanonischen Zusammenhang, nämlich d , und jede Hyperfläche, sogar jede Untermannigfaltigkeit $X \subset \mathbb{E}^N$ „erbt“ einen Zusammenhang vermöge der induzierten Riemannschen Struktur.

Man kann sich leicht anhand lokaler Darstellungen von Zusammenhängen (siehe anschließend) und ihrem Transformationsverhalten klar machen, daß Zusammenhänge keine Tensoren sind. Allerdings ist die Differenz von zwei Zusammenhängen auf X stets ein $(2, 1)$ -Tensor, und die Addition eines solchen Tensors zu einem Zusammenhang liefert wieder einen Zusammenhang. Mit anderen Worten:

Satz 11.2 Der Raum aller Zusammenhänge auf einer Mannigfaltigkeit X ist ein (im Allgemeinen unendlichdimensionaler) affiner Raum mit dem Raum aller $(2, 1)$ -Tensoren auf X als unterliegendem Vektorraum.

Damit erhebt sich die entscheidende Frage: gibt es überhaupt einen und evtl. sogar einen kanonischen Zusammenhang auf einer vorgegebenen Mannigfaltigkeit? Wir werden diese Frage im nächsten Kapitel für Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeiten beantworten.

Kommen wir aber erst einmal zu unserem Lieblingsspielchen. Gegeben der Zusammenhang D auf E , kann ich daraus auch einen Zusammenhang auf E^* zusammenbasteln? Und wie steht es mit Zusammenhängen auf der direkten Summe und dem Tensorprodukt von zwei Vektorraumbündeln?

Die Antwort für die direkte Summe $E_1 \oplus E_2$ ist sehr einfach: man braucht die beiden gegebenen Zusammenhänge D_1 und D_2 nur zu addieren. Für das Tensorprodukt $E_1 \otimes E_2$ ist die Sache nicht wesentlich komplizierter; hier ist aber nicht das *Tensorprodukt* von D_1 und D_2 die Lösung, sondern der Ausdruck

$$D_1 \otimes \text{id}_{E_2} + \text{id}_{E_1} \otimes D_2 .$$

Bei dem dualen Bündel gehen wir wie folgt vor: um für einen Zusammenhang D auf E einen Zusammenhang D^* auf E^* angeben zu können, brauchen wir nur zu sagen, wie für einen Schnitt e^* in E^* die Abbildung

$$D(e^*) : \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \Gamma(X, E^*) .$$

aussehen soll. Nun ist aber das Element auf der rechten Seite bestimmt durch seine Werte auf Schnitten e in E , und es ist naheliegend, zu setzen:

$$(\nabla_w^{D^*} e^*)(e) := e^*(\nabla_w^D e) .$$

Bemerkung. Damit werden durch einen Zusammenhang auf E Zusammenhänge auf allen Tensorfeldern $\Gamma(X, (E^*)^{\otimes p} \otimes E^{\otimes q})$ induziert. Insbesondere liefert ein Zusammenhang auf X auch kovariante Ableitungen von beliebigen Tensorfeldern. Wir überlassen dem Leser die lokale Darstellung in Koordinaten anhand der anschließenden Überlegungen.

Wir wollen jetzt eine lokale Beschreibung von Zusammenhängen geben. Ist e_1, \dots, e_r eine lokale Basis von E , so kann man schreiben

$$D e_k = \sum_{\ell=1}^r \theta_k^\ell \otimes e_\ell, \quad \theta_k^\ell = \sum_{j=1}^r \Gamma_{jk}^\ell dx^j .$$

$\theta = \theta(D)$ ist also eine Matrix von differenzierbaren 1-Formen. Die Γ_{jk}^ℓ heißen die *CHRISTOFFEL-Symbole* des Zusammenhangs D (insbesondere im Fall $E = T_X$). Ist $e = \sum v^k e_k$ ein beliebiger Schnitt, so ergibt sich

$$(*) \quad D e = \sum_k D(v^k e_k) = \sum_\ell \left(dv^\ell + \sum_k v^k \theta_k^\ell \right) \otimes e_\ell .$$

Wir schreiben dann auch $D e = de + \theta \wedge e$, wobei wir e als Spaltenvektor ${}^t(v^1, \dots, v^r)$ von Funktionen ebenso wie $de = {}^t(dv^1, \dots, dv^r)$ als Spaltenvektor von 1-Formen auffassen und $\theta \wedge e$ interpretieren als (komponentenweise äußere) Multiplikation der Matrix θ von 1-Formen mit dem Spaltenvektor e (wobei für eine 1-Form ω und eine Funktion f das Symbol $\omega \wedge f$ nichts anderes als $f\omega$ bedeutet). Wir schreiben daher auch kurz $D = d + \theta$ und sehen die Matrix θ als Ausdruck der *Abweichung* von D und d an.

Wendet man die Formel (*) auf ein Vektorfeld $w = \sum_j w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ an, so gewinnt man unmittelbar eine lokale Beschreibung der kovarianten Ableitung von $e = \sum v^k e_k$ nach w , die in völliger Übereinstimmung mit der anfangs des Kapitels angegebenen Formel ist:

$$(**) \quad \nabla_w e = \sum_{j,\ell} \left(\sum_k \Gamma_{jk}^\ell v^k + v_{,j}^\ell \right) w^j e_\ell .$$

In noch etwas gedrängterer Form läßt sich dies auch schreiben als

$$\nabla_w e = \sum_{\ell} \left(\sum_{j,k} \Gamma_{jk}^{\ell} w^j v^k + w(v^{\ell}) \right) e_{\ell} .$$

Diese Formel kann dahingehend interpretiert werden, daß sich die Christoffel-Symbole bei Koordinatentransformationen auf X und E „richtig“ verhalten in dem Sinne, daß der Ausdruck auf der rechten Seite wieder ein Schnitt in E wird.

Als nächstes verallgemeinern wir den Begriff des *Paralleltransports* von Vektoren entlang einer Kurve auf unsere neue Situation.

Definition und Bemerkung. Es sei $\pi : E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel. Ein (differenzierbares) *Vektorfeld* in E entlang der Kurve $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ ist eine differenzierbare Abbildung $v : I \rightarrow E$ mit $\pi \circ v = \gamma$. Ein solches Vektorfeld ordnet also jedem „Zeitpunkt“ $t \in I$ einen Vektor $v(t) \in E_{\gamma(t)}$ zu. Unter dieser Voraussetzung kann man sich leicht davon überzeugen, daß durch

$$\nabla_{\dot{\gamma}} v(t) := \left(\gamma(t), \sum_{j,\ell} \left(\sum_k \Gamma_{jk}^{\ell}(\gamma(t)) v^k(t) + v_{;j}^{\ell}(\gamma(t)) \right) \dot{\gamma}^j(t) e_{\ell} \right)$$

unabhängig von der speziellen Auswahl der Koordinaten ein neues Vektorfeld entlang γ definiert wird, das man die *kovariante Ableitung* von v entlang γ nennt. Man verwendet hierfür auch das Symbol

$$\frac{D_{\dot{\gamma}} v(t)}{dt} := \nabla_{\dot{\gamma}} v(t) .$$

Das Vektorfeld v heißt *parallel* entlang γ , falls

$$\frac{D_{\dot{\gamma}} v(t)}{dt} := 0 .$$

Dies ist in lokalen Karten wegen der Kettenregel gleichwertig zu

$$\dot{v}^{\ell} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^{\ell} \dot{\gamma}^j v^k = 0, \quad \ell = 1, \dots, r .$$

Die Bedingung der Parallelität wird also, zumindest in lokalen Karten, durch ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen ausgedrückt, für die man eindeutige Lösbarkeit bei vorgegebenen Anfangsbedingungen hat. Somit gibt es zu jedem Vektor $v_0 \in E_{x_0}$ und jeder Kurve γ mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x_1 ein eindeutig bestimmtes paralleles Vektorfeld v entlang γ mit $v(0) = v_0$. Man sagt dann auch, der Vektor $v_1 := v(1) \in E_{x_1}$ sei aus v_0 durch *Paralleltransport entlang γ* hervorgegangen.

Man sieht unmittelbar wie im klassischen Fall:

Satz 11.3 *Ein Zusammenhang auf E induziert vermöge Paralleltransport für jede Kurve $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$ einen linearen Isomorphismus*

$$E_{\gamma(0)} \xrightarrow{\sim} E_{\gamma(1)} .$$

Beim Vorhandensein eines Zusammenhangs auf X können wir nun auch den Begriff der *geodätischen Kurven* einführen.

Definition. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow X$ heißt *geodätisch*, wenn $\dot{\gamma}$ *parallel* entlang γ ist:

$$\ddot{\gamma}^{\ell} + \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^{\ell} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0, \quad \ell = 1, \dots, n .$$

Im nachfolgenden Kapitel benötigen wir noch einen weiteren Begriff.

Definition. Für einen Zusammenhang D auf der Mannigfaltigkeit X heißt die Abbildung

$$(v, w) \mapsto \nabla_v w - \nabla_w v - [v, w], \quad v, w \in \Gamma(X, T_X),$$

die *Torsion* von D . Ist die Torsion die Nullabbildung, so heißt D auch *torsionsfrei*.

Bemerkung und Definition. In einer Koordinatenumgebung ist für einen torsionsfreien Zusammenhang notwendigerweise (wir setzen $\nabla_j v$ für die kovariante Ableitung des Vektorfeldes v nach dem Vektorfeld ∂_j):

$$\nabla_j \partial_k - \nabla_k \partial_j = [\partial_j, \partial_k] = 0, \quad j \neq k.$$

Torsionsfreiheit impliziert damit die *Symmetrie-Aussage* $\Gamma_{kj}^\ell = \Gamma_{jk}^\ell$ (und ist, wie nicht schwer zu beweisen ist, sogar äquivalent zu ihr). Aus diesem Grunde spricht man auch von einem *symmetrischen* Zusammenhang. Man kann übrigens genauso leicht einsehen (siehe Laugwitz [26], Satz III.9.1), daß die Symmetrie gleichwertig ist zu der Tatsache, daß sich *die kovarianten Ableitungen in jedem festen Punkt x_0 auf die partiellen Ableitungen „reduzieren“ lassen*; mit anderen Worten:

Satz 11.4 *Ein Zusammenhang ist genau dann symmetrisch, wenn es zu jedem Punkt $x_0 \in X$ eine Koordinatentransformation in einer Umgebung von x_0 gibt, so daß alle Christoffel-Symbole an der Stelle x_0 verschwinden.*

Definition. Ein Koordinatensystem um x_0 mit der in dem vorigen Satz zum Ausdruck gebrachten Eigenschaft heißt auch *in x_0 geodätisch*. Im affinen Raum \mathbb{E}^n ist jedes lineare Koordinatensystem in jedem Punkt geodätisch. Man nennt symmetrische Zusammenhänge daher manchmal auch *affin*.

12 Der Levi - Cività Zusammenhang und der Riemannsche Krümmungstensor

Es sei in diesem Kapitel X stets eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit nichtausgearteter symmetrischer Bilinearform

$$g(v, w) =: \langle v, w \rangle .$$

Definition Ein Zusammenhang D auf X heißt mit der Pseudo-Metrik g *verträglich*, wenn für je zwei Vektorfelder v, w , die entlang einer Kurve γ parallel sind, gilt:

$$g(v, w) \equiv \text{const.}$$

Satz 12.1 *Ein Zusammenhang D ist genau dann mit g verträglich, wenn für je zwei Vektorfelder v, w entlang der Kurve γ gilt:*

$$(*) \quad \frac{d}{dt} g(v, w) = g\left(\frac{Dv}{dt}, w\right) + g\left(v, \frac{Dw}{dt}\right), \quad t \in I .$$

Beweis. Eine Richtung ist klar: Die Bedingung (*) impliziert Verträglichkeit. Sei umgekehrt D mit g verträglich. Wähle in T_{X, x_0} ein Orthonormalsystem v_1^0, \dots, v_n^0 bzgl. g , d. h. $\langle v_j^0, v_k^0 \rangle = \pm \delta_{jk}$, und setze jeden Vektor v_j^0 zu einem parallelen Vektorfeld v_j entlang γ mit $\gamma(0) = x_0$ fort. Nach Voraussetzung ist $(v_1(t), \dots, v_n(t))$ ein g -Orthonormalsystem für alle $t \in I$. Somit ergibt sich mit

$$v(t) = \sum_{j=1}^n f^j v_j(t), \quad w(t) = \sum_{j=1}^n g^j v_j(t)$$

sofort

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{df^j}{dt} v_j + f^j \frac{Dv_j}{dt} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{df^j}{dt} v_j \quad \text{und} \quad \frac{Dw}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dg^j}{dt} v_j ,$$

also

$$\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle = \sum_{j=1}^n \pm \left(\frac{df^j}{dt} g^j + f^j \frac{dg^j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \pm f^j g^j = \frac{d}{dt} \langle v, w \rangle . \quad \square$$

Korollar 12.2 *Der affine Zusammenhang D auf X ist genau dann mit g verträglich, wenn*

$$(**) \quad u(\langle v, w \rangle) = \langle \nabla_u v, w \rangle + \langle v, \nabla_u w \rangle, \quad u, v, w \in \Gamma(X, T_X) .$$

Beweis. Es sei D verträglich mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sei $x_0 \in X$ ein Punkt und $\gamma : I = [0, \varepsilon] \rightarrow X$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x_0$ und $d\gamma/dt|_{t=0} = u(x_0)$. Dann gilt

$$u(\langle v, w \rangle)(x_0) = \left. \frac{d}{dt} \langle v \circ \gamma, w \circ \gamma \rangle \right|_{t=0} = \langle \nabla_u v, w \rangle(x_0) + \langle v, \nabla_u w \rangle(x_0) .$$

Da x_0 beliebig ist, folgt die Behauptung. Die Umkehrung ist offensichtlich. □

Satz 12.3 *Es sei (X, g) eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau einen affinen Zusammenhang D auf X , der symmetrisch und mit g verträglich ist.*

Definition und Bemerkung. Dieser Zusammenhang heißt der *Levi-Cività-Zusammenhang* von (X, g) . Der Existenzbeweis stammt von LEVI - CIVITÀ (im Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit).

Beweis (des Satzes). Wir nehmen zunächst an, daß ein solcher Zusammenhang D existiert. Dann gilt

$$u(\langle v, w \rangle) = \langle \nabla_u v, w \rangle + \langle v, \nabla_u w \rangle$$

und entsprechend nach zyklischer Vertauschung wegen der g -Verträglichkeit. Nutzt man jetzt noch die Symmetrie aus, so folgt

$$u(\langle v, w \rangle) + v(\langle w, u \rangle) - w(\langle u, v \rangle) = -\langle [u, w], v \rangle + \langle [v, w], u \rangle + \langle [u, v], w \rangle + 2\langle w, \nabla_v u \rangle.$$

Also ist notwendig

$$\langle w, \nabla_v u \rangle = \frac{1}{2} \left\{ u(\langle v, w \rangle) + v(\langle w, u \rangle) - w(\langle u, v \rangle) + \langle [u, w], v \rangle - \langle [v, w], u \rangle - \langle [u, v], w \rangle \right\}.$$

Damit ist $\nabla_v u$ eindeutig bestimmt. Man rechnet leicht nach, daß durch diese Formel ein Zusammenhang definiert wird, der alle Bedingungen erfüllt. \square

Bemerkung. Sind Γ_{jk}^ℓ die Christoffel-Symbole dieses Zusammenhangs, dann ist die definierende Gleichung äquivalent zu

$$\sum_{\ell} \Gamma_{jk}^\ell g_{\ell m} = \frac{1}{2} \{g_{km;j} + g_{mj;k} - g_{jk;m}\} =: \Gamma_{km|j}$$

mit dem Koeffizienten $g_{\ell m}$ des Tensors g und den partiellen Ableitungen $g_{jk;m} := \partial g_{jk} / \partial x_m$. Dies zeigt, daß sich alles nahtlos an den klassischen Fall anfügt. Mit der inversen Matrix $(g^{\ell m})$ ist natürlich auch wie dort

$$\Gamma_{jk}^\ell = \sum_m \Gamma_{km|j} g^{m\ell}.$$

Bemerkung. Bei Vorhandensein eines Zusammenhangs auf der pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit (X, g) sind *Geodätische* selbstverständlich nur als *geradeste* Kurven zu interpretieren. Wählt man im Falle einer *Riemannschen Metrik* aber den Levi-Cività-Zusammenhang, so sind die Geodätischen auch (zumindest lokal) die *kürzesten* Kurven (mit allen Vorsichtsmaßregeln, die wir schon für Flächen im euklidischen Raum formuliert haben).

Die Idee einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und ihrer *Krümmung* wurde von RIEMANN in seinem Habilitationsvortrag im Beisein seines Lehrers C. F. GAUSS im Jahre 1854 in Göttingen skizziert. Er betrachtet alle Ebenen E in T_{X, x_0} , also alle 2-dimensionalen linearen Unterräume $E \subset T_{X, x_0}$, und alle Geodätischen in X , die in x_0 beginnen und in x_0 Tangentialvektoren in E besitzen. In Normalkoordinaten $\exp: V \rightarrow U$, $V = V(0) \subset T_{X, x_0}$, $U = U(x_0) \subset X$, liefert dies (lokal um x_0) eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit

$$S = S_E \subset X,$$

die vermittelt der Riemannschen Metrik auf X eine ebensolche Metrik erbt. Nach Gauß besitzt aber S eine nur von der induzierten Metrik abhängige (Gaußsche) Krümmung K , s. d. man eine Funktion

$$K(x_0, E), \quad x_0 \in X, \quad E \subset T_{X, x_0} \quad 2\text{-dimensional},$$

erhält, die sogenannte *Schnitt-Krümmung* (im Englischen: *sectional curvature*).¹⁴ Mehr über Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung findet man im ersten Anhang zu diesem Kapitel.

Wir gehen nun gleich *medias in res* und führen den *Riemannschen Krümmungstensor* bzgl. eines Zusammenhangs D ein. Dieser ist wesentlich allgemeiner als der ursprüngliche *Krümmungs*-Begriff von Riemann, wie wir alsbald sehen werden. Es sei dazu $E \rightarrow X$ ein Vektorraumbündel mit dem Zusammenhang $D = d + \theta$. Wir werden zeigen, daß wir diesem in kanonischer Weise einen Schnitt

$$\Theta_E(D) \in \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^* \otimes \text{Hom}(E, E))$$

¹⁴Nach DO CARMO [16] enthält Riemanns Veröffentlichung nur eine einzige Formel (nämlich für den Fall, daß $K(x_0, E)$ konstant ist), und dazu noch ohne Beweis! Man beachte aber, wie jung Riemann zu diesem Zeitpunkt war (nicht zu vergessen, wie jung er gestorben ist!), und daß der Apparat des Tensorkalküls noch Jahrzehnte bis zu seiner völligen Entwicklung benötigte. Solche Formeln wurden erst 1869 von Christoffel angegeben. (Riemann, B.: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Gesammelte Werke, 2nd etc., Leipzig 1892; Christoffel, E. B.: Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. J. Reine Mathematik 70, 46–70 (1869)).

zuordnen können, also eine bilineare, alternierende Abbildung

$$\Gamma(X, T_X) \times \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^\infty(X)}(\Gamma(X, E), \Gamma(X, E)).$$

Oder auch (besser): $\Theta_E(D)$ ist eine Abbildung

$$\Theta_E(D) : \Gamma(X, E) \longrightarrow \Gamma(X, \Lambda^2 T_X^* \otimes E).$$

Als solche ist $\Theta_E(D) = D \circ D$, wenn man D (wie das äußere Differential d) zu Abbildungen

$$\Gamma(X, \Lambda^p T_X^* \otimes E) \longrightarrow \Gamma(X, \Lambda^{p+1} T_X^* \otimes E)$$

fortsetzt. Ohne in die Einzelheiten zu gehen, geben wir $\Theta = \Theta_E(D)$ einfach in lokalen Karten an: Ist dort $D = d + \theta$, so setzt man

$$\Theta := d\theta + \theta \wedge \theta.$$

θ ist eine $r \times r$ -Matrix von differenzierbaren 1-Formen, so daß $d\theta$ und $\theta \wedge \theta$ (mit der offensichtlichen äußeren Multiplikation von Matrizen) $r \times r$ -Matrizen von 2-Formen sind, also (lokal) Schnitte in $\Lambda^2 T_X^* \otimes \text{Hom}(E, E)$. - Man beweist leicht:

Lemma 12.4 Sind Θ und Θ' bzgl. der Basen (e_1, \dots, e_r) bzw. (e'_1, \dots, e'_r) definiert, und ist A der entsprechende Basiswechsel, so gilt

$$\Theta' = A^{-1} \Theta A.$$

Insbesondere ist Θ ein globaler Schnitt in $\Lambda^2 T_X^* \otimes \text{Hom}(E, E)$.

Definition. $\Theta = \Theta_E(D)$ heißt die *Krümmungsform* von E zum Zusammenhang D . Im Falle $E = T_X$ spricht man auch von dem RIEMANNschen *Krümmungstensor* R zu D . Ist auf X eine Pseudo-Riemannsche Struktur vorgegeben, so betrachtet man i. a. ausschließlich den Levi-Cività-Zusammenhang und den zugehörigen Krümmungstensor R , den man dann *den* Krümmungstensor von X nennt.

Lemma 12.5 Es gilt $d\Theta = [\Theta, \theta]$.

Beweis. Mit $d\Theta = d(d\theta + \theta \wedge \theta) = d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta$ ist

$$[\Theta, \theta] = [d\theta + \theta \wedge \theta, \theta] = d\theta \wedge \theta + \theta \wedge \theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta - \theta \wedge \theta \wedge \theta = d\Theta. \quad \square$$

Bemerkung. Im Falle $E = T_X$ können wir $\Theta(D) := \Theta_{T_X}(D)$ (unter Verlust von einigen Informationen) als Schnitt in

$$(T_1^3)_X = T_X^* \otimes T_X^* \otimes T_X^* \otimes T_X,$$

also als einen 3-fach kovarianten und 1-fach kontravarianten Tensor auffassen.

Es ist nicht schwer, den Krümmungstensor R bzgl. eines Zusammenhangs D auf der Mannigfaltigkeit X explizit auszurechnen. Er ergibt sich in der Interpretation als lineare Abbildung

$$R(u, v) : \Gamma(X, T_X) \longrightarrow \Gamma(X, T_X)$$

als

$$(+)$$

$$R(u, v)w = \nabla_v \nabla_u w - \nabla_u \nabla_v w + \nabla_{[u, v]} w, \quad u, v, w \in \Gamma(X, T_X).$$

Tatsächlich ist diese Zuordnung bilinear in u und v (und alternierend!) und bei festem u und v linear in w (dazu benötigt man gerade den Term $\nabla_{[u, v]} w$). Man kann (+) natürlich auch als Definition nehmen und alle Eigenschaften direkt nachrechnen.

Wegen (+) ergibt sich z. B. auf \mathbb{R}^n sofort wegen $\nabla_u w = u(w)$, daß

$$R(u, v)w = (v \circ u)(w) - (u \circ v)(w) + [u, v](w) = 0.$$

Der Krümmungstensor ist also ein Maß dafür, wie stark X davon abweicht, euklidisch zu sein. Dies wird noch deutlicher, wenn man in einer lokalen Karte einer beliebigen Mannigfaltigkeit X mit den Vektorfeldern ∂_j , $j = 1, \dots, n$, arbeitet. Dann ist $[\partial_j, \partial_k] = 0$ und damit

$$R(\partial_j, \partial_k) \partial_\ell = (\nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j}) \partial_\ell,$$

also ein Maß für die Nichtkommutativität der kovarianten Ableitungen.

Wir wollen den Krümmungstensor allgemein in Koordinaten ausrechnen, setzen also

$$R(\partial_j, \partial_k) \partial_\ell = \sum R_{j k \ell}^m \partial_m,$$

s. d.

$$R(u, v) w = \sum R_{j k \ell}^m u^j v^k w^\ell \partial_m,$$

wenn $u = \sum u^j \partial_j$, $v = \sum v^k \partial_k$ und $w = \sum w^\ell \partial_\ell$. Es ist

$$R(\partial_j, \partial_k) \partial_\ell = (\nabla_j \nabla_k - \nabla_k \nabla_j) \partial_\ell = \nabla_j \left(\sum_m \Gamma_{k \ell}^m \partial_m \right) - \nabla_k \left(\sum_m \Gamma_{j \ell}^m \partial_m \right),$$

also nach einfacher Rechnung:

$$R_{j k \ell}^m = \Gamma_{k \ell; j}^m - \Gamma_{j \ell; k}^m + \sum_r (\Gamma_{k \ell}^r \Gamma_{j r}^m - \Gamma_{j \ell}^r \Gamma_{k r}^m)$$

wie im Hyperflächenfall.

Bemerkung. Wir sollten für die Koeffizienten des Krümmungstensors als $(3, 1)$ -Tensor eigentlich $R_{j k \ell}^m$ schreiben, unterlassen dies aber aus Bequemlichkeit. Manche Autoren fassen den Krümmungstensor übrigens auch als Schnitt in dem Bündel $\text{Hom}(T_X, T_X) \otimes \Lambda^2 T_X^* \subset T_X^* \otimes T_X \otimes T_X^* \otimes T_X^*$ auf und schreiben daher für seine Koeffizienten systematisch $R_{\ell}^m{}_{j k}$.

Man bemerkt sofort: $R_{k j \ell}^m = -R_{j k \ell}^m$. Dies entspricht der Tatsache, daß der Krümmungstensor R in den beiden ersten Einträgen alternierend ist. R besitzt weitere Symmetrie-Eigenschaften.

Satz 12.6 Für den Krümmungstensor R einer Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit gilt die BIANCHI-Identität:

$$R(u, v) w + R(w, u) v + R(v, w) u = 0.$$

Die Bianchi-Identität schreibt sich koeffizientenweise in der Form

$$R_{j k \ell}^m + R_{\ell j k}^m + R_{k \ell j}^m = 0.$$

Beweis. Mit Hilfe der Symmetrie des unterliegenden Zusammenhangs folgt

$$\begin{aligned} R(u, v) w + R(w, u) v + R(v, w) u &= \nabla_v \nabla_u w - \nabla_u \nabla_v w + \nabla_{[u, v]} w + \nabla_u \nabla_w v - \nabla_w \nabla_u v + \nabla_{[w, u]} v + \\ &\quad \nabla_w \nabla_v u - \nabla_v \nabla_w u + \nabla_{[v, w]} u \\ &= \nabla_v [u, w] + \nabla_u [w, v] + \nabla_w [v, u] + \nabla_{[u, v]} w + \nabla_{[w, u]} v + \nabla_{[v, w]} u \\ &= [u, [w, v]] + [v, [u, w]] + [w, [u, v]] = 0, \end{aligned}$$

was zu beweisen war. □

Weitere Symmetrien entdeckt man leichter durch Bildung des 4-fach kovarianten Tensors

$$R_{j k \ell m} = g(R(\partial_j, \partial_k) \partial_\ell, \partial_m) = \sum R_{j k \ell}^q g_{q m} = -R_{k j \ell m}.$$

Schreibt man kurz \langle, \rangle statt g und

$$\langle u, v, w, \omega \rangle := \langle R(u, v) w, \omega \rangle$$

für diesen Tensor, so hat man neben der BIANCHI-Identität

$$\langle u, v, w, \omega \rangle + \langle w, u, v, \omega \rangle + \langle v, w, u, \omega \rangle = 0,$$

d. h.

$$R_{jk\ell m} + R_{\ell jkm} + R_{k\ell jm} = 0,$$

noch die weiteren Beziehungen

$$R_{jkml} = -R_{jklm} = R_{kj\ell m} = R_{m\ell jk}.$$

Anders ausgedrückt behaupten wir also:

Satz 12.7 Für den 4-fach kovarianten Riemannschen Krümmungstensor gilt

$$\langle u, v, \omega, w \rangle = -\langle u, v, w, \omega \rangle \quad \text{und} \quad \langle w, \omega, u, v \rangle = \langle u, v, w, \omega \rangle.$$

Beweis. Wegen der Multilinearität braucht man für die erste Aussage nur $\langle u, v, w, w \rangle = 0$ zu zeigen. Hierzu benötigt man, daß der Riemannsche Zusammenhang mit g verträglich ist. Danach ist

$$\langle \nabla_v \nabla_u w, w \rangle = v(\langle \nabla_u w, w \rangle) - \langle \nabla_u w, \nabla_v w \rangle$$

und

$$\langle \nabla_{[u,v]} w, w \rangle = \frac{1}{2} [u, v](\langle w, w \rangle).$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \langle u, v, w, w \rangle &= \langle R(u, v)w, w \rangle = \langle \nabla_v \nabla_u w - \nabla_u \nabla_v w + \nabla_{[u,v]} w, w \rangle \\ &= v(\langle \nabla_u w, w \rangle) - u(\langle \nabla_v w, w \rangle) + \frac{1}{2} [u, v](\langle w, w \rangle) \\ &= -\frac{1}{2} [u, v](\langle w, w \rangle) + \frac{1}{2} [u, v](\langle w, w \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Die letzte Beziehung erhält man folgendermaßen: Man schreibt sich die Bianchi-Identität für $\langle \omega, u, w, v \rangle$ hin und die entsprechenden Formeln nach zyklischer Vertauschung der Einträge. Addiert man diese vier Gleichungen und beachtet man die Schiefsymmetrie in u, v und w, ω , so erhält man sofort

$$2\langle w, \omega, u, v \rangle + 2\langle v, u, w, \omega \rangle = 0,$$

also

$$\langle w, \omega, u, v \rangle = \langle u, v, w, \omega \rangle. \quad \square$$

Bemerkung. Es ist interessant, sich die Anzahl der nicht durch die Symmetrien festgelegten frei verfügbaren Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors klar zu machen. In den Dimensionen 2, 3, 4 sind diese Anzahlen 1, 3 und 14.

In der Differentialgeometrie und der Relativitätstheorie spielen auch der RICCI-Tensor und die skalare Krümmung eine wichtige Rolle. Sie sind Beispiele von Spurbildung und Verjüngung von Tensoren. Es sollte dem Leser nicht schwer fallen, diese Begriffe allgemein an Hand der folgenden Beispiele zu formulieren.

Es seien $u, v \in \Gamma(X, T_X)$ fest gewählte Vektorfelder. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\Gamma(X, T_X) \ni w \longmapsto R(u, w)v.$$

Diese besitzt eine Spur, die von u, v abhängig ist. Wir setzen

$$Q(u, v) = \text{Spur}_w(w \longmapsto R(u, w)v)$$

und sehen sofort, daß Q in u und v bilinear ist. Wählen wir ferner zu $u = u_1$ eine orthogonale Ergänzung u_2, \dots, u_n (in einem fest gewählten Punkt), so ist dort

$$Q(u, v) = \sum_{\ell} \langle R(u, u_{\ell})v, u_{\ell} \rangle = \sum_{\ell} \langle R(v, u_{\ell})u, u_{\ell} \rangle = Q(v, u);$$

also ist Q ein *symmetrischer* Tensor. Schreiben wir diesen lokal mit den Koeffizienten R_{jk} , so ist

$$R_{jk} = \text{Spur}_w(w \mapsto R(\partial_j, w)\partial_k),$$

und wegen

$$\partial_\ell \mapsto R(\partial_j, \partial_\ell)\partial_k = \sum R_{j\ell k}^m \partial_m$$

ist

$$R_{jk} = \sum_{\ell=1}^n R_{j\ell k}^\ell.$$

Man nennt R_{jk} auch den *Ricci-Tensor* Ric. (Manchmal wird dieser auch mit dem Faktor $1/(n-1)$ versehen).

Da der Ricci-Tensor 2-fach kovariant und symmetrisch ist, macht die folgende Definition einen Sinn.

Definition. Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (X, g) heißt eine *Einstein-Mannigfaltigkeit*, wenn

$$\text{Ric} = \lambda g$$

mit einer differenzierbaren Funktion $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$. (Zum Auftreten dieser Mannigfaltigkeiten in der Allgemeinen Relativitätstheorie siehe auch den zweiten Anhang zu diesem Kapitel und [6]).

Bemerkung. Ein bemerkenswerter Satz besagt, daß für jede zusammenhängende Einstein-Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 3$ die Funktion λ konstant ist.

Aus dem zweifach kovarianten Tensor Ric kann man auf die übliche Weise einen $(1, 1)$ -Tensor machen mit den Koeffizienten

$$R_j^k = \sum_{\ell} R_{j\ell} g^{\ell k}.$$

Bildet man hiervon erneut die Spur $K := \sum_j R_j^j$, so ist dies eine wohldefinierte *Funktion* auf X . Betrachtet man wieder an einer Stelle x_0 ein orthonormales System von Tangentialvektoren u_1, \dots, u_n , so berechnet man leicht

$$K(x_0) = \sum_{j \neq k} \langle R(u_j, u_k)u_j, u_k \rangle.$$

Es handelt sich daher um eine Mittelbildung mit $n(n-1)$ Summanden (die von der Auswahl der u_j unabhängig ist).

Definition. $R_0(x_0) := \frac{1}{n(n-1)} K(x_0)$ heißt die *skalare Krümmung* von X an der Stelle x_0 .

Bemerkung. Wir werden im zweiten Anhang zu diesem Kapitel ein wenig mehr über die skalare Krümmung im Zusammenhang mit der Einsteinschen Gravitationstheorie zu sagen haben.

Anhang 1: Riemannsche Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung

Es sei in diesem Anhang (X, g) eine *Riemannsche* Mannigfaltigkeit. Wir wollen in diesem Fall Riemanns Krümmungskonzept noch einmal (genauer) formulieren und ein wichtiges Klassifikationsproblem zumindest erläutern.

Es seien u und v zwei linear unabhängige Vektoren in T_{X, x_0} . Man setze

$$K(u, v) := \frac{\langle u, v, u, v \rangle}{|u \wedge v|^2},$$

wobei $\langle u, v, u, v \rangle = \langle R(u, v)u, v \rangle$ und $|u \wedge v| = \text{Vol}_2(P(u, v)) = (\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2)^{1/2}$. Man zeigt leicht, daß dieser Ausdruck nur von der von u und v aufgespannten Ebene E abhängt. Wir haben damit eine Größe eingeführt, die man mit

$$K(E, x_0), \quad E \subset T_{X, x_0} \text{ eine Ebene,}$$

bezeichnen kann. Sie heißt die (Riemannsche) *Schnittkrümmung* („sectional curvature“) von E im Punkte x_0 .

Lemma 12.8 *Der Krümmungstensor R ist vollständig durch K bestimmt.*

Beweis. Siehe DO CARMO [16], Chap. 4, Lemma 3. 3. □

Bemerkung. Für den Rest dieses Anhangs verweisen wir ebenfalls auf das eben zitierte Buch.

Historisch hat bei der Entwicklung der Riemannschen Geometrie das Problem eine Rolle gespielt, die Mannigfaltigkeiten („Räume“) mit konstanter Schnittkrümmung zu klassifizieren.

Satz 12.9 *Es ist an der Stelle $x_0 \in X$ genau dann*

$$K(E, x_0) = K_0 \quad \text{für alle Ebenen } E \subset T_{X, x_0},$$

wenn dort gilt:

$$R_{jklm} = K_0 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}),$$

oder anders ausgedrückt, wenn

$$R_{jkjk} - R_{jk kj} = K_0, \quad j \neq k, \quad R_{jklm} = 0 \quad \text{sonst.}$$

Definition. Ein *Raum konstanter Krümmung* ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit

$$K(E, x_0) = K_0 \quad \text{für alle } E \subset T_{X, x_0}$$

und alle $x_0 \in X$.

Bemerkung. Multipliziert man die Metrik mit einem festen Faktor $c > 0$, so ändert sich die Schnittkrümmung um den Faktor $1/c$. Man braucht sich daher nur für die Fälle $K_0 = 1, 0, -1$ zu interessieren.

Beispiele. a) $X = \mathbb{E}^n$, der euklidische Raum; hier ist $K_0 = 0$.

b) $X = S^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ mit induzierter Metrik; hier ist $K_0 = 1$.

c) $X = H^n \subset \mathbb{E}^n$, $H^n := \{x \in \mathbb{E}^n \text{ mit } x_n > 0\}$, der obere Halbraum, mit der *hyperbolischen* Metrik

$$g_{jk} = \frac{\delta_{jk}}{x_n^2}.$$

In diesem Fall ist $K_0 = -1$; H^n heißt der *hyperbolische* Raum der Dimension n .

Was ist das besondere an diesen Räumen? Sie sind erstens *einfach zusammenhängend* und zweitens *vollständig*. Das letztere bedeutet folgendes: mit Hilfe der Riemannschen Metrik kann man Längen von Kurven auf X definieren und damit den *Abstand* zweier Punkte. Dieser liefert eine (stetige) Metrik auf X , die die ursprüngliche Topologie auf X induziert. Man kann dann auf natürliche Weise von Kugeln $B(x_0, r)$ sprechen. X heißt *vollständig*, wenn $B(x_0, r) \subset\subset X$ für alle $r > 0$ (und ein oder alle x_0).

Für den euklidischen Raum ist die Vollständigkeit klar, für S^n trivial, da S^n kompakt ist. Für H^n bestimmt man leicht die Geodätischen (sie sind enthalten in Ebenen senkrecht zu $x_n = 0$ und also zu identifizieren mit denjenigen von H^2):

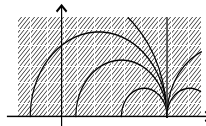


Figure 12.1

Man rechnet unmittelbar nach, daß sie in der gegebenen hyperbolischen Metrik unendlich lang sind.

Satz 12.10 \mathbb{E}^n , S^n und H^n sind (bis auf Isometrie) die einzigen einfach zusammenhängenden vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung 0, 1 bzw. -1 .

Definition. Eine *Raumform* ist ein vollständiger Raum konstanter Krümmung.

Die Klassifizierung solcher Raumformen X ist tatsächlich ein *gruppentheoretisches* Problem¹⁵. Man betrachte nämlich die universelle Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$. \tilde{X} erbt natürlich von X eine Riemannsche Metrik konstanter Krümmung, und man kann zeigen, daß auch \tilde{X} vollständig ist, also nach Satz 10 isometrisch zu \mathbb{E}^n , S^n oder H^n sein muß. - Genauer hat man den folgenden Satz.

Satz 12.11 Jede Raumform X ist der Quotient von \mathbb{E}^n , S^n oder H^n nach einer eigentlich diskontinuierlich operierenden¹⁶ Untergruppe G der Isometriegruppe von \mathbb{E}^n , S^n bzw. H^n .

Die Isometriegruppen von \mathbb{E}^n , S^n und H^n sind wohlbekannt reelle Liegruppen. Isom \mathbb{E}^n ist ein semidirektes Produkt der Translationsgruppe mit der orthogonalen Gruppe $O(n)$, Isom S^n ist die orthogonale Gruppe $O(n+1)$, und Isom H^2 , z. B., ist, wie man in der Funktionentheorie zeigt, die reelle Liegruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ von der Dimension 3.

Bemerkung. Die Klassifikation im Falle $K_0 = 0$ hängt eng mit der Klassifikation der *kristallographischen Gruppen* zusammen. Von diesen gibt es bei festem n nur endlich viele. Für $n \leq 4$ sind alle diese Gruppen klassifiziert. Ihre Anzahl wächst rapide mit n an. Beispiele im Flächenfall sind der Zylinder und der flache Torus. Für $K_0 = 1$ wird die Klassifikation von J. Wolf in seinen Büchern behandelt. (Sie wurde erst in den 1960er Jahren vollendet). Man hat z. B. den

Satz 12.12 Ist X eine Raumform gerader Dimension n mit $K_0 = 1$, so ist X isometrisch zu S^n oder $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Für den *hyperbolischen* Fall¹⁷ zitieren wir nur das klassische Ergebnis aus der Funktionentheorie:

Satz 12.13 Jede kompakte orientierbare Fläche vom Geschlecht $g > 1$ kann mit einer Metrik von konstanter negativer Krümmung versehen werden.

¹⁵siehe z. B. die Bücher von J. Wolf über *Spaces of Constant Curvature* und *Space Forms*.

¹⁶siehe hierzu Kapitel 14.

¹⁷siehe auch: J. Elstrodt, F. Grunewald, J. Mennicke: *Groups Acting on Hyperbolic Space*. Harmonic Analysis and Number Theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer: Berlin-Heidelberg-New York 1998.

Anhang 2: Bemerkungen zur Gravitationstheorie von Einstein

Die theoretische Physik faßt die durch gravitierende Massen und elektromagnetische Effekte erzeugten Felder zusammen in dem zweifach kovarianten *Energie-Impuls-Tensor* T_{jk} auf einer vierdimensionalen *Minkowskischen Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit* X . Nach EINSTEINS berühmtem Gedankenexperiment, das zu seinem *Äquivalenzprinzip* führte, sollten diese die Krümmung von X beeinflussen und umgekehrt. Als naheliegenden Ansatz hat man daher

$$(\times) \quad G_{jk} = \lambda T_{jk}$$

zu setzen, $\lambda = \text{const.}$, wobei G_{jk} ein zweifach kovarianter Tensor ist, der „linear“ von dem Riemannschen Krümmungstensor abhängt. Da der Tensor T_{jk} auch die Erhaltungssätze für Energie, Impuls etc. enthält (was der Gleichung $\nabla T = 0$ entspricht), ist auch der Tensor G_{jk} nicht völlig willkürlich. Fordert man überdies, daß für das *Vakuum*, d. h. für $T_{jk} = 0$, der Minkowski-Raum die einzige Lösung sein soll, so zeigt die Übungsaufgabe 17. 1 bei MISNER–THORNE–WHEELER [30], daß notwendig

$$(\times\times) \quad G_{jk} = R_{jk} - \frac{1}{2} R_0 g_{jk}$$

mit dem *RICCI-Tensor* R_{jk} und der *skalaren Krümmung* R_0 . Man erhält damit Gleichungen der Form

$$G_{jk} = R_{jk} - \frac{1}{2} R_0 g_{jk} = \lambda T_{jk},$$

wie sie 1915 von EINSTEIN aufgestellt wurden.¹⁸ Hierbei ist $\lambda = 8\pi\mathbf{k}/c^4$ mit der universellen *Gravitationskonstanten* \mathbf{k} und der Lichtgeschwindigkeit c .

Genauer besagt die oben zitierte Übungsaufgabe:

Satz 12.14 *Der allgemeine 2-fach kovariante symmetrische Tensor, den man aus dem pseudometrischen Tensor g und dem Riemannschen Krümmungstensor R konstruieren kann und der linear in R ist, ist von der Gestalt*

$$a R_{jk} + b R_0 g_{jk} + \Lambda g_{jk}$$

mit Konstanten a, b, Λ . Dieser Tensor hat verschwindende Divergenz genau dann, wenn $b = -(1/2)a$, und ist Null im Minkowski-Raum genau dann, wenn $\Lambda = 0$.

Die Einsteinschen Feldgleichungen werden besonders einfach, wenn man zu 1-fach kovarianten und 1-fach kontravarianten Tensoren übergeht. Sie lauten dann

$$R_j^k - \frac{1}{2} \delta_{jk} R_0 = \lambda T_j^k,$$

und durch Verjüngung gewinnt man hieraus (man beachte $n = 4$): $-R_0 = \lambda T_0$ mit $T_0 = \sum T_j^j$. In die ursprünglichen Gleichungen eingesetzt liefert dies:

$$R_{jk} = \lambda \left(T_{jk} - \frac{1}{2} g_{jk} T_0 \right).$$

Somit ist für das Vakuum wegen $T_{jk} = 0$ auch $T_0 = 0$ und damit $R_{jk} = 0$: Das Vakuum ist also notwendig *Ricci-flach* (aber nicht unbedingt flach, denn dies würde tatsächlich $R_{jkl}^m = 0$ bedeuten). Interessante Beispiele von Ricci-flachen, rotationssymmetrischen Raum-Zeiten¹⁹ wurden von SCHWARZSCHILD schon im Jahre 1916 angegeben.

Da EINSTEIN sehr bald bemerkte, daß seine Gleichungen ein expandierendes bzw. kollabierendes Universum zuließen, was ganz im Gegensatz zu den Vorstellungen der damaligen Zeit stand, versuchte

¹⁸Zu einer Herleitung der Gleichungen aus dem Prinzip der stationären Wirkung siehe z.B. L.D. LANDAU, E.M. LIFSCHIZ, Lehrbuch der Theoretischen Physik. II. Feldtheorie, Kapitel XI, §95 ff.

¹⁹Zitat aus [42]: *Die Einsteinschen Gleichungen sind durch die Nichtlinearität so kompliziert, daß eine allgemeine Lösung jenseits menschlicher Rechenkunst liegt. Nur für Räume genügend hoher Symmetrie lassen sich strenge Lösungen explizit angeben.*

er 1917, durch Einfügung einer *kosmologischen Konstanten* Λ (im Sinne von Satz 14) das Weltbild zu retten:

$$R_{jk} + \left(\Lambda - \frac{1}{2} R_0 \right) g_{jk} = \lambda T_{jk} .$$

Dieser Zusatz verletzt zwar das Axiom der Flachheit im MINKOWSKI-Raum, kann aber evtl. durch Umschreibung in der Form

$$R_{jk} - \frac{1}{2} g_{jk} R_0 = \lambda (T_{jk} + T_{jk}^{\text{vac}})$$

als ein Quanteneffekt des Vakuums interpretiert werden. Auf jeden Fall scheinen moderne Beobachtungen diesen zusätzlichen Term geradezu zu fordern, auch wenn Einstein 1930, nachdem HUBBLE die tatsächliche vorhandene Expansion unseres Weltalls nachgewiesen hatte, die Einführung der kosmologischen Konstanten als größten Irrtum seines Lebens bezeichnete. Außerdem beschäftigt sie noch immer die Mathematiker, denn im Vakuum führt $T_{jk} = 0$ zu $R_0 = 0$ und damit zu

$$R_{jk} + \Lambda g_{jk} = 0 ,$$

also zu den oben schon eingeführten EINSTEIN-Mannigfaltigkeiten.

13 Liegruppen und Liealgebren

Es sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe, die gleichzeitig die Struktur einer (reellen oder komplexen) Mannigfaltigkeit trage. Man hat dann die kanonischen „algebraischen“ Abbildungen

$$m : \begin{cases} G \times G \longrightarrow G \\ (x, y) \longmapsto xy \end{cases} \quad \text{und} \quad \text{inv} : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto x^{-1} \end{cases} .$$

Definition und Bemerkung. G heißt eine (reelle oder komplexe) *Liegruppe*, wenn die Abbildungen m und inv differenzierbar sind. (Hierbei wird selbstverständlich das kartesische Produkt $G \times G$ mit der Produktstruktur von Mannigfaltigkeiten versehen). Dazu reicht offensichtlich, daß die Abbildung $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ differenzierbar ist.

Bemerkung. Es ist eine tiefliegende Aussage, daß solche Gruppen automatisch eine *analytische* Struktur besitzen²⁰. Es reicht hierzu sogar, G nur als *topologische Mannigfaltigkeit* und die Abbildungen des Multiplizierens $G \times G \rightarrow G$ und des Invertierens $G \rightarrow G$ als *stetig* vorauszusetzen.

Die klassischen *Beispiele* sind sogar *algebraische* Mannigfaltigkeiten. Die „Urmutter“ aller Liegruppen, die *allgemeine lineare Gruppe* $\text{GL}(n, \mathbb{K})$, ist als topologische Mannigfaltigkeit ein offener Teil von $\mathbb{K}^{n \times n}$, genauer: das Komplement der Hyperfläche $\{A = (a_{jk}) \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \det A = 0\}$. Die Multiplikationsformel für Matrizen und die CRAMERSche Regel implizieren, daß die Abbildungen m bzw. inv *polynomial* bzw. *rational* in den n^2 Variablen a_{jk} sind. Die *spezielle* lineare Gruppe

$$\text{SL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) : \det A = 1\} \subset M(n \times n, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n \times n}$$

wird durch das Verschwinden eines Polynoms vom Grad n in den Variablen a_{jk} beschrieben. Hier ist dann sogar die Inversenbildung ein polynomialer Prozeß.

Satz 13.1 *Es sei $G_e \subset G$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements e in der Liegruppe G . Dann ist G_e eine offene Teilmenge, die von G eine Liegruppen-Struktur erbt. G_e ist sogar ein Normalteiler in G , und die Quotientengruppe G/G_e ist höchstens abzählbar. G/G_e steht in eindeutiger Korrespondenz zu der Menge der Zusammenhangskomponenten von G ; insbesondere ist jede solche Komponente diffeomorph zu G_e .*

Beweis. G hat als Mannigfaltigkeit (mit 2. Abzählbarkeitsaxiom) höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, die allesamt offen in G , insbesondere offene Untermannigfaltigkeiten von G sind.

Damit G_e als eine Liegruppe erkannt werden kann, ist nur zu zeigen, daß aus $x, y \in G_e$ auch $xy^{-1} \in G_e$ folgt. Es seien dazu α, β (stetige) Wege in G mit

$$\alpha(0) = \beta(0) = e, \quad \alpha(1) = x, \quad \beta(1) = y .$$

Dann ist $\alpha\beta^{-1} : [0, 1] \rightarrow G$ ein Weg mit

$$\alpha\beta^{-1}(0) = \alpha(0)\beta^{-1}(0) = ee^{-1} = e$$

und $\alpha\beta^{-1}(1) = xy^{-1}$. Folglich ist $xy^{-1} \in G_e$.

Ist weiter $x \in G_e$, $\alpha : [0, 1] \rightarrow G_e$ ein Weg mit Anfangspunkt e und Endpunkt x , und ist $y \in G$ beliebig, so ist

$$\gamma := y\alpha y^{-1} : [0, 1] \longrightarrow G$$

²⁰Dies wurde 1900 von HILBERT in seiner berühmten Liste als 5. Problem formuliert; die Lösung wurde erst 1952 durch GLEASON und MONTGOMERY - ZIPPIN erbracht. Siehe z.B.: C.T. Yang: *Hilbert's fifth problem and related problems on transformation groups*; pp. 142-146 in: Felix E. Browder (Ed.): *Mathematical developments arising from Hilbert problems. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume XXVIII - Part 1.*

ein Weg mit $\gamma(0) = e^{-1} e e = e$ und $\gamma(1) = y x y^{-1} \in G_e$. Also ist G_e ein Normalteiler in G .

Mit demselben Argument folgt: ist $U \subset G$ offen und zusammenhängend, so auch die zu U diffeomorphen Rechts- bzw. Links-Nebenklassen $Uy, yU, y \in G$ fest. Ist nun $\bar{G} = G/G_e = \{\bar{y}_\iota : \iota \in I\}$, so hat man mit Urbildern y_ι in G der Elemente $\bar{y}_\iota \in \bar{G}$ bekanntlich

$$G = \bigsqcup_{\iota \in I} y_\iota G_e. \quad \square$$

Beispiel. Es ist $O(n) = SO(n) \sqcup A \cdot SO(n)$, wenn $A \notin SO(n)$ eine beliebige orthogonale Matrix mit Determinante -1 ist, und $SO(n)$ ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elementes $E \in O(n)$.

Bemerkung. Sind G_1, \dots, G_r Liegruppen, so erbt auch das *kartesische Produkt* $G = G_1 \times \dots \times G_r$ eine kanonische Liegruppen-Struktur. Mit G ist auch die Gruppe G^{op} mit unterliegender Menge $|G^{\text{op}}| = |G|$ und Multiplikation $(x, y) \mapsto yx$ eine Liegruppe. Insbesondere sind $(\mathbb{R}^n, +)$ und $(\mathbb{C}^n, +)$ *abelsche*, d. h. *kommutative* Liegruppen. Weitere Beispiele sind (\mathbb{R}^*, \cdot) , (\mathbb{C}^*, \cdot) und (S^1, \cdot) .

Definition. Eine *Untergruppe* $H \subset G$ heißt eine *offene* bzw. *abgeschlossene Untergruppe* von G , wenn sie eine *offene* (*abgeschlossene*) *Teilmenge* von G ist. Sie heißt eine *Lie-Untergruppe*, wenn sie sowohl eine Untergruppe als auch eine *Untermannigfaltigkeit* von G ist. Eine Lie-Untergruppe H heißt ein *Lie-Normalteiler*, wenn H sogar ein *Normalteiler* in der Gruppe G ist.

Bemerkung. Offene Untergruppen von Liegruppen sind offensichtlich wieder Lie-Untergruppen. Für *abgeschlossene* Untergruppen ist dies ebenfalls richtig, aber durchaus nichttrivial. Wir wollen daher auf den Beweis verzichten; allerdings wollen wir anschließend noch zeigen, daß die Bedingung der Abgeschlossenheit auch notwendig ist. Eine offene Lie-Untergruppe ist somit insbesondere Vereinigung von Zusammenhangskomponenten, also von G_e und (evtl.) einigen Translaten (siehe auch Satz 1).

Satz 13.2 *Eine Lie-Untergruppe H der Liegruppe G ist notwendig abgeschlossen in G .*

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $m : G \times G \rightarrow G$ in dem Punkt (e, e) gibt es zu jeder Umgebung V von e eine Umgebung W von e , so daß $x_1, x_2 \in W \implies x_1 x_2 \in W$. Wir schreiben hierfür einfach $W^2 \subset V$. Geht man von W noch über zu $W \cap \text{inv}^{-1}(W)$, so sieht man sofort, daß man zusätzlich W als *symmetrisch* annehmen kann in dem Sinne, daß $x^{-1} \in W$ für $x \in W$. (Man beachte, daß die Abbildung $\text{inv} : G \rightarrow G$ invertierbar und gleich ihrer Inversen ist).

Da H als Untermannigfaltigkeit von G lokal abgeschlossen ist, gibt es eine kompakte Umgebung V von e in G , so daß $V \cap H$ kompakt ist. Wähle eine symmetrische Umgebung W von e in G mit $W^2 \subset V$. Ist nun $x \in \bar{H}$, so ist xW eine Umgebung von $x \in G$, und folglich gibt es eine unendliche Folge $x_j \in xW \cap H$, die gegen x konvergiert. Schreibt man $x_j = xw_j$ mit $w_j \in W$, so ergibt sich $x_0^{-1}x_j = w_0^{-1}w_j \in W^2 \cap H \subset V \cap H$. Nun konvergiert die Folge $x_0^{-1}x_j$ gegen $x_0^{-1}x$, und da $V \cap H$ insbesondere abgeschlossen ist, ist $x_0^{-1}x \in V \cap H \subset H$ und damit $x \in H$. \square

Bemerkung. Verzichtet man auf die Forderung, daß G eine Mannigfaltigkeitsstruktur trägt, so gewinnt man den allgemeineren Begriff einer *topologischen Gruppe*. Der vorstehende Beweis macht im ersten Teil nur von dieser Struktur Gebrauch (im zweiten Teil wird zusätzlich benötigt, daß Liegruppen als Mannigfaltigkeiten auch lokal kompakt sind und dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen). Insbesondere zeigt der Beweis, daß jede Umgebung V des Einselementes e in einer topologischen Gruppe G eine *symmetrische* Umgebung W mit $W^2 \subset V$ enthält.

Lemma 13.3 *Eine Lie-Untergruppe $H \subset G$ trägt eine kanonische induzierte Liegruppen-Struktur.*

Beweis. Die zusammengesetzte Abbildung

$$\begin{cases} H \times H & \xrightarrow{\text{id} \times \text{id}} & G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y) & \longmapsto & xy^{-1} \end{cases}$$

ist differenzierbar mit Bild in H . Da H eine Untermannigfaltigkeit von G ist, ist auch die Abbildung $H \times H \rightarrow H$ differenzierbar. \square

Bemerkung. Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist H schon dann eine Lie-Untergruppe, wenn H in der Umgebung eines Punktes h_0 , also z. B. in $h_0 = e$, eine Untermannigfaltigkeit von G ist. Ist nämlich $\Phi_0 : V \rightarrow U_0 = \Phi_0(V)$ eine Karte mit $\Phi_0(0) = h_0$, so daß $\Phi_0^{-1}(H \cap U_0)$ der Durchschnitt von V mit einem linearen Unterraum $L \subset \mathbb{R}^n$ ist, so ist für beliebiges $h_1 \in H$ auch $\Phi_1 := h_1 h_0^{-1} \Phi_0 : V \rightarrow h_1 h_0^{-1} U_0$ eine entsprechende Karte für das Paar (G, H) im Punkte h_1 .

Definition. Lie-Untergruppen von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ werden aus naheliegenden Gründen auch *Matrix-Gruppen* genannt.

Beispiel. Für alle p, q mit $p+q = n$ läßt sich das Produkt $\mathrm{GL}(p, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(q, \mathbb{K})$ als Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ realisieren, indem man jedem Paar (A, B) von Matrizen in $\mathrm{GL}(p, \mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(q, \mathbb{K})$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

zuordnet.

Für festes $g \in G$ sind die Abbildungen $\gamma_g : x \mapsto gx$, $\delta_g : x \mapsto xg^{-1}$ Diffeomorphismen (dies haben wir weiter oben schon implizit benutzt). Da diese *Links-* bzw. *Rechtstranslationen* transitiv auf G operieren, also jedes Element $x \in G$ in jedes andere Element $y \in G$ durch eine geeignete Translation überführt werden kann, sind Liegruppen G stets *rein-dimensionale* Mannigfaltigkeiten (siehe den expliziten Beweis in der obigen Bemerkung).

Für die Translationen γ_g, δ_g hat man die Tangentialabbildungen

$$(d\gamma_g)_x : T_{G,x} \longrightarrow T_{G,gx}, \quad (d\delta_g)_x : T_{G,x} \longrightarrow T_{G,xg^{-1}}.$$

Man schreibt für $v_x \in T_{G,x}$ auch

$$(d\gamma_g)_x(v_x) =: gv_x \in T_{G,gx}, \quad (d\delta_g)_x(v_x) =: v_x g^{-1} \in T_{G,xg^{-1}}.$$

Es gilt wegen $\gamma_{g_2 g_1} = \gamma_{g_2} \circ \gamma_{g_1}$, $\delta_{g_1 g_2} = \delta_{g_1} \circ \delta_{g_2}$ und der Kettenregel:

$$(g_2 g_1) v_x = g_2 (g_1 v_x), \quad v_x (g_1 g_2)^{-1} = (v_x g_2^{-1}) g_1^{-1}.$$

Insbesondere ist $g(g^{-1}v_x) = ev_x = v_x$. Ferner hat man $(g_1 v_x)g_2^{-1} = g_1(v_x g_2^{-1}) =: g_1 v_x g_2^{-1} \in T_{G,g_1 x g_2^{-1}}$.

Satz 13.4 i) *Es sei $\mathrm{inv}(x) = x^{-1}$. Dann gilt für alle $x \in G$, $v_x \in T_{G,x}$:*

$$(d\mathrm{inv})_x(v_x) = -x^{-1}v_x x^{-1}.$$

ii) *Es sei $m(x, y) = xy$. Dann gilt für alle $x, y \in G$, $v_x \in T_{G,x}$, $v_y \in T_{G,y}$:*

$$(dm)_{(x,y)}(v_x, v_y) = xv_y + v_x y.$$

Beweis. ii) An der Stelle (x_0, y_0) ist $x \mapsto m(x, y_0)$ die Abbildung $\delta_{y_0^{-1}}$, und $y \mapsto m(x_0, y)$ ist die Abbildung γ_{x_0} . Die Aussage ist dann Spezialfall einer allgemeinen Formel für Tangentialabbildungen zu $X \times Y \rightarrow Z$.

i) Es gilt $m(x, \mathrm{inv}(x)) = e = \mathrm{const}$. Die Kettenregel und ii) implizieren dann

$$0 = v_x x^{-1} + x (d\mathrm{inv})_x(v_x),$$

so daß $(d \operatorname{inv})_x(v_x) = -x^{-1} v_x x^{-1}$. \square

Definition. Eine Abbildung $u : G \rightarrow G'$ von Liegruppen heißt ein *Liegruppen-Homomorphismus*, wenn u ein differenzierbarer Gruppen-Homomorphismus ist. Ist u sogar diffeomorph und ein Gruppen-Isomorphismus, so heißt u ein (*Liegruppen-*) *Isomorphismus*, im Falle $G = G'$ auch ein *Automorphismus*.

Beispiel. Die Translationen sind, außer wenn $g = e$, keine Gruppenhomomorphismen und damit keine Liegruppen-Automorphismen. Dagegen sind die *inneren* Automorphismen $\operatorname{Int}(g) : x \mapsto gxg^{-1}$ Liegruppen-Automorphismen.

Lemma 13.5 *Ein Gruppenhomomorphismus $u : G \rightarrow G'$ ist schon dann ein Liegruppen-Homomorphismus, wenn u in einer Umgebung von e differenzierbar ist.*

Beweis. Für $g, g_0 \in G$ ist $u(g) = u(g_0)u(g_0^{-1}g) = \gamma_{u(g_0)} \circ u(g_0^{-1}g)$, und $g_0^{-1}g$ liegt nahe e , wenn g in der Nähe von g_0 liegt. \square

Beispiel. Es sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}). Dann ist $\operatorname{GL}(E)$, die Gruppe der invertierbaren linearen Endomorphismen von E , eine Liegruppe. Ein Liegruppen-Homomorphismus $G \rightarrow \operatorname{GL}(E)$ heißt eine (*lineare*) *Darstellung* von G auf E .

Satz 13.6 i) *Ist $u : G \rightarrow G'$ ein Liegruppen-Homomorphismus, dann ist u eine Subimmersion von konstantem Rang, und $\ker u$ ist ein Lie-Normalteiler von G . Für alle $x \in G$, $v_x \in T_{G,x}$ gilt:*

$$du_x(v_x) = u(x)(du_e(x^{-1}v_x)).$$

ii) *Ist $u : G \rightarrow G'$ ein surjektiver Liegruppen-Homomorphismus, so ist u eine Submersion, und es gilt*

$$\dim G - \dim G' = \dim \ker u.$$

Insbesondere ist ein bijektiver Homomorphismus von Liegruppen ein Isomorphismus.

Beweis. i) Man berechnet

$$(u \circ \gamma_{g^{-1}})(x) = u(\gamma_{g^{-1}}(x)) = u(g^{-1}x) = u(g^{-1})u(x) = \gamma_{u(g^{-1})}(u(x)) = (\gamma_{u(g^{-1})} \circ u)(x),$$

also $u \circ \gamma_{g^{-1}} = \gamma_{u(g^{-1})} \circ u$. Die Kettenregel liefert für alle $v_x \in T_{G,x}$, wenn man in dieser Formel g wieder durch x ersetzt:

$$(du)_e(x^{-1}v_x) = u(x)^{-1}(du)_x(v_x).$$

Also hat du konstanten Rang, nämlich $\operatorname{rg}(du)_e$, und somit ist u eine Subimmersion und der Normalteiler $\ker u = u^{-1}(e)$ eine Untermannigfaltigkeit von G .

ii) Wäre u keine Submersion, so gäbe es einen Punkt $x_0 \in G$ und eine Umgebung $U_0 = U(x_0)$, s. d. $u(U_0)$ nirgends dicht in G' ist. Für beliebiges $x \in G$ ist dann $(xx_0^{-1})U_0$ eine Umgebung von x , und es ist

$$u((xx_0^{-1})U_0) = u(xx_0^{-1})u(U_0)$$

nirgends dicht in G' . Wähle nun eine abzählbare Verfeinerung $\{U_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ der Überdeckung $\{(xx_0^{-1})U_0 : x \in G\}$. Dann ist wegen der Surjektivität von u

$$G' = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} u(U_j)$$

eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen, was offensichtlich²¹ absurd ist. \square

²¹Diese Kennzeichnung ist keineswegs berechtigt. Wir brauchen hierzu nämlich den *BAIRESchen Kategoriensatz* (siehe z. B. Querenburg, p. 152, Satz 13. 29 (b)).

Beispiele. $\det : GL(n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ ist ein surjektiver Liegruppen-Homomorphismus ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Nach dem vorigen Satz (Abschnitt ii)) ist $\ker \det$ ein Lie-Normalteiler in $GL(n, \mathbb{K})$. Da das neutrale Element in \mathbb{K}^* die 1 ist, folgt insbesondere:

$$SL(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \det A = 1 \}$$

ist eine Liegruppe (die *spezielle lineare* Gruppe vom Rang n über dem Grundkörper \mathbb{K}) von der Dimension $n^2 - 1$. - Man hat stets eine exakte Sequenz von Gruppen:

$$1 \longrightarrow SL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^* \longrightarrow 1.$$

Entsprechend hat man die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow SO(n) \longrightarrow O(n) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

mit der *diskreten* Liegruppe $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$. Man kann somit $GL(n, \mathbb{K})$ und $O(n)$ als *semidirekte* Produkte darstellen:

$$GL(n, \mathbb{K}) \cong SL(n, \mathbb{K}) \rtimes \mathbb{K}^*, \quad O(n) \cong SO(n) \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

Auch $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ist ein Liegruppen-Homomorphismus, wenn man \mathbb{C} mit der Addition und \mathbb{C}^* mit der Multiplikation versieht. Der Kern ist isomorph zu \mathbb{Z} als diskreter (aber unendlicher) Liegruppe.

Wir kommen nun zu dem Begriff der *Liealgebren*. Es sei G eine Liegruppe; als Mannigfaltigkeit besitzt G Riemannsche Metriken h . Eine solche heißt *linksinvariant*, wenn $\gamma_{g_0}^* h = h$ für alle $g_0 \in G$, d. h.

$$h(v_1, v_2) =: \langle v_1, v_2 \rangle_g = \langle (d\gamma_{g_0})_g(v_1), (d\gamma_{g_0})_g(v_2) \rangle_{g_0g} = h(g_0v_1, g_0v_2) = \langle g_0v_1, g_0v_2 \rangle_{g_0g}$$

für alle $g, g_0 \in G$, $v_1, v_2 \in T_{G,g}$.

Lemma 13.7 *Es gibt linksinvariante Metriken.*

Beweis. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$ ein beliebiges euklidisches Skalarprodukt auf $T_{G,e}$. Dann erfüllt

$$\langle v_1, v_2 \rangle_g := \langle g^{-1}v_1, g^{-1}v_2 \rangle_e, \quad v_1, v_2 \in T_{G,g}$$

alle Bedingungen. □

Bemerkung. Ist G kompakt, so gibt es sogar *biinvariante* Metriken.

Definition. Ein Vektorfeld v auf G heißt *linksinvariant*, wenn $\gamma_g^* v = v$ für alle $g \in G$. Diese Forderung ist sinnvoll, da γ_g ein Diffeomorphismus ist, und natürlich gleichbedeutend mit

$$v(f) = v(f \circ \gamma_g), \quad f \in C^\infty(G), \quad g \in G.$$

Wir bezeichnen mit ${}^G\Gamma(G, T_G)$ den Vektorraum dieser linksinvarianten Vektorfelder (der überdies eine $C^\infty(G)$ -Algebra-Struktur trägt).

Satz 13.8 *${}^G\Gamma(G, T_G)$ ist mit der üblichen Lie-Klammer von Vektorfeldern als Operation eine Liealgebra.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass mit zwei linksinvarianten Vektorfeldern v_1 und v_2 auch die Klammer $[v_1, v_2]$ linksinvariant ist:

$$[v_1, v_2](f \circ \gamma_g) = v_1(v_2(f \circ \gamma_g)) - v_2(v_1(f \circ \gamma_g)) = v_1(v_2(f)) - v_2(v_1(f)) = [v_1, v_2](f). \quad \square$$

Indem man jedes Vektorfeld v an der Stelle $e \in G$ auswertet, bekommt man eine \mathbb{R} -lineare Abbildung

$${}^G\Gamma(G, T_G) \longrightarrow T_{G,e}.$$

Satz 13.9 Die Abbildung ${}^G\Gamma(G, T_G) \longrightarrow T_{G,e}$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum-Isomorphismus.

Beweis. Es ist zu zeigen: Zu jedem Tangentialvektor $v_e \in T_{G,e} = \mathfrak{g}$ gibt es genau ein linksinvariantes Vektorfeld v auf G mit $v(e) = v_e$. Wegen der Linksinvarianz der Vektorfelder stimmen zwei solche genau dann überein, wenn sie bei e übereinstimmen. Man braucht also nur noch die Surjektivität nachzuweisen. Es sei dazu $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ eine Kurve mit $\alpha(0) = e$ und $\alpha'(0) = v_e$. Setze dann für $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$, $g \in G$:

$$v(f)(g) := \left. \frac{d}{dt} f(g\alpha(t)) \right|_{t=0}.$$

Dies ist nach Definition ein linksinvariantes Vektorfeld, und an der Stelle $g = e$ ist $v(f)(e) = v_e(f)$. \square

Definition. Man nennt den \mathbb{R} -Vektorraum $T_{G,e}$ zusammen mit der durch die obige Isomorphie induzierten Lie-Klammer die *Liealgebra* zu G und bezeichnet sie mit \mathfrak{g} oder auch mit $\text{Lie}(G)$.

Beispiel. Mit $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ wird die Liealgebra von $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ bezeichnet. Sie besteht, wie man sich leicht überlegt, aus allen $n \times n$ -Matrizen mit Lie-Klammer $[A, B] = AB - BA$. Entsprechend ist $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ die Liealgebra von $\text{SL}(n, \mathbb{C})$, bestehend aus allen $n \times n$ -Matrizen mit *verschwindender Spur* und der gleichen Lie-Klammer. Als Vektorraum wird z. B. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ erzeugt von den 3 Elementen

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

und die Liealgebrastruktur ist völlig bestimmt durch die Relationen

$$[h, e^\pm] = \pm 2e^\pm, \quad [e^+, e^-] = h.$$

Liegruppen werden schon in starkem Maße durch ihre Liealgebren bestimmt.

Definition. Zwei Liegruppen G und G' heißen *lokal isomorph*, wenn es Umgebungen U, U' von e bzw. e' und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \rightarrow U'$ gibt, s. d. aus $x, y, xy \in U$ folgt: $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ und entsprechend für U' .

Beispiel. $O(n)$ und $SO(n)$ sind lokal isomorph, aber nicht isomorph.

Für den Beweis des folgenden Satzes verweisen wir den Leser auf die Literatur.

Satz 13.10 Die Liegruppen G und G' sind genau dann lokal isomorph, wenn \mathfrak{g} und \mathfrak{g}' als Liealgebren isomorph sind.

Beispiele. Neben der Isomorphie $\mathfrak{o}(n) \cong \mathfrak{so}(n)$ und ähnliche hat man noch exzeptionelle Isomorphismen wie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3, 1)$, die einer zweifachen Überlagerung von Liegruppen $\text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{SO}(3, 1)$ entspricht. Diese induziert die berühmte zweifache Überlagerung $\text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$, die z. B. die Klassifikation der endlichen Untergruppen von $\text{SU}(2)$ und $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ mit der der Symmetriegruppen der *Platonischen Körper* in Verbindung bringt.

Die Liealgebra \mathfrak{g} kann insbesondere nicht zwischen *Überlagerungen* unterscheiden. Wir wollen an dieser Stelle einige Bemerkungen zur Überlagerungstheorie von Liegruppen einflechten.

Satz 13.11 *Es sei $p : G' \rightarrow G$ eine zusammenhängende Überlagerung der zusammenhängenden Liegruppe G und $e' \in p^{-1}(e)$. Dann gibt es genau eine Liegruppenstruktur auf G' mit Einselement e' , s. d. π ein Liegruppen-Homomorphismus wird. Die Gruppe der Decktransformationen von p kann mit dem diskreten Normalteiler $N' = p^{-1}(e) = \ker p$ identifiziert werden. Insbesondere besitzt jede zusammenhängende Liegruppe G eine universelle Liegruppen-Überlagerung (d. h. mit trivialer Fundamentalgruppe) und N' ist isomorph zu der Fundamentalgruppe von G .*

Beweis. Es ist auch $G' \times G' \rightarrow G \times G$ eine Überlagerung. Wegen der Liftungseigenschaft von Überlagerungen kann man die zusammengesetzte Abbildung $m \circ (p \times p) : G' \times G' \rightarrow G$ zu einer Abbildung $m' : G' \times G' \rightarrow G'$ mit $m'(e', e') = e'$ liften, ebenso für $\text{inv} : G \rightarrow G$. Es folgt dann z. B. $p(m'(g', \text{inv}' g')) = m(g, \text{inv} g) = e$ und $m'(e', \text{inv}' e') = m'(e', e') = e'$, also wegen der Eindeutigkeit der Liftung: $m'(g', \text{inv}' g') = e'$ für alle $g' \in G'$. Entsprechend beweist man die Assoziativität der Multiplikation m' und die Neutralität von e' .

Der Rest ist eine Folgerung aus der allgemeinen Überlagerungstheorie (siehe den Anhang zu Kapitel 5). \square

Beispiel. $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ bzw. die durch $t \mapsto \exp(it)$ gegebene Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ sind die universellen Liegruppen-Überlagerungen von \mathbb{C}^* bzw. S^1 .

Beispiel. $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ sind einfach zusammenhängende Gruppen. Die allgemeine lineare Gruppe ist aber im gruppentheoretischen Sinne nicht einfach für $n \geq 2$, weil sie ihr Zentrum $\mathbb{C}^* E_n$ als echten Normalteiler enthält. Auch $\text{SL}(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, ist als Gruppe nicht einfach; sie besitzt den Normalteiler $\mathbb{C}^* E_n \cap \text{SL}(n, \mathbb{C})$, der mit der Gruppe der n -ten Einheitswurzeln identifiziert werden kann. Erst

$$\text{PSL}(n, \mathbb{C}) := \text{SL}(n, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* E_n \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}) \cong \text{GL}(n, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^* =: \text{PGL}(n, \mathbb{C})$$

ist gruppentheoretisch einfach, aber nicht mehr einfach zusammenhängend, da $\pi_0(\text{PSL}(n, \mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}_n$.

Man entscheidet sich in der Liethorie dazu, als die *einfachen* Objekte die Liegruppen mit „einfachen“ Liealgebren anzusehen, deren Definition wir im Anhang zu diesem Kapitel kurz erläutern werden. In dieser Definition sind $\text{SL}(n, \mathbb{C})$ und $\text{PSL}(n, \mathbb{C})$ einfach, nicht aber $\text{GL}(n, \mathbb{C})$.

Bemerkung. Die einfachen komplexen Liealgebren werden durch die *DYNKIN-Diagramme* (A, B, C, D, E, F, G -Diagramme) klassifiziert (siehe den Anhang zu diesem Kapitel). Es lassen sich zu jeder einfachen Liealgebra auch (sogar einfach zusammenhängende) Liegruppen konstruieren. Es stellt sich heraus, daß diese nur *diskrete* Normalteiler besitzen, die im Zentrum der Gruppe liegen (so daß sie also auch im gruppentheoretischen Sinne „fast“ einfach sind).

Den Abschluß dieses Kapitels sollen einige Bemerkungen zur *Exponential-Abbildung* bei Liegruppen bilden. Man kann diese auch im allgemeineren Rahmen von Riemannschen Mannigfaltigkeiten einführen, benötigt dann aber zum Nachweis der entsprechenden Eigenschaften tieferliegende differentialgeometrische Konzepte.

Definition. Eine 1-Parameter-Untergruppe von G ist ein Liegruppen-Homomorphismus $(\mathbb{R}, +) \rightarrow G$.

Beispiel. Bekanntlich ist die Reihe

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n, \quad A \in M(n \times n, \mathbb{K}),$$

konvergent und definiert deshalb eine Matrix $e^A \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Man hat $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$, falls A und B vertauschen. Damit ist die Abbildung $t \mapsto e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, ein Liegruppen-Homomorphismus, also eine

1-Parameter-Untergruppe, deren Ableitung an der Stelle $t = 0$ gerade A ist. Ferner läßt sich jedes Element $B \in \text{GL}(n, \mathbb{K})$ (mit, im reellen Fall, positiver Determinante) in der Form $B = e^A$ schreiben, so daß die Kurve $t \mapsto e^{tA}$ die Einheitsmatrix E mit B verbindet. Dies zeigt, daß die Liegruppen $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und $\text{GL}^+(n, \mathbb{R})$ zusammenhängend sind.

Im Allgemeinfall geht man wie folgt vor. Man identifiziert einen vorgegebenen Tangentialvektor $v \in T_{G,e} = \mathfrak{g}$ mit dem entsprechenden linksinvarianten Vektorfeld auf der Liegruppe G . Nach dem PEANOSchen Existenz- und Eindeigkeitssatz gibt es dann lokal um $0 \in \mathbb{R}$ (genau) eine Integralkurve $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ zu v , d. h. eine differenzierbare Kurve mit $\Phi(0) = e$ und $\Phi'(t) = v(\Phi(t))$, insbesondere $\Phi'(0) = v$. Setzt man diese Konstruktion auf ein größtmögliches Intervall in \mathbb{R} fort, so gewinnt man eine sogenannte maximale Integralkurve, die wir mit Φ_v bezeichnen wollen. Wiederum mit PEANO ergibt sich leicht der folgende Satz.

Satz 13.12 Die maximalen Integralkurven Φ_v sind auf ganz \mathbb{R} erklärt und stellen Gruppenhomomorphismen dar:

$$\Phi_v(t_1 + t_2) = \Phi_v(t_1)\Phi_v(t_2).$$

Hieraus gewinnt man mit $\vartheta := \Phi_v$ unmittelbar die Existenzaussage des folgenden Satzes. (Die Eindeutigkeit ist wieder einfach einzusehen).

Folgerung 13.13 Es sei G eine Liegruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} . Dann gibt es zu jedem Vektor $v \in \mathfrak{g}$ genau eine 1-Parameter-Untergruppe $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow G$ mit $\vartheta'(0) = v$.

Definition. Nach Voraussetzung ist Φ_v für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt. Man setzt

$$\exp v := \Phi_v(1)$$

und hat damit die Exponential-Abbildung

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

erklärt. Sie stimmt natürlich für die Liegruppe $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ mit der oben skizzierten Konstruktion überein.

Satz 13.14 Die Exponential-Abbildung ist differenzierbar und erfüllt die folgenden Eigenschaften :

- i) $\exp(0) = e$;
- ii) $\exp(-v) = (\exp(v))^{-1}$;
- iii) $\exp((s+t)v) = \exp(sv) \exp(tv)$.

Beweis. Die Differenzierbarkeit von \exp folgt aus der Tatsache, daß die Lösung von (guten) gewöhnlichen Differentialgleichungssystemen differenzierbar von den Anfangsbedingungen abhängen. Zu i) ist nichts weiter zu sagen. Durch Ableitung von $\Phi_v(\lambda t)$ gewinnt man die Einsicht, daß diese Kurve die Integralkurve zu λv ist: $\Phi_{\lambda v}(t) = \Phi_v(\lambda t)$. Daraus erhält man iii):

$$\exp((s+t)v) = \Phi_{(s+t)v}(1) = \Phi_v(s+t) = \Phi_v(s) \cdot \Phi_v(t) = \Phi_{sv}(1) \cdot \Phi_{tv}(1) = \exp(sv) \cdot \exp(tv).$$

Schließlich folgt ii) aus i) und iii) mit $s = -t = 1$. □

Dieser Satz hat noch eine weitere Konsequenz: Die Exponential-Abbildung liefert kanonische differenzierbare Koordinaten nahe dem neutralen Element $e \in G$.

Satz 13.15 Es gibt offene Umgebungen V von $0 \in \mathfrak{g}$ und U von $e \in G$, s. d. $\exp : V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wegen des lokalen Umkehrsatzes für differenzierbare Abbildungen brauchen wir nur zu zeigen, daß das Differential $d \exp_0 : T_{\mathfrak{g},0} = \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} = T_{G,e}$ invertierbar ist. Tatsächlich ist es, wovon man sich leicht überzeugt, gleich der Identität. \square

Wir führen noch eine weitere Folgerung an.

Satz 13.16 *Jeder stetige Gruppenhomomorphismus $\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow G$ ist von der Gestalt $\vartheta(t) = \exp(tv)$ mit einem festen $v \in \mathfrak{g}$ und damit insbesondere automatisch differenzierbar.*

Auch die eingangs zitierte Aussage, daß eine *abgeschlossene* Untergruppe von G notwendig eine *Lieuntergruppe* ist, läßt sich mit der Exponential-Abbildung belegen. Ein wichtiger Schritt zum Beweis ist das folgende Lemma²².

Lemma 13.17 *Für jede abgeschlossene Untergruppe $H \subset G$ ist die Menge*

$$\mathfrak{h} := \{v \in \mathfrak{g} : \exp(tv) \in H \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

ein linearer Unterraum von \mathfrak{g} .

²²Zum Beweis desselben konsultiere man die angegebene Standardliteratur oder auch das neue Buch: I. Agricola und Th. Friedrich: Globale Analysis. Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik. Friedr. Vieweg & Sohn: Braunschweig–Wiesbaden 2001.

Anhang: Klassifikation von einfachen Liealgebren

Definition und Bemerkung. Eine endlich-dimensionale Liealgebra \mathfrak{g} heißt *einfach*, wenn sie nicht abelsch ist (d. h. nicht alle Kommutatoren $[v, w]$ verschwinden) und keine nichttrivialen Ideale besitzt. Dabei ist ein *Ideal* in \mathfrak{g} ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ mit $[v, w] \in \mathfrak{a}$, wenn $v \in \mathfrak{g}$ und $w \in \mathfrak{a}$. Die Liealgebra \mathfrak{g} heißt *halbeinfach*, wenn sie keine abelschen Ideale außer $\{0\}$ enthält. Offensichtlich sind einfache Liealgebren auch halbeinfach. Desgleichen sind Produkte von einfachen Liealgebren halbeinfach. Mit Hilfe der KILLING-Form kann man auch die Umkehrung der letzten Bemerkung einsehen.

Definition. Durch $(\text{ad } v)(w) = [v, w]$ werden Endomorphismen $\text{ad } v : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ für alle $v \in \mathfrak{g}$ definiert. Ein Untervektorraum $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ist genau dann ein *Ideal*, wenn $(\text{ad } v)(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{a}$ für alle $v \in \mathfrak{g}$. Weiter ist

$$B(v, w) = \text{spur}(\text{ad } v \circ \text{ad } w)$$

eine symmetrische Bilinearform $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}). Diese heißt die KILLING-Form von \mathfrak{g} .

Die halbeinfachen Liealgebren lassen sich durch die Killing-Form charakterisieren. Man kann zeigen:

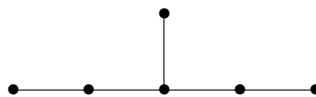
Satz 13.18 *Für eine endlich-dimensionale Liealgebra \mathfrak{g} sind die folgenden Aussagen äquivalent :*

- i) \mathfrak{g} ist halbeinfach ;
- i) die Killing-Form B ist nicht ausgeartet ;
- i) \mathfrak{g} ist eine endliche direkte Summe von Idealen, die als Liealgebren einfach sind.

Die einfachen Liealgebren über \mathbb{C} werden klassifiziert durch gewisse Matrizen (die CARTAN-Matrizen) oder durch *Wurzelsysteme*, die selbst wieder in Form von Diagrammen (DYNKIN- oder auch COXETER-DYNKIN-WITT-Diagramme) kodifiziert werden können. Sie tragen traditionell die Bezeichnungen

$$A_n, n \geq 1, \quad B_n, n \geq 2, \quad C_n, n \geq 3, \quad D_n, n \geq 4, \quad E_6, E_7, E_8, \quad F_4, \quad G_2.$$

Das Diagramm E_6 z. B. hat die folgende Form:



Zu den A, B, C, D -Diagrammen gehören die *klassischen* Gruppen, zu den restlichen die sogenannten *Ausnahme-* oder *exzeptionellen* Gruppen. Die klassischen komplexen Gruppen sind

$$A_n : \text{SL}(n+1, \mathbb{C}), \quad B_n : \text{SO}(2n+1, \mathbb{C}), \quad C_n : \text{Sp}(2n, \mathbb{C}), \quad D_n : \text{SO}(2n, \mathbb{C}).$$

Hierbei sind

$$\text{O}(n, \mathbb{K}) := \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : {}^t A A = E_n \}$$

und

$$\text{SO}(n, \mathbb{K}) := \text{O}(n, \mathbb{K}) \cap \text{SL}(n, \mathbb{K})$$

die (*verallgemeinerten*) orthogonalen Gruppen. Die *symplektischen* Gruppen $\text{Sp}(2n, \mathbb{K})$ sind definiert durch

$$\text{Sp}(2n, \mathbb{K}) := \{ A \in M(2n \times 2n, \mathbb{K}) : {}^t A I_{2n} A = I_{2n} \},$$

wobei I_{2n} die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Ist der Grundkörper \mathbb{K} der reelle Zahlkörper, so wird der Eintrag \mathbb{R} in der Bezeichnung der orthogonalen und symplektischen Gruppen im Allgemeinen fortgelassen, also nur $O(n)$ bzw. $Sp(2n)$ geschrieben. Zu den insbesondere in der Physik auftretenden Gruppen $O(p, q)$ siehe Kapitel 15.

Die Liealgebren zu diesen Liegruppen lassen sich einfach bestimmen vermöge des folgenden Lemmas.

Lemma 13.19 Für eine Matrixgruppe $G \subset GL(n, \mathbb{K})$ ist

$$\mathfrak{g} = \text{Lie } G = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : \exp(tA) \in G \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \}.$$

Hiermit wird z. B.

$$\mathfrak{o}(n, \mathbb{K}) = \{ A \in M(n \times n, \mathbb{K}) : {}^t A + A = 0 \},$$

also zur Algebra der *schiefssymmetrischen* Matrizen. Da diese automatisch die Spur Null haben, ist notwendig auch

$$\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \mathfrak{o}(n, \mathbb{K}).$$

Ganz entsprechend gewinnt man die Beschreibung

$$\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{K}) = \{ A \in M(2n \times 2n, \mathbb{K}) : {}^t A I_{2n} + I_{2n} A = 0 \},$$

Bemerkung. Es sei jedoch noch einmal betont, daß ganz im Gegensatz zu der obigen Reihenfolge der Darlegungen bei der Klassifikation der einfachen Liegruppen erst die einfachen Liealgebren bestimmt werden und dann erst die zugehörigen Liegruppen.

Auch die einfachen *reellen* Liegruppen lassen sich bestimmen. Hier hat man sogenannte *kompakte reelle* Formen. Für die klassischen Gruppen sind dies

$$SU(n+1), \quad SO(2n+1), \quad Sp(2n), \quad SO(2n).$$

Eine weitere differentialgeometrische Anwendung der Klassifikation ist die Bestimmung der sogenannten *symmetrischen Räume*.

14 Operationen von Liegruppen auf Mannigfaltigkeiten

Es sei jetzt $G \times X \rightarrow X$ eine (differenzierbare) Linksoperation einer Liegruppe G auf einer Mannigfaltigkeit X ²³. Wir bezeichnen die kanonische Quotientenabbildung von X in den *Bahnenraum* $G \backslash X = \{[x] = Gx : x \in X\}$ mit

$$\pi : X \longrightarrow G \backslash X$$

und versehen $G \backslash X$ mit der *Quotiententopologie*; darin ist eine Menge $V \subset G \backslash X$ genau dann offen, wenn $\pi^{-1}(V) \subset X$ offen ist. Insbesondere ist π eine (surjektive) *stetige* Abbildung. Sie ist aber auch *offen*, denn mit $U \subset X$ ist

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$$

offen. Ferner ist eine Abbildung $f : G \backslash X \rightarrow Y$, Y ein topologischer Raum, genau dann stetig (offen), wenn die Komposition $f \circ \pi$ stetig bzw. offen ist.

Beispiel. Es sei $X = \mathbb{R}$, $G = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $G \times X \ni (t, x) \mapsto tx \in X$. Dann besteht $G \backslash X$ genau aus den Bahnen $[0] = \{0\}$ und $[1] = [x] = \mathbb{R}^*$, $x \neq 0$, also aus zwei Elementen, und jede Umgebung von $[0] = \{0\}$ enthält auch $[1]$, d. h. der Quotientenraum $G \backslash X$ ist nicht hausdorffsch. Dieses Phänomen, daß Bahnen im Abschluß anderer Bahnen auftreten, müssen wir ausschließen, damit $G \backslash X$ überhaupt mit einer „vernünftigen“, d. h. hausdorffschen Topologie versehen werden kann.

Topologisch ist klar, was man dazu voraussetzen muß. Ist $G \backslash X$ hausdorffsch, so ist notwendig die Diagonale

$$\Delta = \{([x], [x]) : [x] \in G \backslash X\} \subset (G \backslash X) \times (G \backslash X)$$

abgeschlossen und umgekehrt. Also muß auch

$${}_G R := (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) \subset X \times X$$

abgeschlossen sein. ${}_G R$ ist gerade der Graph der durch G gegebenen Äquivalenzrelation $(x_1, x_2) \in {}_G R \iff [x_1] = [x_2] \iff x_2 = gx_1$ mit einem Element $g \in G$. In dem obigen Beispiel ist

$${}_G R = (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*) \cup \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

nicht abgeschlossen.

Wir wollen aber noch mehr: $G \backslash X$ soll eine *Mannigfaltigkeit* werden, und wir wollen *zusätzlich* verlangen, daß $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ eine *Submersion* wird. Dann ist auch $\pi \times \pi : X \times X \rightarrow (G \backslash X) \times (G \backslash X)$ eine Submersion, $\Delta \subset (G \backslash X) \times (G \backslash X)$ ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und damit auch

$${}_G R = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta) \subset X \times X.$$

Folgerung 14.1 *Damit $G \backslash X$ mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden kann, so daß $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ eine Submersion wird, ist notwendig, daß der Graph der Äquivalenzrelation*

$${}_G R \subset X \times X$$

eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit ist.

Definition und Bemerkung. Wir bezeichnen diese notwendige Bedingung für den Rest des Kapitels mit (*). Wir skizzieren weiter unten Schritte zum Beweis dafür, daß sie auch hinreichend ist.

Beispiel. Die Bedingung (*) ist i. a. nicht einmal für *endliche* Gruppen erfüllt. Es sei z. B. $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \subset \mathbb{R}^*$ und $X = \mathbb{R}$ mit der Aktion wie im obigen Beispiel. Dann ist

$${}_G R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x_2 = \pm x_1\}$$

²³Siehe den Anhang zu diesem Kapitel in Bezug auf die allgemeine Theorie der Gruppenoperationen.

zwar abgeschlossen in $X \times X$, aber keine Untermannigfaltigkeit. Also ist der topologische Raum $\mathbb{Z}_2 \setminus \mathbb{R}$ ein Hausdorff-Raum, kann aber nicht mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen werden. Der „störende“ Punkt in diesem Beispiel ist $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Für die Isotropiegruppen gilt hier $G_x = \{1\}$, $x \neq 0$, $G_0 = \mathbb{Z}_2$, d. h. die Operation ist *nicht frei* im Nullpunkt (siehe Anhang).

Unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen ist die Bedingung (*) automatisch erfüllt. Wir geben dazu die folgende

Definition. Eine Gruppe G operiert *eigentlich diskontinuierlich* auf dem (hausdorffschen) topologischen Raum X , wenn die Menge $\{g \in G : g(K) \cap L \neq \emptyset\}$ endlich ist für alle *kompakten* Teilmengen $K, L \subset X$. Insbesondere müssen dann alle Stabilisatorgruppen G_x endlich sein. Man beachte, daß *endliche* Gruppen G stets eigentlich diskontinuierlich operieren.

Beispiel. Das (ganzzahlige) Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ operiert auf \mathbb{C} durch *Translationen* vermöge $(m, n, z) \mapsto z + m + ni$. Diese Operation ist (frei und) eigentlich diskontinuierlich. Der Quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \mathbb{C}$ ist ein zweidimensionaler reeller Torus.

Satz 14.2 Operiert die Gruppe G frei und eigentlich diskontinuierlich, so ist die Bedingung (*) erfüllt.

Beweis. Übungsaufgabe.

Entscheidend ist nun der folgende

Satz 14.3 Ist für die Operation $G \times X \rightarrow X$ der Graph ${}_G R$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $X \times X$, so läßt sich der Quotientenraum $G \setminus X$ (eindeutig) so mit einer Mannigfaltigkeitsstruktur versehen, daß die kanonische Projektion $\pi : X \rightarrow G \setminus X$ eine Submersion wird.

Wir werden den *Beweis* nicht durchführen. Er basiert auf dem folgenden Satz, den man aus naheliegenden Gründen auch als den *Scheibensatz* bezeichnet. Man nennt die darin auftretende Untermannigfaltigkeit S eine *Scheibe* (englisch: „slice“). Sie parametrisiert (lokal) die Bahnen Gx .

Satz 14.4 Es sei (*) erfüllt. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine Umgebung $U = U(x_0)$, eine Untermannigfaltigkeit $S \subset U$ mit $x_0 \in S$ und eine Submersion $s : U \rightarrow S$, so daß

$$(x, s) \in (U \times S) \cap {}_G R \iff s = s(x).$$

Definition. Existiert für eine Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ eine solche *Mannigfaltigkeitsstruktur* auf $G \setminus X$, ist also ${}_G R \subset X \times X$ eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit, so nennen wir den Quotienten die *Bahnenmannigfaltigkeit* oder *Orbit-Mannigfaltigkeit* von X unter der Wirkung von G .

Als erste Anwendung untersuchen wir die Linksmultiplikation auf G durch eine Lie-Untergruppe H .

Satz 14.5 Ist $H \subset G$ eine Lie-Untergruppe von G , wobei H von links auf G durch die Multiplikation $H \times G \rightarrow G$ operiere, so existiert der Raum $H \setminus G$ der H -Rechtsnebenklassen als Bahnenmannigfaltigkeit. Die Gruppe G operiert kanonisch von rechts auf diesem, und es gilt

$$\dim(H \setminus G) = \dim G - \dim H.$$

Ist H sogar ein Normalteiler in G , so ist $H \setminus G \cong G/H$ eine Liegruppe.

Beweis. Es ist $R = \{(x, y) \in G \times G : y \in Hx\}$, d. h. $(x, y) \in R \iff x^{-1}y \in H$. Nun ist die Abbildung $(x, y) \mapsto x^{-1}y$ von $G \times G \rightarrow G$ eine Submersion (Teil ii) in Satz 13.6) und folglich das Urbild von $H \subset G$, also R , eine Untermannigfaltigkeit von $G \times G$. Da $H \subset G$ abgeschlossen ist, so ist auch R abgeschlossen. – Den Rest überlassen wir dem Leser. \square

Beispiel. G sei eine Liegruppe, $H \subset G$ ein diskreter Normalteiler. Dann ist $G \rightarrow G/H$ eine differenzierbare Überlagerung von Mannigfaltigkeiten.

Im Anhang zeigen wir, daß es bei einer Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ zu jedem $x \in X$ eine kanonische Bijektion $\bar{p} : G/G_x \rightarrow Gx$ gibt, die das folgende Diagramm kommutativ macht (hierbei ist G_x die Stabilisatorgruppe von G in x):

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \psi \swarrow & & \searrow p \\ G/G_x & \xrightarrow{\bar{p}} & Gx \end{array}$$

Existiert der Quotient $G \backslash X$ als Bahnenmannigfaltigkeit, so sind tatsächlich alle Räume in diesem Diagramm auf kanonische Weise mit der Struktur einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit versehen, und die in Rede stehende Bijektion \bar{p} ist ein Diffeomorphismus. Wir zeigen genauer den folgenden

Satz 14.6 *Existiert der Quotient $G \backslash X$ als Bahnenmannigfaltigkeit, so hat man die folgenden Aussagen:*

- i) G_x ist eine Lie-Untergruppe von G ;
- ii) die kanonische Projektion ψ von G in die Bahnenmannigfaltigkeit G/G_x ist eine surjektive Submersion von konstantem Rang;
- iii) die Bahn Gx ist eine Untermannigfaltigkeit von X ;
- iv) die Projektion $p : G \rightarrow Gx$ ist eine surjektive Submersion von konstantem Rang;
- v) die Abbildung $\bar{p} : G/G_x \rightarrow Gx$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis. Da der Bahnenraum $G \backslash X$ als Mannigfaltigkeit existiert, ist mit der Projektion $\pi : X \rightarrow G \backslash X$ jede Faser $\pi^{-1}([x]) = Gx$, also jede Bahn, eine Untermannigfaltigkeit von X , da π nach Voraussetzung eine Submersion ist. Dies beweist iii). Betrachte als nächstes bei festem $x \in X$ die Abbildung $p = p_x : G \rightarrow X$, $h \mapsto hx$. Für jedes $g \in G$ hat man dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\gamma_g} & G \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\varphi_g} & X \end{array}$$

und damit das kommutative Diagramm von Tangentialräumen

$$\begin{array}{ccc} T_{G,e} & \xrightarrow{(d\gamma_g)_e} & T_{G,g} \\ (dp)_e \downarrow & & \downarrow (dp)_g \\ T_{X,x} & \xrightarrow{(d\varphi_g)_x} & T_{X,gx} \end{array}$$

Die waagerechten Abbildungen sind Isomorphismen, da γ_g und φ_g Diffeomorphismen sind. Also ist der Rang von dp konstant und damit $p : G \rightarrow X$ eine Subimmersion von konstantem Rang, womit $G_x = p^{-1}(x)$ eine (abgeschlossene) Untermannigfaltigkeit von G und als Untergruppe sogar eine Lieuntergruppe von G wird und auch i) abgehakt werden kann. Da p als Abbildung $G \rightarrow Gx$ surjektiv ist, ist p als solche eine Submersion von konstantem Rang. Da ii) nunmehr nach Satz 5 automatisch erfüllt ist, brauchen wir uns nur noch um v) zu kümmern. Da Submersionen offene Abbildungen sind, folgt aus unseren Ausführungen über die Quotiententopologie zu Anfang des Kapitels unmittelbar, daß die bijektive Abbildung \bar{p} stetig und *offen* ist, also auch ihre Umkehrabbildung diese Eigenschaften besitzt. Wegen des lokalen Umkehrsatzes braucht man damit nur noch die Differenzierbarkeit von \bar{p} zu zeigen. Dies folgt aus einem allgemeinen Resultat, das wir anschließend formulieren und beweisen. \square

Satz 14.7 *Ist in dem kommutativen Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ q \swarrow & & \searrow p \\ X & \xrightarrow{\bar{p}} & Y \end{array}$$

von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten und stetigen Abbildungen q eine surjektive Submersion, so ist \bar{p} genau dann differenzierbar, wenn dies auf p zutrifft.

Beweis. Wir brauchen nur einzusehen, daß \bar{p} differenzierbar ist, wenn p diese Eigenschaft hat. Da Differenzierbarkeit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir annehmen, daß Z von der Form $X \times W$ ist und q die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. In entsprechenden lokalen Koordinaten (x, w) ist dann

$$p(x, w) = \bar{p}(x),$$

d. h. p hängt nicht von den w -Variablen ab und ist somit genau dann differenzierbar, wenn \bar{p} differenzierbar ist. \square

Bemerkung. Man kann einen Teil der Aussagen in Satz 6 auch unter schwächeren Bedingungen erhalten (siehe z. B. [14], Band 3, Satz 16.10.7): Die Existenz des Diffeomorphismus

$$\bar{p} : G/G_x \longrightarrow Gx$$

ist schon dann gesichert, wenn man von dem Orbit Gx nur weiß, daß er *lokal abgeschlossen* in X ist.

Wir notieren abschließend noch den einfach zu beweisenden

Satz 14.8 *Existieren die Bahnenmannigfaltigkeiten $G \backslash X$, $G' \backslash X'$, so existiert auch der Quotient $(G \times G') \backslash (X \times X')$ des Produktes als Bahnenmannigfaltigkeit, und es gilt*

$$(G \times G') \backslash (X \times X') \cong (G \backslash X) \times (G' \backslash X').$$

Bemerkung. Es wird dem Leser aufgefallen sein, daß in allen Symbolen, die im Zusammenhang mit einer *Linksoperation* der Gruppe G eingeführt wurden, der Buchstabe „ G “ stets auf der linken Seite steht: Gx , $G \backslash X$, G/G_x .

Anhang: Gruppenaktionen

Wir besprechen in diesem Anhang die *allgemeine* Theorie der *Gruppenaktionen* oder *Gruppenwirkungen*. Es sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und G eine Gruppe. Wir wollen die Aussage präzisieren, daß G als eine *Gruppe von Automorphismen* auf X wirkt.

Definition. Eine (*Links-*) *Operation* von G auf X (oder *Operation von links*) ist eine Abbildung

$$\begin{cases} G \times X \longrightarrow X \\ (g, x) \longmapsto g \cdot x \end{cases}$$

mit $e \cdot x = x$ und $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ für alle $x \in X$ und alle $g_1, g_2 \in G$.

Entsprechend ist eine *Operation von rechts* eine Abbildung

$$\begin{cases} X \times G \longrightarrow X \\ (x, g) \longmapsto x \cdot g \end{cases}$$

mit $x \cdot e = x$ und $x \cdot (g_1 g_2) = (x \cdot g_1) \cdot g_2$.

Beispiel. Es bezeichne $\text{Aut } X$ die Menge aller *bijektiven* Abbildungen $\varphi : X \rightarrow X$ mit der Aktion

$$\begin{cases} \text{Aut } X \times X \longrightarrow X \\ (\varphi, x) \longmapsto \varphi(x). \end{cases}$$

Dann ist die Bedingung für eine Linksoperation erfüllt (mit $e = \text{id}_X$), wenn man die Verknüpfung in $\text{Aut } X$ durch

$$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$$

definiert. Wir werden i. f. *diese* Gruppenstruktur von $\text{Aut } X$ (auch für Untergruppen) zu Grunde legen.

Im Prinzip kann man sich auf Linksoperationen beschränken. Dies folgt aus dem nachstehenden Lemma. Da aber oft Rechts- und Linksoperationen derselben Gruppe gleichzeitig nebeneinander auftreten, und zwar in natürlicher Weise, sollte man beide Begriffe zur Hand haben.

Lemma 14.9 *Jede Links- (bzw. Rechts-) Operation von G auf X entspricht in eindeutiger Weise einer Rechts- (bzw. Links-) Operation von G^{op} .*

Beweis. Es bezeichne $*$ die Gruppenverknüpfung auf G^{op} , also $g_2 * g_1 = g_1 g_2$, $g_1, g_2 \in |G| = |G^{\text{op}}|$. Dann ist das Einselement $e \in G$ auch neutral in G^{op} , und ist eine Linksoperation $(g, x) \mapsto g \cdot x$ von $G \times X$ gegeben, so definiere man $X \times G^{\text{op}} \rightarrow X$ durch $x * g = g \cdot x$. Es gilt dann $x * e = e \cdot x = x$ und, wie gewünscht,

$$x * (g_1 * g_2) = (g_1 * g_2) x = (g_2 g_1) x = g_2 (g_1 x) = (x * g_1) * g_2. \quad \square$$

Bemerkung. Will man also $\text{Aut } X$ auf X von *rechts* operieren lassen, so muß man eigentlich genauer $(\text{Aut } X)^{\text{op}}$ betrachten, d. h. die Menge $\text{Aut } X$ mit der Verknüpfung $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \circ \varphi_1$ versehen.

Bemerkung. Die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist ein Gruppen-Isomorphismus von G nach G^{op} . Will man aus einer G -Linksoperation eine G -Rechtsoperation machen, so muß man folglich

$$x * g := g^{-1} x$$

setzen. Es ist von daher nicht verwunderlich, daß beim Zusammentreffen von Operationen verschiedener Händigkeit und dem Bemühen, sie auf eine Seite zu ziehen, die Inversenbildung auf natürliche Weise ins Spiel kommt.

Satz 14.10 *Es sei $G \times X \rightarrow X$ eine Linksoperation. Dann wird für jedes $g \in G$ durch*

$$\varphi_g(x) = gx$$

ein Element $\varphi_g \in \text{Aut } X$ definiert, und die Abbildung

$$(*) \quad \varphi : \begin{cases} G \longrightarrow \text{Aut } X \\ g \longmapsto \varphi_g \end{cases}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Umgekehrt definiert jeder Gruppenhomomorphismus $(*)$ eine Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ durch $(g, x) \mapsto \varphi_g(x) =: g \cdot x$.

Beweis. Es gilt für alle $x \in X$, $g_1, g_2 \in G$:

$$\varphi_{g_1 g_2}(x) = (g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 x) = \varphi_{g_1}(\varphi_{g_2}(x)),$$

also $\varphi_{g_1 g_2} = \varphi_{g_1} \circ \varphi_{g_2}$. Außerdem ist $\varphi_e = \text{id}_X$. Somit ist insbesondere

$$\varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_{g^{-1}g} = \varphi_e = \text{id}_X,$$

d. h. $\varphi_g \in \text{Aut } X$ und $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$. Der Rest ergibt sich von selbst. \square

Bemerkung. Rechtsoperationen von G auf X entsprechen nach demselben Muster Gruppenhomomorphismen

$$G \longrightarrow (\text{Aut } X)^{\text{op}} \quad \text{oder} \quad G^{\text{op}} \longrightarrow \text{Aut } X.$$

Hat nun X noch mehr Struktur, so wird man verlangen, daß die Abbildung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } X$ ihr Bild in einer geeigneten Untergruppe von $\text{Aut } X$ hat. Ist z. B. X ein *topologischer* Raum, so sagt man, G operiere auf X vermöge $G \times X \rightarrow X$ durch *Homöomorphismen*, wenn $\varphi(G) \subset \mathcal{C}^0(X, X)$, oder entsprechend - bei einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X - durch *Diffeomorphismen*, wenn $\varphi(G) \subset \mathcal{C}^\infty(X, X)$, und schließlich, bei einem Vektorraum E , *linear*, wenn $\varphi(G) \subset \text{GL}(E)$. Nun kann aber auch G noch mehr Struktur besitzen, und man möchte dann gegebenenfalls erreichen, daß die Abhängigkeit des Automorphismus φ_g von g noch eine Rolle spielt. Dies drückt sich am besten durch die ursprüngliche Definition aus.

Definition. Hat man für eine *Liegruppe* G und eine *Mannigfaltigkeit* X eine *differenzierbare* Linksoperation $G \times X \rightarrow X$, so sagt man, G operiere als *Liegruppe* (oder *differenzierbar*) auf X . Insbesondere ist dann $\varphi_g \in \mathcal{C}^\infty(X, X)$ für alle $g \in G$. Aber man hat zusätzlich noch differenzierbare Abhängigkeit von $g \in G$!

Eine Gruppe (speziell eine Liegruppe) G operiert auf sich selbst in vielfältiger Weise. Man hat z. B. die Multiplikation $m : G \times G \rightarrow G$ und kann diese als Abbildungen

$$G \times |G| \longrightarrow |G| \quad \text{bzw.} \quad |G| \times G \longrightarrow |G|$$

auffassen, die man sofort als Links- bzw. Rechtsoperation von G auf $|G|$ entlarvt. Im ersten Fall ist dann für $g \in G$, $x \in |G|$:

$$\varphi_g(x) = gx = \gamma_g(x), \quad \text{also} \quad \varphi_g = \gamma_g$$

die Linkstranslation mit g , und entsprechend ist im zweiten Fall die zugeordnete Abbildung die Rechts-translation $\delta_{g^{-1}}$ mit g . Schreibt man die *Konjugation* in der Form $|G| \times G \longrightarrow |G|$, $(x, g) \mapsto g^{-1} x g$, so ist auch dies eine Operation (von rechts). Sie wird eine Operation von links, wenn man stattdessen $(g, x) \mapsto g x g^{-1}$ betrachtet.

Ist nun wieder $G \times X \rightarrow X$ eine beliebige Linksoperation, so hat man eine natürliche Äquivalenzrelation auf X :

$$x_1 G \sim x_2 \iff \exists g \in G \quad \text{mit} \quad x_2 = g \cdot x_1.$$

Die Äquivalenzklassen $[x]$ sind dann die *Bahnen*

$$[x] := Gx = \{y = g \cdot x : g \in G\}$$

eines Elements x unter der Aktion von G . Man nennt $[x] = Gx$ auch den *Orbit* von x unter der Aktion von G , und

$$G \backslash X := X/G \sim = \{[x] : x \in X\}$$

den *Bahnenraum* oder *Orbitraum* von X nach G . Hat man eine Rechtsoperation, so bezeichnet man die Bahnen sinnvollerweise mit xG und den Bahnenraum mit X/G .

Beispiel. Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so liefert die natürliche *Links*-Wirkung $H \times |G| \rightarrow |G|$ von H auf G durch Multiplikation die Bahnen Hx , die man in der Gruppentheorie als *Rechts*-Nebenklassen bezeichnet. Somit ist in diesem Spezialfall

$$H \backslash G = \{Hx : x \in G\}.$$

Entsprechend ist G/H die Menge der *Links*-Nebenklassen.

Für jede Bahn Gx ist die Abbildung $G \rightarrow Gx$, $g \mapsto gx$, surjektiv nach Definition. Man bilde nun $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$. Wir sehen schnell, daß $G_x \subset G$ eine *Untergruppe* von G ist: Für $g \in G_x$ folgt aus $g \cdot x = x$ sofort $g^{-1} \cdot x = g^{-1}(g \cdot x) = e \cdot x = x$, also $g^{-1} \in G_x$. Entsprechend ist für $g_1, g_2 \in G_x$ auch $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$, also $g_1 g_2 \in G_x$. Damit ist G_x tatsächlich eine Untergruppe von G .

Definition. G_x heißt die *Stabilisatorgruppe* oder *Isotropiegruppe* von G im Punkte $x \in X$.

Satz 14.11 *Liegen x_1 und x_2 in derselben Bahn, so sind G_{x_1} und G_{x_2} in G konjugiert, insbesondere isomorph. Man hat für alle $x \in X$ eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der Linksnebenklassen G/G_x und der Bahn Gx .*

Beweis. Es gelte $x_1 G \sim x_2$, also $x_2 = h \cdot x_1$, $h \in G$. Ist dann $g \in G_{x_1}$, so ist

$$(hgh^{-1}) \cdot x_2 = (hg) \cdot x_1 = h \cdot (gx_1) = h \cdot x_1 = x_2,$$

also $hgh^{-1} \in G_{x_2}$. Dieses Argument funktioniert auch in der umgekehrten Richtung, so daß

$$hG_{x_1}h^{-1} = G_{x_2}.$$

Ist weiter $\bar{g} = gG_x \in G/G_x$, also $\bar{g} = \{gh : h \in G_x\}$, so gilt wegen

$$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x,$$

daß die Abbildung $G \rightarrow Gx$ über die (surjektive) Quotientenabbildung $G \rightarrow G/G_x$ faktorisiert. Somit gewinnen wir eine Abbildung

$$\begin{cases} G/G_x & \longrightarrow Gx \\ \bar{g} & \longmapsto gx, \end{cases}$$

die automatisch surjektiv ist. Sie ist aber auch injektiv: Ist nämlich $g_1 x = g_2 x$, so folgt

$$(g_1^{-1} g_2) \cdot x = g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = g_1^{-1} \cdot (g_1 x) = e \cdot x = x,$$

also $g_1^{-1} g_2 \in G_x$, d. h. $g_2 \in g_1 G_x$ und damit $\bar{g}_2 = \bar{g}_1$. □

Die triviale Operation $G \rightarrow \{\text{id}_X\} \subset \text{Aut } X$ zeigt, daß Gruppenoperationen sehr „ineffektiv“ sein können.

Definition und Bemerkung. Eine Linksoperation $G \times X \rightarrow X$ heißt *effektiv*, wenn $g \cdot x = x$ für alle $x \in X$ zur Folge hat, daß $g = e$. Man sieht unmittelbar, daß diese Bedingung zu der *Injektivität* der kanonischen Abbildung $\varphi : G \rightarrow \text{Aut } X$ äquivalent ist. Es ist somit klar, daß man aus *jeder* Gruppenoperation von G auf X eine *effektive* Operation von $\bar{G} = G / \ker \varphi$ (mit den gleichen Bahnen) machen kann.

Folgerung 14.12 *Ist X endlich und operiert G effektiv auf X , so ist auch G notwendig endlich.*

Denn dann ist G Untergruppe der *endlichen* Permutationsgruppe $\text{Aut } X$. □

Es sei nun G für einen Moment *endlich*, X beliebig. Dann ist auch jede Bahn Gx endlich, und es gilt der folgende

Satz 14.13 (Lagrange) *Für alle $x \in X$ gilt*

$$\text{ord } G = \text{ord } G_x \cdot \text{ord } Gx .$$

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $\text{ord } Gx = \text{ord}(G/G_x)$. Nach einem Satz von LAGRANGE ist aber für eine beliebige Untergruppe H von G die Ordnung $\text{ord } H$ ein Teiler von $\text{ord } G$, und $\text{ord } G / \text{ord } H$ ist die Anzahl der Links-Nebenklassen gH . □

Beispiel. Es sei G die Symmetriegruppe des *Ikosaeders*. Dann ist

$$\text{ord } G = \text{ord } G_x \cdot \text{ord } Gx = 5 \cdot 12 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 ,$$

je nachdem, ob man für x einen *Eckpunkt*, einen *Flächenmittelpunkt* oder einen *Kantenmittelpunkt* wählt. Tatsächlich ist $G \cong \mathfrak{A}_5$.

Offensichtlich liegt eine spezielle Situation vor, wenn stets $G_x = \{e\}$ ist, d. h. wenn $g \cdot x = x$ nur für $g = e$ möglich ist.

Definition. Die Operation $G \times X \rightarrow X$ heißt *frei* (oder genauer: *fixpunktfrei*), wenn für alle $x \in X$ und $g \in G$ aus $g \cdot x = x$ folgt, daß $g = e$.

Beispiel. Ist $X = |G|$ und $G \times X \rightarrow X$ die Operation von G durch Linkstranslation auf sich selbst, d. h.

$$(g, x) \mapsto gx ,$$

so gilt $gx = x$ für ein $x \in X = |G|$ genau dann, wenn $g = e$. Also ist die Linkstranslation, ebenso wie die Rechtstranslation, eine *freie* Operation.

Bemerkung. Ist $G \times X \rightarrow X$ eine Operation von G auf X , und ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so wird hierdurch offensichtlich eindeutig eine Operation $H \times X \rightarrow X$ induziert. Ist die ursprüngliche Operation frei, so auch die von H .

Beispiel. Es sei $\omega \in \mathbb{C}$, $\text{Im } \omega > 0$, und $\Gamma = \{n_1 + n_2\omega : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$. Γ operiert auf \mathbb{C} vermöge $(\gamma, z) \mapsto z + \gamma$, $z \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \Gamma$. Man sieht sofort, daß Γ *frei* auf \mathbb{C} operiert.

Satz 14.14 *Operiert die endliche Gruppe G frei auf X , so haben alle Bahnen Gx die gleiche Kardinalität $\text{ord } G$.*

Beweis. Wegen $G_x = \{e\}$ und $G \cong G/G_x \xrightarrow{\sim} Gx$ trivial. □

Beispiel (RUBIKS Würfel). Es sei X die Menge aller *denkbaren* Muster auf dem klassischen $3 \times 3 \times 3$ -Würfel (bei festgehaltenem zentralen Achsenkreuz), d. h. die Menge aller möglichen Muster nach

„mechanischem Auseinandernehmen“ und willkürlicher erneuter Zusammensetzung unter Beibehaltung der räumlichen Lage des aus den „Flächenmittelteilen“ bestehenden „Gerippes“. Man überlegt sich leicht, daß dies eine *endliche* Menge der Ordnung N ist, wobei

$$\begin{aligned} N &= (8 \cdot 3)(7 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 3) \cdot (12 \cdot 2) \cdot (11 \cdot 2) \cdot \dots \cdot (1 \cdot 2) = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12} \\ &= 519.024.039.293.878.272.000 . \end{aligned}$$

Die (effektiven) Spielzüge auf dem Würfel bilden offensichtlich eine (endliche) Gruppe G . Es ist (zumindest anschaulich) klar, daß G *frei* operiert. Also haben *alle* Orbits die *gleiche* Länge $\text{ord } G$, die ein Teiler von N sein muß. Insbesondere ist $\text{ord } G$ die Anzahl der Muster, die man aus der Ausgangsstellung durch *erlaubte* Spielzüge erzielen kann, also nur durch Drehen der Seitenflächen (und nicht durch Auseinandernehmen und Zusammensetzen). Wir müssen zur Bestimmung derselben die Mächtigkeit des *Bahnenraumes* X/G berechnen. Nun ist jeder elementare Spielzug eine ungerade Permutation der „Eckenkubies“ und „Kantenkubies“ gleichzeitig. Dies impliziert, daß wir mindestens zwei solcher Bahnen haben müssen. Ähnliche Überlegungen zeigen, daß bei Festhalten von 7 Eckenkubies die Orientierung des achten festgelegt ist und bei Festhalten von 11 Kantenkubies auch die Orientierung des zwölften. Damit haben wir insgesamt mindestens

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Bahnen. Mit elementaren Gruppenoperationen wie Konjugation und Kommutatorbildung überlegt man sich leicht, daß X *genau* in diese 12 Bahnen zerfällt, womit man auch ein algorithmisches Verfahren zur Wiederherstellung des Grundmusters gewinnt. Oder anders ausgedrückt: Wird der Würfel willkürlich zusammengesetzt, so ist die Wahrscheinlichkeit, ihn wieder durch erlaubte Spielzüge in die Ausgangsstellung zurückführen zu können, gleich $1/12$. Insbesondere ist die Anzahl der erzielbaren Muster auf Rubik's Würfel gleich

$$\text{ord } G = N/12 = 43.252.003.274.489.856.000$$

(in Worten: 43 Quadrillionen 252 Trilliarden 3 Trillionen 274 Milliarden 489 Millionen 856 Tausend).

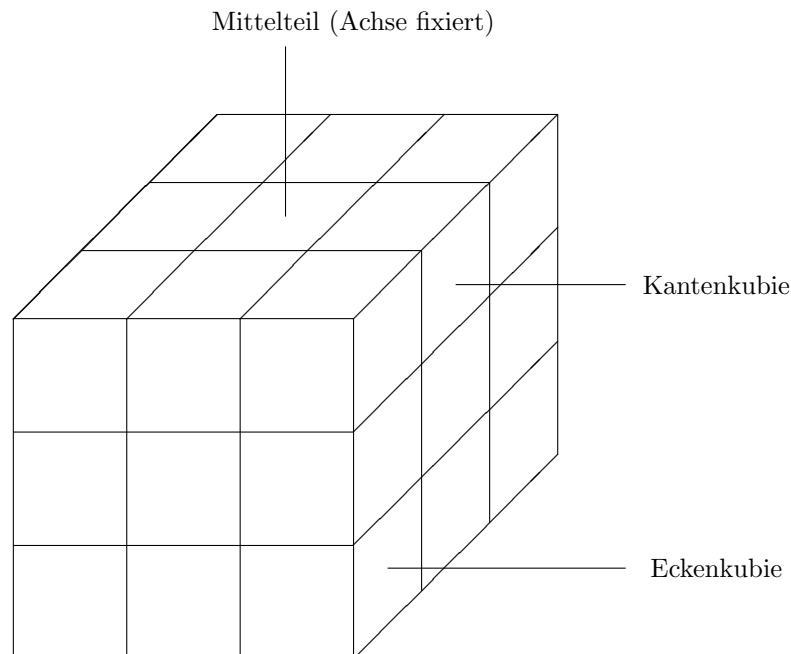


Figure 14.1

15 Homogene Räume

Die Liegruppe G operiere nun von links (differenzierbar und) *transitiv* auf X , d. h. für alle $x, y \in X$ existiert ein $g \in G$ mit $gx = y$. Der Relationengraph ${}_G R$ der Operation ist dann gleich $X \times X$, so daß die Bedingung (*) aus dem letzten Kapitel erfüllt ist. Wir können somit die Hauptergebnisse des letzten Paragraphen anwenden und insbesondere schließen, daß als differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit G -Linksaktion

$$X \cong G/G_x$$

gilt, wobei auf der rechten Seite G_x die Stabilisatoruntergruppe eines beliebigen Punktes $x \in X$ bezeichnet und G/G_x die Bahnenmannigfaltigkeit der Linksnebenklassen von G_x in G mit der kanonischen G -Linksaktion (siehe Satz 14. 6).

Definition. Eine Mannigfaltigkeit X mit einer solchen Gruppenaktion heißt ein *homogener Raum*.

Es ist das Hauptanliegen dieses Kapitels, einige klassische Mannigfaltigkeiten vorzustellen und als homogene Räume zu erkennen, also in der Form G/G_x darzustellen. Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen.

Beispiele. 1. Es sei $X = \mathbb{A}^n$ der n -dimensionale *affine Raum*, auf dem die Gruppe T der *Translationen* transitiv operiert. T ist eine abelsche Lie-Gruppe, die mit der additiven Gruppe von \mathbb{R}^n identifiziert werden kann. Nach Wahl eines festen Punktes $x \in \mathbb{A}^n$ hat man dann eine kanonische Isomorphie $\mathbb{A}^n \cong T$, also die übliche Identifikation von \mathbb{A}^n mit \mathbb{R}^n .

2. Es sei \mathbb{E}^n der n -dimensionale euklidische Raum. Auf diesem operiert - nach Wahl eines festen Punktes $x \in \mathbb{E}^n$, wodurch der euklidische Raum mit dem *euklidischen* Vektorraum \mathbb{R}^n identifiziert werden kann - die Gruppe $G = O(n, \mathbb{R})$. Diese Wirkung ist jedoch nicht transitiv, da sie einen Fixpunkt besitzt. Die Einschränkung der Wirkung auf die *Einheitssphäre* $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ist dagegen transitiv. Es sei $x \in S^{n-1}$ fest gewählt, und es bezeichne $E_x \cong \mathbb{R}^{n-1}$ die zu x senkrechte Ebene durch den Ursprung, die wir mit der induzierten euklidischen Struktur versehen. Die Stabilisatoruntergruppe G_x ist dann offensichtlich isomorph zu der orthogonalen Gruppe von E_x , also zu $O(n-1, \mathbb{R})$. Wählt man speziell x als den „Nordpol“ der Sphäre, also $x = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, so wird auf diese Weise $O(n-1, \mathbb{R})$ als Untergruppe von $O(n, \mathbb{R})$ derart realisiert, daß man ihre Elemente A auffaßt als die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n, \mathbb{R}).$$

Es folgt für S^{n-1} die Beschreibung als homogener Raum in der Form

$$S^{n-1} = O(n, \mathbb{R}) / O(n-1, \mathbb{R}).$$

Wir wollen dieses Beispiel im folgenden als Prototyp zur Konstruktion weiterer wichtiger homogener Räume heranziehen. Es sei dazu V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum der Dimension n , und $S_2 = S_2 V^*$ bezeichne den Vektorraum der *symmetrischen Bilinearformen*

$$B: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aus der Beschreibung solcher Bilinearformen durch symmetrische Matrizen haben wir schon früher die Dimensionsformel

$$\dim S_2 V^* = \frac{1}{2} n(n+1)$$

gewonnen. Als endlich-dimensionaler Vektorraum trägt $S_2 V^*$ eine kanonische Topologie (unabhängig von einer gewählten Norm).

Wir wollen nun die Teilmenge aller symmetrischen Bilinearformen mit fester *Signatur* untersuchen. Wir setzen daher für fest gewählte p, q mit $p+q \leq n$:

$$S_2^{p,q} = \{ B \in S_2 V^* : B \text{ hat die Signatur } (p, q) \}.$$

Betrachten wir nur die *nicht ausgearteten* symmetrischen Bilinearformen, d. h. die Räume $S_2^{p,q}$ mit $p + q = n$, so bilden diese tatsächlich Mannigfaltigkeiten aufgrund des nachfolgenden Lemmas.

Lemma 15.1 Für alle (p, q) mit $p + q = n$ ist $S_2^{p,q}$ eine offene Teilmenge von $S_2 V^*$.

Beweis. Zu vorgegebenem $B_0 \in S_2$ gibt es eine Zerlegung $V = V_+ \oplus V_-$ von V in Unterräume der Dimension p bzw. q , s. d. B_0 auf V_+ positiv definit und auf V_- negativ definit ist. Für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ auf V ist dann mit geeigneten Konstanten $a > 0$, $b > 0$:

$$B_0(x, x) \geq a \|x\|^2, \quad x \in V_+, \quad B_0(x, x) \leq -b \|x\|^2, \quad x \in V_-.$$

Ist nun C eine hinreichend „kleine“ Form, d. h.

$$|C(x, x)| \leq \frac{1}{2} \inf(a, b) \|x\|^2$$

auf der Einheitskugel in V (und damit auch auf ganz V), so folgt für $B = B_0 + C$, daß

$$B(x, x) \geq \frac{1}{2} a \|x\|^2, \quad x \in V_+, \quad B(x, x) \leq -\frac{1}{2} b \|x\|^2, \quad x \in V_-.$$

Wegen des Sylvesterschen Trägheitssatzes hat auch B die Signatur (p, q) . □

Nachdem wir eine Mannigfaltigkeitsstruktur auf den $S_2^{p,q}$ gefunden haben, benötigen wir eine geeignete Gruppenoperation. Die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ operiert auf $S_2 V^*$: Ist $B \in S_2 V^*$ und $g \in \mathrm{GL}(V)$, so definiere man

$$(gB)(v_1, v_2) := B(g^{-1}v_1, g^{-1}v_2).$$

Wegen des Satzes über die Hauptachsentransformation und dem Sylvesterschen Trägheitssatz sind genau die $S_2^{p,q}$ die Bahnen dieser Aktion. Insbesondere operiert die Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ transitiv auf jedem dieser Räume, womit sie schon als homogene Räume (im Falle $p + q = n$) erkannt sind. Aus Satz 14.6 gewinnt man die Beschreibung

$$S_2^{p,q} \cong \mathrm{GL}(V) / \mathrm{GL}(V)_B$$

mit der Stabilisatoruntergruppe

$$\mathrm{GL}(V)_B = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : gB = B\}$$

eines beliebigen Elementes $B \in S_2^{p,q}$ und die Dimensionsformel

$$\dim \mathrm{GL}(V)_B = n^2 - \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} n(n-1).$$

Schreibt man die Bedingung $gB = B$ mit Hilfe der Definition der Gruppenwirkung von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ auf Bilinearformen aus, so erhält man

$$\mathrm{GL}(V)_B = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : B(gv_1, gv_2) = B(v_1, v_2) \text{ für alle } v_1, v_2 \in V\}.$$

Man nennt diese Gruppe daher auch die *orthogonale Gruppe* zu der nichtausgearteten Bilinearform B und bezeichnet sie mit $\mathrm{O}(B)$. Die gewöhnliche orthogonale Gruppe tritt als Spezialfall der orthogonalen Gruppe zu dem euklidischen Standard-Skalarprodukt auf.

Eine ausgezeichnete symmetrische Bilinearform mit Signatur (p, q) wird bei festgehaltener Basis von V gegeben durch die Diagonalmatrix

$$B_{p,q} := \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q).$$

Die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(B_{p,q})$ läßt sich als Lie-Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}(V)$ realisieren; man bezeichnet sie mit $\mathrm{O}(p, q, \mathbb{R})$ oder einfach $\mathrm{O}(p, q)$. Ist $q = 0$, so ist $\mathrm{O}(n, 0, \mathbb{R}) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ die

orthogonale Gruppe, bei $p = n - 1$, $q = 1$ hat man die *Lorentz-Gruppe* $O(n - 1, 1)$.

Bemerkung. Entsprechende Definitionen machen auch für komplexe Vektorräume Sinn, wenn man statt symmetrischer Bilinearformen *hermitesche Sesquilinearformen* betrachtet. Dies führt zu den Gruppen $U(B)$, $U(p, q)$, $U(n)$. Die Determinante $\det : U(n) \rightarrow U(1) \cong \mathbb{C}^*$ liefert ferner noch die *speziellen unitären* Gruppen. Natürlich ist $SO(1) = SU(1) = \{1\}$ die triviale Gruppe.

Bemerkung. Die Lorentz-Gruppe besitzt vier Zusammenhangskomponenten, die alle physikalische Relevanz besitzen. Ähnliches ist für alle Gruppen $O(p, q)$ richtig. Von daher ist es nicht vernünftig, die *speziellen* orthogonalen Gruppen $SO(p, q)$ als die Durchschnitte der orthogonalen Gruppen mit der speziellen linearen Gruppe zu definieren, sondern als die *Zusammenhangskomponente* der Eins in $O(p, q)$. Diese Definition ist dann in Konkordanz mit der üblichen Definition im Falle $q = 0$. Die *DE SITTER-Raumzeit* der allgemeinen Relativitätstheorie ist der homogene Raum $SO(1, 4)/SO(1, 3)$, und der *Anti-DE SITTER-Raum* ist isomorph zu $SO(2, 3)/SO(1, 3)$.

Wir können mit den orthogonalen Gruppen weitere homogene Räume beschreiben. Es sei wieder \mathbb{E}^n der n -dimensionale euklidische Raum, evtl. nach Auszeichnung eines Ursprungs identifiziert mit dem euklidischen \mathbb{R}^n , und für $1 \leq p \leq n$ sei $S_{n,p}$ der Raum der „*orthonormalen p -Beine*“ in \mathbb{R}^n :

$$S_{n,p} = \{ (v_1, \dots, v_p) \in V \times \dots \times V : \langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk} \},$$

also die Menge aller orthonormalen Basen von p -dimensionalen Unterräumen von \mathbb{R}^n . Für $p = 1$ ist dies natürlich nichts anderes als die Einheitskugel S^{n-1} . Offensichtlich operiert die orthogonale Gruppe $G = O(n)$ transitiv auf $S_{n,p}$ durch Anwendung einer orthogonalen Transformation auf jeden Vektor v_j in einem p -Bein (v_1, \dots, v_p) . Wähle nun eine Orthonormalbasis e_1, \dots, e_n von \mathbb{R}^n und zeichne das spezielle p -Bein $x = (e_1, \dots, e_p)$ aus. Dann ist $G_x = O(n - p)$, aufgefaßt als orthogonale Gruppe des euklidischen Unterraums $\langle e_{p+1}, \dots, e_n \rangle \cong \mathbb{R}^{n-p}$. Damit wird in Verallgemeinerung der Beschreibung von S^{n-1} als homogener Raum:

$$S_{n,p} = O(n) / O(n - p),$$

wobei wieder $O(n - p)$ durch geeignetes „Auffüllen“ der Matrizen als Untergruppe von $O(n)$ zu realisieren ist. Man zeigt zudem leicht, daß die Inklusion $SO(n) \subset O(n)$ eine weitere Isomorphie liefert:

$$S_{n,p} = SO(n) / SO(n - p), \quad 1 \leq p \leq n - 1.$$

Definition. $S_{n,p}$ heißt die (reelle) *STIEFEL-Mannigfaltigkeit* der orthonormalen p -Beine (oder auch „ *p -frames*“) in \mathbb{E}^n . Es ist $S_{n,n} \cong O(n, \mathbb{R})$ und $S_{n,1} \cong S^{n-1}$. Entsprechend hat man für die *komplexen* Stiefel-Mannigfaltigkeiten

$$S_{n,p}(\mathbb{C}) = U(n, \mathbb{C}) / U(n - p, \mathbb{C}) \cong SU(n, \mathbb{C}) / SU(n - p, \mathbb{C}), \quad 1 \leq p \leq n - 1.$$

Ohne Beweis geben wir das folgende Resultat an.

Satz 15.2 Die Gruppen $SO(n, \mathbb{R})$, $SU(n, \mathbb{C})$, $U(n, \mathbb{C})$ sind zusammenhängend, $n \geq 1$. Die Stiefel-Mannigfaltigkeiten

$$S_{n,p}(\mathbb{C}), \quad 1 \leq p \leq n - 1, \quad S_{n,p}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq p \leq n - 1, \quad n \geq 2$$

sind zusammenhängend und kompakt.

Wir schließen noch einige Worte über die *GRASSMANNschen Mannigfaltigkeiten* an. Es sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum der Dimension n und

$$G_{n,p} = \{ E : E \subset V \text{ linearer Unterraum mit } \dim E = p \}.$$

Dies sind Verallgemeinerungen der *projektiven* Räume, da $\mathbb{P}_{n-1} \cong G_{n,1}$.

Versehen wir V mit der euklidischen Norm, so operiert $O(n)$ auf $G_{n,p}$ transitiv. Wie oben sieht man leicht, daß

$$G_{n,p} = O(n)/O(p) \times O(n-p),$$

wobei man die orthogonale Gruppe $O(p)$ „komplementär“ zu $O(n-p)$ in $O(n)$ einbetten muß, so daß $O(p) \times O(n-p)$ zu einer Untergruppe von $O(n)$ wird. Beachtet man noch, daß $(A, B) \in (O(p) \times O(n-p)) \cap SO(n) \iff \det A = \det B$, so findet man für die Graßmannschen auch die Darstellung

$$G_{n,p} = SO(n)/(O(p) \times O(n-p)) \cap SO(n).$$

Selbstverständlich operiert $O(p)$ auf $S_{n,p} = O(n)/O(n-p)$ von rechts auf kanonische Weise, und man gewinnt, da die Operationen von $O(p)$ und $O(n-p)$ miteinander vertauschen, eine Submersion

$$S_{n,p} \longrightarrow S_{n,p}/O(p) \cong O(n)/O(n-p) \times O(p) = G_{n,p},$$

deren Fasern diffeomorph zu $O(p)$ sind. Insbesondere sind auch die Graßmann–Mannigfaltigkeiten $G_{n,p}$ kompakt und zusammenhängend für $n \geq 1$ und $1 \leq p \leq n$. Für die Dimensionen der $S_{n,p}$ und $G_{n,p}$ rechnet man sofort nach, daß

$$\dim S_{n,p} = \frac{n}{2}(n-1) - \frac{n-p}{2}(n-p-1) = \frac{p}{2}(2n-p-1),$$

$$\dim G_{n,p} = \dim S_{n,p} - \dim O(p) = \frac{p}{2}(2n-p-1) - \frac{p}{2}(p-1) = p(n-p).$$

Für $p=1$ stimmt diese Formel mit $\dim \mathbb{P}_{n-1} = n-1$ überein. Man hat aber auch $\dim G_{n,p} = \dim G_{n,n-p}$. Die letzte Gleichheit beruht in Wahrheit auf der *Isomorphie* der beiden beteiligten Räume, die Ausdruck der üblichen *Dualität* in der *projektiven Geometrie* ist: nach Wahl einer euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^n hat man den kanonischen Diffeomorphismus

$$G_{n,p} \ni E_p \longmapsto E_p^\perp \in G_{n,n-p}.$$

Man kann auch leicht Karten für die Mannigfaltigkeit $G_{n,p}$ hinschreiben: Es sei Ξ eine beliebige Matrix in $M(p \times (n-p), \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{p(n-p)}$. Dann bildet

$$\mathbb{R}^{p(n-p)} \ni \Xi \longmapsto (\Xi, E_p)$$

eine Karte von $G_{n,p}$. Einen vollständigen Atlas bekommt man durch die Gesamtheit aller Karten, die man vermöge Vertauschung der Spalten in dieser speziellen Karte gewinnt.

Man beweist schließlich noch, wenn \mathbb{H} die Quaternionen–Algebra bezeichnet, die folgenden Diffeomorphismen.

Satz 15.3 $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}), \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ und $\mathbb{P}_1(\mathbb{H})$ sind diffeomorph zu S^1, S^2 bzw. S^4 .

Mit Hilfe der Graßmannschen läßt sich auch die Theorie der GAUSS–Abbildung für Hyperflächen leicht verallgemeinern: Es sei $X \subset \mathbb{E}^n$ eine p –dimensionale Untermannigfaltigkeit. Man hat dann sinnvollerweise

$$\gamma: X \longrightarrow G_{n,n-p}, \quad x \longmapsto T_{X,x}^\perp$$

als Gauß–Abbildung anzusehen oder auch die Abbildung $\varphi: X \rightarrow G_{n,p}, x \mapsto T_{X,x}$, die beide wegen der Isomorphie $G_{n,n-p} \cong G_{n,p}$ miteinander gleichberechtigt sind. Nun gibt es, wie auf dem projektiven Raum, auch auf $G_{n,p}$ das *tautologische* Bündel

$$L_{n,p} \subset \mathbb{R}^n \times G_{n,p}$$

der Paare $(E, [E])$, in denen $E \subset \mathbb{R}^n$ einen p –dimensionalen linearen Unterraum und $[E]$ den entsprechenden Punkt in $G_{n,p}$ bezeichnet. Diese Bündel sind *universell* in dem Sinne, daß

$$T_X \cong \varphi^* L_{n,p}, \quad N_X \cong \gamma^* L_{n,n-p}.$$

Man kann übrigens auch das Bündel $L_{n,n-p}$ nach $G_{n,p}$ transportieren. Es ist dann ein orthogonales Komplement zu $L_{n,p}$ in dem trivialen Bündel $\mathbb{R}^n \times G_{n,p}$ in dem Sinne, daß $L_{n,p} \oplus L_{n,n-p} \cong \mathbb{R}^n \times G_{n,p}$ und jede Fasersumme orthogonal ist bzgl. der fest gewählten euklidischen Struktur auf \mathbb{R}^n .

Index

A

- Abbildung
 - offene – 10
 - abgeschlossene
 - Einbettung 12
 - Untergruppe 119
 - Ableitung
 - kovariante – 103, 104, 106
 - Abzählbarkeitsaxiom
 - 2. – 1
 - Adjunktion
 - formale – 44
 - affiner
 - Raum 138
 - Zusammenhang 107
 - Algebra
 - äußere – 67, 72
 - symmetrische – 68
 - Algebraische Geometrie 90
 - allgemeine
 - lineare Gruppe 118, 125
 - Relativitätstheorie 116
 - – Einstein-Gleichungen 116
 - ample [Bündel] 94
 - Anti-de Sitter-Raum 140
 - Äquivalenzprinzip
 - Einsteins – 116
 - Atlanten
 - differenzierbar verträgliche – 5
 - Atlas
 - differenzierbarer – 5
 - hinreichend groß – 3
 - maximaler – 5
- ## B
- Bahn 129, 135
 - Bahnenmannigfaltigkeit 131
 - Bahnenraum 100, 129, 135
 - Bairescher Kategoriensatz 121
 - Basis
 - duale – 38
 - kanonische – des Derivationenmoduls 34
 - lokale – eines Vektorbündels 33
 - Basisergänzungssatz
 - für Vektorbündel 55
 - Basiswechsel-Formel
 - für Vektorbündel 33
 - Bewegung
 - eines mechanischen Systems 80, 95
 - Bewegungskonstante 99
 - Bianchi-Identität 111

- biduales Bündel 39
- Bild
 - eines Vektorbündel-Homomorphismus 54, 56
- bilineare Abbildung, Bilinearform 43
- Blätterzahl
 - einer Überlagerung 28
- Bündel
 - der alternierenden Tensoren 65
 - der symmetrischen Tensoren 65
 - der vertikalen Tangentialvektoren 58
 - konjugiert-komplexes – 83
 - mit Strukturgruppe G 22
 - tautologisches – 93, 141

C

- Cartan-Matrizen 127
- Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 84
- charakteristische Klasse
 - einer Überlagerung 27
- Chow
 - Satz von – 93
- Christoffel-Symbole 103, 105
- Cohomologie 23
 - – Gruppen 23
 - – Mengen 23
 - – Theorie 61
- Cotangentialbündel 21
- Cozykel-Bedingung 4
 - für Cotangentialbündel 21, 38, 39
 - für Derivationen 35
 - für direkte Summe von Bündeln 36
 - für duales Bündel 38
 - für Faserbündel 20 ff
 - für holomorphes Tangentialbündel 86
 - für Homomorphismen von Faserbündeln 23 ff
 - für Homomorphismen-Bündel 37, 38
 - für komplexifiziertes Bündel 82
 - für konjugiert-komplexes Bündel 83
 - für Metrik auf Vektorbündeln 75
 - für Quotientenbündel 56
 - für Schnitte in Faserbündeln 32
 - für Tangentialbündel 16, 17, 34
 - für Unterbündel 55
 - für unterliegendes reelles Bündel 82
- Cozyklen
 - cohomologe – 22
 - G -cohomologe – 22
- Cozyklus
 - von Diffeomorphismen 5
 - von Homöomorphismen 4
- Cramersche Regel 118

D

- Darboux
 - Satz von – 81
- Darstellung
 - lineare – 121
- Decktransformation
 - einer Überlagerung 28
- Deformationsretrakt 29
- Derivation 34
- Derivationenmodul 34
 - kanonische Basis eines –s 34
- de Sitter–Raumzeit 140
- Diffeomorphismen
 - differenzierbar parametrisierte Familie von – 21
- Diffeomorphismus 7
- Differential
 - einer Abbildung 18
 - einer Differentialform 72, 73, 74
- Differentialform 71
 - komplexwertige – 83
 - vom Typ (p, q) 89
- differenzierbare
 - Abbildung 7
 - Mannigfaltigkeit 5
 - Rang einer –n Abbildung 8
 - Struktur 5
 - Untermannigfaltigkeit 6, 11
- Differenzierbarkeit
 - totale – 41
- Dimension
 - einer Mannigfaltigkeit 41
- direkte Summe
 - von Vektorbündeln 36
- diskreter Normalteiler 131
- Dolbeaultsches Lemma 93
- Doppelpendel 95
- duale
 - Basis 38
 - r Homomorphismus 70
- Dualität
 - in der projektiven Geometrie 141
- Dynamik
 - eines Lagrange–Systems 95
- Dynkin–Diagramm 124, 127

E

- Eckenkubie 137
- effektive Operation 136
- eigentlich diskontinuierliche Operation 130
- Einbettung 12
 - abgeschlossene – 12
 - offene – 12
 - isometrische – 78
- Einbettungssatz
 - von Nash 78
 - von Whitney 13

einfache

- Liealgebra 124, 127
- Liegruppe 124
- Einheitskreis 26
- Einpunkt–Kompaktifizierung 2
- Einschränkung
 - eines Bündels 25
- Einstein
 - –Gleichungen 116
 - –Mannigfaltigkeiten 113, 117
 - s Äquivalenzprinzip 116
 - sche Summationskonvention 39, 50
- Energie–Impuls–Tensor 116
- Erhaltung der Dimension
 - Satz von der – 2
- euklidische Metrik 1
- Euler–Lagrange–Gleichungen
 - der Variationsrechnung 95
- exakte Sequenz
 - von Bündelhomomorphismen 58
- Existenz– und Eindeutigkeitsatz
 - von Peano 125
- Exponential–Abbildung 124, 125
- exzeptionelle Isomorphismen
 - von Liealgebren 123

F

- Faserbündel 19
 - triviales – 19
 - trivialisierbares – 19
- Faserprodukt 24
- Fasertyp 19
- frame 33
- freie (fixpunktfreie) Operation 130, 136
- Fubini–Study–Metrik 92
- Fundamentalgruppe 26
- Funktionalmatrix
 - komplexe – 84

G

- Garbe
 - der Keime von Schnitten 31
- Gauß–Abbildung 141
- G –Bündel 22
- G –Cohomologie 23
- Geodätische, geodätische Kurve 97, 106
- geodätisches Koordinatensystem 107
- Geometrie
 - innere – 103
- Geradenbündel 19
- geradeste Kurve 109
- Geschwindigkeits–Phasenraum 80
- G –homologe Cozyklen 22
- G –Prinzipalbündel 22
- Gradient
 - geometrischer – 97

symplektischer – 101
 Graßmann–Mannigfaltigkeit 140, 141
 Gravitationskonstante 116
 Gruppe
 allgemeine lineare – 118, 125
 einfach zusammenhängende – 124
 klassische – 127
 kristallographische – 115
 orthogonale – 119, 127
 spezielle lineare – 118, 122
 spezielle orthogonale – 127
 spezielle unitäre – 140
 symplektische – 127
 topologische – 119
 unitäre – 140
 verallgemeinerte orthogonale – 139
 verallgemeinerte unitäre – 140

H

Hadamardsches Lemma 41
 Hamilton
 – Formalismus 80, 97 ff
 – Funktion 80, 98
 – Gleichungen 80
 – sches Vektorfeld 101
 verallgemeinertes – sches System 101
 Hartogs
 Satz von – 85
 Hauptsatz
 – der Überlagerungstheorie 30
 Hermite
 – sche Metrik 86
 – scher Vektorraum 87
 Hilbert
 5. – sches Problem 118
 holomorphe
 – Funktion 85
 – 1–Form 86
 – s Cotangentialbündel 86
 – s Tangentialbündel 86
 – s Vektorfeld 86
 homogene
 – Koordinaten 90
 – r Raum 138
 Homologietheorie
 relative – 2
 Homomorphismus
 dualer – 70
 – von Vektorraumbündeln 20
 Hurwitz–Kriterium 76, 102
 Hyperebenenbündel 93
 hyperbolische
 – Metrik 114
 – r Raum 114

I

Ideal
 – einer Liealgebra 127
 Identitätssätze 10
 Ikosaeder 136
 Immersion 8
 Impuls
 – –Abbildung 100
 – –Phasenraum 80
 verallgemeinerte – e 80, 98
 Index
 – einer Untergruppe 27
 innere Geometrie 103
 isometrische Einbettung 78
 Isomorphismus
 exzeptioneller – von Liealgebren 123
 – von Faserbündeln 20
 – von Vektorbündeln 20
 Isotropiegruppe 130, 135

J

Jacobi–Liouville
 – Reduktion 101
 Satz von – 101

K

Kähler–Mannigfaltigkeit 89
 kanonische Gleichungen 98
 Kantenkubie 137
 Karte
 topologische – 1
 Karten
 differenzierbar verträgliche – 5
 Kern
 – eines Homomorphismus 54, 56
 Kettenregel 18
 Killing–Form 127
 kinetische Energie 95
 klassische Gruppe 127
 kompakte reelle Form
 – einer Liegruppe 128
 komplex
 – –analytische Mannigfaltigkeit 6, 85
 – e Untermannigfaltigkeit 89
 – –projektiver Raum 90 ff
 komplexifiziertes
 – Cotangentialbündel 83
 – Tangentialbündel 83
 Komplexifizierung reeller Bündel 81, 82
 Konfigurationsraum 80
 Konjugation 134
 konjugiert
 – e Untergruppe 27
 – komplexes Bündel 83

- konservatives Kraftfeld 95
 - kontragrediente Matrix 38
 - kontravariantes Tensorfeld 49
 - Koordinaten
 - geodätische – 107
 - homogene – 90
 - kanonische – 81
 - symplektische – 81
 - kosmologische Konstante 117
 - kovariant
 - e Ableitung 103, 104, 106
 - es Tensorfeld 49
 - Kraft 95
 - konservatives –-Feld 95
 - kristallographische Gruppe 115
 - Kronecker-Produkt von Matrizen 37
 - Krümmung 109 ff
 - skalare – 113
 - Riemannscher –stensor 109 ff
 - kurze exakte Sequenz 59
 - kürzeste Kurve 109
- L**
- Lagrange
 - Funktion 80, 95
 - Mechanik 80
 - natürliches –-System 98
 - System 95
 - Satz von – 136
 - Legendre-Transformation 98
 - Leibniz
 - verallgemeinerte –-Regel 104
 - Lemma von Hadamard 41
 - Levi-Civita-Zusammenhang 108
 - Lichtkegel 79
 - Lie-Ableitung 36
 - Liealgebra 122, 123
 - einfache – 124, 127
 - halbeinfache – 127
 - Liegruppe 118
 - einfache – 124
 - Liegruppen
 - Homomorphismus 121
 - Isomorphismus 121
 - lokal isomorphe – 123
 - Lie-Klammer von Vektorfeldern 73
 - Lie-Produkt von Vektorfeldern 73
 - Lie-Untergruppe 119, 126
 - Liftung
 - von Bündeln 24
 - von Differentialformen 71
 - von Metriken 76
 - von Schnitten 69
 - Liftungssatz für Abbildungen 27
 - lineare
 - Darstellung 121
 - Operation 134
 - Linienbündel 19
 - Links
 - Nebenklasse 27, 135
 - Translation 120
 - lokaler Operator 42, 72
- M**
- Mannigfaltigkeit
 - algebraische – 118
 - C^k – 6
 - differenzierbare – 5
 - Kählersche – 89
 - komplex-analytische – 6, 85
 - Minkowskische – 77
 - parallelisierbare – 20
 - projektiv-algebraische – 13, 94
 - Pseudo-Riemannsche – 77
 - reell-analytische – 6
 - rein-dimensionale – 2
 - Riemannsche – 77
 - Steinsche – 13, 90
 - symplektische – 79
 - topologische – 1
 - Marsden-Weinstein
 - Quotient 100
 - Reduktion 100
 - Matrix
 - Gruppe 120
 - kontragrediente – 38
 - schiefsymmetrische – 128
 - Metrik
 - auf dualem Bündel 76
 - auf einem Vektorbündel 75
 - auf Tensorprodukt 76
 - euklidische – 1
 - Hermitesche – 86
 - hyperbolische – 114
 - induzierte – 78
 - Kählersche – 89
 - linksinvariante – 122
 - Riemannsche – 77, 97
 - Minkowski
 - Raum 77
 - sche Raum-Zeit 116
 - Morphismus
 - von Faserbündeln 20
 - multilineare Abbildung, Multilinearform 43
 - alternierende – 63
 - symmetrische – 63
- N**
- Nash
 - Einbettungssatz von – 78
 - Newton
 - sche Bewegungsgleichungen 95
 - Normalenbündel 57

normale Untergruppe 27
 Normalisator 27
 Normalteiler 27
 diskreter – 131
 Nullschnitt
 – in einem Vektorbündel 32

O

offene Einbettung 12
 Operation
 differenzierbare – 134
 effektive – 136
 eigentlich diskontinuierliche – 130
 freie – 130, 136
 lineare – 134
 symplektische – 100
 transitive – 138
 – von links, – von rechts 133
 Orbit 129, 135
 Orbitraum 135
 orthogonale Gruppe 119, 127
 Ortskoordinaten
 verallgemeinerte – 80, 95

P

paralleles Vektorfeld 103, 106
 Paralleltransport 103, 106
 Parametrisierung 1
 Peano
 Existenz- und Eindeigkeitssatz von – 125
 Permanenzprinzip
 – für Kähler-Mannigfaltigkeiten 89
 Permutationsgruppe 26
 Pfaffsche Form 38, 39
 Phasenraum 95
 Platonische Körper 123
 Poincarésches Lemma 92
 Poisson-Klammer 101
 Potential 95
 lokales – 93
 Prinzipalbündel 22
 Prinzip
 – der kleinsten Wirkung 80
 Produkt
 semidirektes – 122
 – Topologie 4
 projektiv-algebraische
 – Mannigfaltigkeit 13, 94
 – Teilmenge 93

Q

Quotientenbündel 56
 Quotiententopologie 4, 129

R

Rang
 – einer differenzierbaren Abbildung 8
 Rangsatz 9
 Raum
 affiner – 138
 hausdorffscher – 1
 homogener – 138
 hyperbolischer – 114
 komplex-projektiver – 90
 – konstanter Schnittkrümmung 114, 115
 lokal euklidischer – 1
 lokal kompakter – 2
 lokal wegweise zusammenhängender – 2
 metrisierbarer – 2, 3
 parakompakter – 3
 reell-projektiver – 30
 (vollständig) regulärer – 3
 semilokal einfach zusammenhängender – 2
 symmetrischer – 128
 topologischer – 1
 Raumform 115
 Raum-Zeit 77
 Ricci-Fläche – 116
 Rechts
 – Nebenklasse 27, 135
 – Translation 120
 Reduktion
 – der Freiheitsgrade 99, 100
 Marsden-Weinstein – 100
 reelle Struktur
 – eines komplexen Vektorbündels 82
 reguläre
 – r Wert 12
 – Stelle 12
 reiner Tensor 46
 Relativitätstheorie
 allgemeine – 116
 Relativtopologie 1
 Répère 33
 Ricci-Tensor 112, 113
 Richtungsableitung 36
 Riemannsche
 – Fläche 26
 – Mannigfaltigkeit 77
 vollständige – – 115
 – Metrik 77, 97
 – Pseudometrik 77
 – r Krümmungstensor 109 ff
 Rubiks Würfel 136, 137

S

Satz
 – über Wege- und Homotopieliftung 26
 – vom stetig gekämmten Igel 20

- von Chow 93
 - von Darboux 81
 - von Hartogs 85
 - von Jacobi und Liouville 101
 - von Lagrange 136
 - von Stokes 73
 - von Whitney 13
 - Scheibensatz 130
 - schiefsymmetrische Matrix 128
 - Schnitt
 - in Faserbündel 31
 - -Modul 32
 - -Sequenz 61
 - -Krümmung 109, 114
 - sectional curvature 109, 114
 - semidirektes Produkt 122
 - Sequenz
 - exakte - 58
 - kurze - - 59
 - singuläre
 - r Wert 12
 - Stelle 12
 - skalare Krümmung 113
 - spezielle
 - lineare Gruppe 118, 122
 - orthogonale Gruppe 127
 - unitäre Gruppe 140
 - Splitting
 - einer kurzen exakten Sequenz 60
 - Spur
 - -Abbildung 44
 - -Bildung von Tensoren 112
 - Stabilisatorgruppe 135
 - stationärer Wert
 - des Wirkungsintegrals 95, 96
 - Steinsche Mannigfaltigkeit 13, 90
 - Struktur
 - differenzierbare - 5
 - exotische - 6
 - Subimmersion 9
 - Submersion 8, 129
 - Summationskonvention
 - von Einstein 39, 50
 - Summe
 - von Mannigfaltigkeiten 6
 - von Vektorbündeln 36
 - Sylvesterscher Trägheitssatz 76, 102, 139
 - Symmetrien 99
 - des Ikosaeders 136
 - symmetrische
 - r Raum 128
 - r Zusammenhang 107
 - Umgebung 119
 - symplektische
 - Gruppe 127
 - Koordinaten 81
 - Mannigfaltigkeit 79
 - Operation 100
 - r Gradient 101
- T**
- Tangentenfeld 103
 - Tangentialbündel 17
 - einer Untermannigfaltigkeit 15
 - holomorphes - 86
 - Tangentialraum 14, 17
 - tautologisches Bündel 93, 141
 - Teilbündel 54
 - Teilung der Eins 10
 - Tensor 46
 - alternierender - 65
 - reiner - 46
 - symmetrischer - 65
 - positiv definiten - - 75
 - Tensorfeld 49
 - Tensorprodukt
 - universelle Eigenschaft des -s 63
 - von Vektorräumen 45 ff
 - von Vektorbündeln 48 ff
 - Topologie 1
 - diskrete - 4
 - topologische
 - Gruppe 119
 - Karte 1
 - Mannigfaltigkeit 1
 - r Raum 1
 - r Unterraum 1
 - Torsion 107
 - torsionsfreier Zusammenhang 107
 - Torus 30, 78
 - flacher - 79
 - totale Differenzierbarkeit 41
 - Trägheitsindex 76, 102
 - Trägheitssatz
 - von Sylvester 76, 102, 139
 - Trajektorie 80, 95
 - transitive Operation 138
 - Trennungsaxiom T_2 1
- U**
- Übergangs-
 - Diffeomorphismen für Faserbündel 21
 - Matrizen für Vektorbündel 21
 - Überlagerung
 - charakteristische Klasse einer - 27
 - unbegrenzte unverzweigte - 19, 26 ff
 - universelle - 29
 - Überlagerungstheorie
 - Hauptsatz der - 30
 - Umgebung
 - gleichmäßig überlagerte - 19
 - symmetrische - 119
 - Umkehrsatz 8

- universelle
 - Eigenschaft 63, 65, 66
 - Überlagerung 29
 - Unterbündel 54
 - Untergruppe
 - abgeschlossene – 119
 - normale – 27
 - offene – 119
 - 1-Parameter– – 124, 125
 - Untergruppen
 - konjugierte – 27
 - Untermannigfaltigkeit
 - differenzierbare – 6, 11
 - diskrete – 11
 - offene – 11
 - komplex-analytische – 89
 - Unterraum
 - topologischer – 1
- V**
- Variationsableitung 97
 - Vektorbündel, Vektorraumbündel 19
 - Homomorphismus von $-n$ 20
 - Isomorphismus von $-n$ 20
 - Vektorfeld 35
 - holomorphes – 86
 - komplexwertiges – 83
 - linksinvariantes – 122
 - mit Werten in einem Vektorbündel 106
 - paralleles – 103, 106
 - Vektorraum
 - Hermiteischer – 87
 - verallgemeinerte
 - Impulse 80, 98
 - Leibniz-Regel 104
 - (spezielle) orthogonale Gruppe 139, 140
 - Ortskoordinaten 80, 95
 - (spezielle) unitäre Gruppe 140
 - Verheften
 - von Karten 3
 - Verheftungsvorschrift 4
 - Verjüngung
 - von Tensoren 112
 - verträglicher Zusammenhang 108
 - vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit 115
- W**
- Wege- und Homotopie-Liftung 26
 - Wegzusammenhangskomponente 2
 - Wert
 - regulärer – 12
 - singulärer – 12
 - Whitney
 - Einbettungssatz von – 13
 - Summe 36
 - Wirkung (siehe: Operation)
 - Wirkungsintegral 95
 - Wirtinger-Ableitungen 83
 - Würfel
 - Rubiks – 11
- X**
- X -Morphismen 20, 25
- Z**
- Zusammenhang 104
 - affiner – 107
 - Levi-Civita– – 108
 - symmetrischer – 107
 - torsionsfreier – 107
 - (mit Metrik) verträglicher – 108
 - Zusammenhangskomponente 2
 - Zusammenkleben
 - von Karten 3