Primzahlsatz.

Hilfssatz. *Zu* $\varepsilon>0$ *gibt es eine gerade reelle Funktion* $G\geq 0$ *mit*

$$\int G\,du = 1\ , \qquad e^{-\varepsilon} < \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} G\,du < 1\ ,$$

für welche $g=\hat{G}$ *stetig ist mit cp Träger.*

Beweis. b,c passend, $\varphi(u)=c$ falls $|u|\leq b$, $\varphi=0$ sonst;
$g=\varphi*\varphi,\quad G=\hat{\varphi}^2$.

$A=\{$nat. Linearkomb. der $p\in P\}$, $P=$ Familie $\subset\mathbb{R}$, $p_1=\operatorname{Min}P>0$.
$P(x)=$ Anzahl der $p\leq x$, $p\in P$. Analog $A(x)$.
$h,\ n=1,2,3,\ldots$; $s=\sigma+it$; $x,\ y>0$; $\alpha>0<\beta<1$ passend.

Voraussetzung. $\int e^{-\beta x}|B(x)|dx<\infty$ für $B(x)=A(x)-\alpha e^x$.

Beispiel: $P=\{\log_{\mathfrak{A}} N\mathfrak{p}\}$ ~~für Funktionenkörper mit q Konstanten bzw. q=e~~ für Zahlkörper n-ten Grades, ~~β=e bzw.~~ $\beta=1-\frac{1}{n}+\varepsilon$.

Def. $\zeta(s)-\frac{\alpha s}{s-1}:=s\int e^{-sx}B(x)dx$
ist für $\sigma>\beta$ regulär (Weierstraß); für $\sigma>1$ folgt

$$\zeta(s)=s\int e^{-sx}A(x)dx=\sum e^{-sa}=\prod\frac{1}{1-e^{-ps}}=\exp\sum h^{-1}e^{-hps}\neq 0\ ,$$

und wegen $\sum\limits_{|k|<n}(n-|k|)z^k=\Big|\sum\limits_{l=0}^{n-1}z^l\Big|^2$ für $|z|=1$, $z=e^{-ihpt}$

$$\prod_{|k|<n}\zeta(\sigma+kit)^{n-|k|}=\exp\sum h^{-1}e^{-hp\sigma}\Big|\sum_{l=0}^{n-1}e^{ilhpt}\Big|^2\geq 1\ .$$

Satz. $\zeta(1+it)\neq 0$. Beweis. Aus $\zeta(\sigma+it)\to 0$ für $\sigma\to 1+0$ würde mit $n=3$ folgen $1\leq|\zeta(\sigma)^3\zeta(\sigma+it)^4\zeta(\sigma+2it)^2|\to 0$, Wid.

Primzahlsatz. $F(x)=e^{-x}\sum\limits_{hp\leq x}p\to 1$ und $P(x)\sim x^{-1}e^x$ $(x\to\infty)$

Beweis. Zunächst wird $(F*G)(x)\to 1$ gezeigt.

$$f(s)=\frac{-\zeta'(s+1)}{(s+1)\zeta(s+1)}=\int e^{-sy}F(y)dy$$

$$\begin{array}{llcll}
 & J=\int\limits_{\text{endl}}e^{ixt}\{f(s)-\frac{1}{s}\}g(t)dt & = & \int\limits_{y>0}e^{-\sigma y}\{F(y)-1\}G(x-y)dy & \\
\sigma\to+0) & \quad\Big\downarrow\text{glm stetig} & & \quad\Big\downarrow \qquad\qquad\searrow & \\
 & \int\limits_{\text{endl}}e^{ixt}\{f(it)-\frac{1}{it}\}g(t)dt & = & \int F(x-u)G(u)du & -\int\limits_{-\infty}^{x}G(u)du \\
x\to\infty) & \quad\Big\downarrow\ \text{Riemann} & & \underline{\text{also}}\ \Big\downarrow & \quad\Big\downarrow \\
 & \quad 0 & & \quad 1 & \quad -1
\end{array}$$

Nun folgt $F(x)\to 1$ wegen der Isotonie von $e^xF(x)$ so :

$$\begin{array}{lcccl}
e^{2\varepsilon}F(x+\varepsilon) & & & & e^{\varepsilon} \\
 & \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}F(x-u)G(u)du & \underset{\text{falls } F\leq M}{\Delta\leq M(1-e^{-\varepsilon})} & \int F(x-u)G(u)du & \text{für } x>x_0(\varepsilon) \\
e^{-3\varepsilon}F(x-\varepsilon) & & & & e^{-\varepsilon}
\end{array}$$

Schließlich ergibt sich der Primzahlsatz:

$$1\leftarrow F(x)\leq xe^{-x}P(x)\leq\frac{1}{p_1x}F(x-2\log x)+\frac{x}{x-2\log x}F(x)\to 0+1$$