

Deformationen von Quotientensingularitäten (nach zyklischen Gruppen)

Oswald Riemenschneider

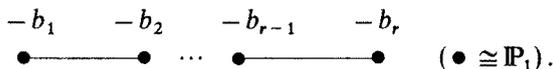
Zur Erinnerung an meinen Freund Ulrich von Hundelshausen

Diese Arbeit verdankt ihr Entstehen dem Wunsch, Beispiele zu konstruieren für das Zusammenblasen von Deformationen der Auflösung einer rationalen Singularität zu Deformationen der Singularität selbst (vgl. [13]). Der Einfachheit halber haben wir uns dabei zunächst auf diejenigen rationalen Singularitäten beschränkt, für die der zu dem exzeptionellen Kurvensystem einer minimalen Auflösung gehörende duale Graph unverzweigt ist. Dies sind bekanntlich die zweidimensionalen *Quotientensingularitäten*, die durch Aktion einer *zyklischen* Gruppe auf \mathbb{C}^2 entstehen.

Diese Singularitäten können nach Brieskorn [1] vollständig beschrieben werden: Es seien n und q natürliche Zahlen mit $0 < q < n$, $(n, q) = 1$, ζ_n sei eine primitive n -te Einheitswurzel, $\varphi_{n,q}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ der durch $\varphi_{n,q}(u, v) = (\zeta_n u, \zeta_n^q v)$ definierte Automorphismus, $G_{n,q}$ die von $\varphi_{n,q}$ erzeugte zyklische Automorphismengruppe auf \mathbb{C}^2 mit Fixpunkt 0 und $X_{n,q}$ der analytische Raumkeim von $\mathbb{C}^2/G_{n,q}$ im Bildpunkt des Ursprungs. Dann ist eine beliebige Quotientensingularität nach einer zyklischen Gruppe analytisch isomorph zu einem $X_{n,q}$, und ferner gilt $X_{n,q} \cong X_{n',q'}$ genau dann, wenn $n = n'$ und $q = q'$ oder $qq' \equiv 1 \pmod n$. Den dualen Graphen des exzeptionellen Kurvensystems in der minimalen Auflösung $\tilde{X}_{n,q}$ der Singularitäten von $X_{n,q}$ erhält man mittels des Hirzebruch-Jung'schen Kettenbruches: Mit

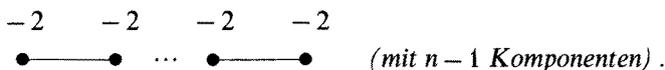
$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{b_r}}}, \quad b_q \in \mathbb{N}, \quad b_q \geq 2, \quad q = 1, \dots, r,$$

ergibt sich der Graph zu



Um Deformationen von $X_{n,q}$ konstruieren zu können, muß man als erstes die zugehörige analytische Stellenalgebra $A_{n,q}$ berechnen. Dies kann wegen der obigen Beschreibung mittels Invariantentheorie durchgeführt werden (§§ 1, 2). Es stellt sich heraus, daß die Gleichungen von $X_{n,q}$ unmittelbar aus der Hirzebruch-Jung'schen Kettenbruchentwicklung für $\frac{n}{n-q}$ abgelesen werden können. Da es einfache Beziehungen zwischen den Kettenbrüchen für $\frac{n}{q}$ und $\frac{n}{n-q}$ gibt (§ 3), lassen sich die Gleichungen auch direkt aus dem dualen Graphen der Auflösung gewinnen. Insbesondere ergibt sich die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (I) $X_{n,q}$ ist ein vollständiger Durchschnitt.
- (II) $q = n - 1$.
- (III) $X_{n,q}$ ist die Hyperflächensingularität $x_1 x_3 - x_2^n = 0$.
- (IV) Der duale Graph der Auflösung $\tilde{X}_{n,q}$ von $X_{n,q}$ ist



Im allgemeinen sind also die Singularitäten $X_{n,q}$ keine vollständigen Durchschnitte. Trotzdem gelingt es, alle Relationen zwischen den definierenden Gleichungen zu bestimmen (§ 4) und eine interessante Familie von Singularitäten mit spezieller Faser $X_{n,q}$ zu konstruieren (§ 5). Die Singularitäten der Nachbarfasern von $X_{n,q}$ in dieser Familie sind alle vom Typ $X_{n',q'}$; wir sind in der Lage, sämtliche Graphen der auftretenden Singularitäten anzugeben. Die Familie besitzt stets eine einparametrische Unterfamilie mit singularitätenfreier allgemeiner Faser. Dies impliziert:

Keine Singularität $X_{n,q}$ ist starr.

Die Auflösung $\tilde{X}_{n,q}$ von $X_{n,q}$ besitzt ebenfalls eine kanonische Deformation (§ 6). Wir können zeigen, daß durch Zusammenblasen dieser Deformation (im wesentlichen) die obige Deformation von $X_{n,q}$ entsteht. Somit findet die in § 5 beschriebene Variation der Graphen ihre Erklärung in dem analogen Verhalten von exzeptionellen Kurven bei Deformation der umgebenden Mannigfaltigkeit. Es können dabei die folgenden Phänomene auftreten:

- (i) *Irreduzible Komponenten verschwinden.*
- (ii) *Zwei sich transversal schneidende Komponenten mit Selbstschnittzahl $-b_1$ bzw. $-b_2$ vereinigen sich zu einer einzigen singularitätenfreien rationalen Kurve mit Selbstschnittzahl $-(b_1 + b_2 - 2)$.*

Wir geben schließlich (§ 7) eine Formel für die Dimension des Vektorraumes aller infinitesimalen Deformationen von $X_{n,q}$ an, die Mum-

fords Formel [9] für $X_{n,1}$, den Kegel über der rationalen Kurve vom Grad n in \mathbb{P}_n , verallgemeinert. Aus ihr folgt, daß die in § 5 angegebene Deformation im Falle der Einbettungsdimension $e = \text{eib } A_{n,q} \geq 5$ nicht versell ist. Für $e = 4$ (wie für $e = 3$), stimmt sie jedoch mit der versellen Deformation überein. Wir konstruieren noch die verselle Familie für $e = 5$, womit das Ergebnis von Pinkham [12] für $X_{4,1}$ verallgemeinert wird. Im Gegensatz zu [12], wo man mit einfachen Homogenitätsbetrachtungen auskommt, erfordert unser Beweis eine größere Rechnung. Obwohl auf dieselbe Weise auch die höheren Einbettungsdimensionen behandelt werden können, verzichten wir wegen des unüberschaubar werdenden Rechenaufwandes auf die Durchführung und beschränken uns auf einige weitere Bemerkungen zum Fall $e = 6$. Für die Kegel $X_{n,1}$ kann man vollständige Ergebnisse bei Pinkham finden.

Eine Reihe von Problemen konnte in dieser Arbeit noch nicht abschließend geklärt werden. Zudem lassen die erzielten Ergebnisse die Vermutung zu, daß entsprechende Verhältnisse bei der Deformation von beliebigen rationalen Singularitäten herrschen. Wir haben einen Katalog der offenen Fragen und Vermutungen im letzten Paragraphen zusammengestellt.

Wir betrachten etwas allgemeiner analytische Stellenalgebren über beliebigen vollständig bewerteten Körpern k . Die Bezeichnungen wählen wir wie in [4]; z. B. ist $K_n = k\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ die analytische Algebra der konvergenten Potenzreihen in n Veränderlichen x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten in k .

Inhaltsangabe

- § 1. Die Invarianten
- § 2. Die Gleichungen
- § 3. Auflösung der Singularitäten und die Kettenbruchentwicklungen für $\frac{n}{q}$ und $\frac{n}{n-q}$
- § 4. Die Relationen
- § 5. Die spezielle Deformation
- § 6. Die simultane Auflösung der Singularitäten der speziellen Deformation
- § 7. Der Vektorraum der infinitesimalen Deformationen und die verselle Deformation bei kleinen Einbettungsdimensionen
- § 8. Offene Fragen und Vermutungen

§ 1. Die Invarianten

Es sei k zusätzlich algebraisch abgeschlossen; ζ_n bezeichne eine primitive n -te Einheitswurzel mit $n \not\equiv 0 \pmod{\text{char } k}$. Ferner sei $0 < q < n$, $(n, q) = 1$. Dann operiert

$$\varphi = \varphi_{n,q} : \varphi(u) = \zeta_n u, \quad \varphi(v) = \zeta_n^q v$$

und damit auch die durch φ erzeugte Gruppe $G = G_{n,q}$ auf $K_2 = k\langle u, v \rangle$.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Invarianten von φ bestimmen. Da G eine endliche Gruppe ist, kann man dies nach einer Bemerkung von Noether [10] folgendermaßen tun: Man bildet die Polynome

$$\prod_{\psi \in G} (Y - \psi(u)), \quad \prod_{\psi \in G} (Y - \psi(v))$$

und erhält nach Ausmultiplizieren als Koeffizienten gewisse Invarianten. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned} \prod_{\psi \in G} (Y - \psi(u)) &= \prod_{v=0}^{n-1} (Y - \zeta_n^v u) = Y^n + (-1)^n \zeta_n^{\frac{n(n-1)}{2}} u^n \\ &= Y^n - u^n \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\prod_{\psi \in G} (Y - \psi(v)) = Y^n - v^n.$$

Dies liefert die Invarianten u^n und v^n . Nach Noether bekommt man ein volles Invariantensystem, indem man zu diesen noch die Elemente $\mu(u^i v^j)$, $0 \leq i < n$, $0 \leq j < n$, hinzunimmt, wobei $\mu: K_2 \rightarrow K_2^G$ die bekannte Mittelabbildung bezeichnet (vgl. [4], p. 158). Es ist nun

$$\begin{aligned} \mu(u^i v^j) &= \frac{1}{n} \sum_{\psi \in G} \psi(u^i v^j) = \left(\frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} (\zeta_n^{i+aj})^v \right) u^i v^j \\ &= \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{1 - (\zeta_n^{i+aj})^n}{1 - \zeta_n^{i+aj}} u^i v^j = 0, & \text{falls } \zeta_n^{i+aj} \neq 1, \text{ d. h. } i+aj \not\equiv 0 \pmod{n}, \\ \frac{1}{n} n u^i v^j = u^i v^j, & \text{falls } \zeta_n^{i+aj} = 1, \text{ d. h. } i+aj \equiv 0 \pmod{n}, \end{cases} \end{aligned}$$

und wir erhalten somit

Satz 1. Die invariante k -Algebra $S_2^G, S_2 = k[u, v]$, wird erzeugt von den Monomen $u^i v^j$ mit $i+aj \equiv 0 \pmod{n}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$, $(i, j) \neq (n, n)$.

Satz 1 liefert jedoch im allgemeinen kein minimales Erzeugendensystem, wie das folgende Beispiel zeigt: Es sei n beliebig und $q = n - 1$. Dann erhält man mit Satz 1 die Invarianten

$$1, u^n, v^n, uv, u^2 v^2, \dots, u^{n-1} v^{n-1},$$

von denen $u^2 v^2, \dots, u^{n-1} v^{n-1}$ offensichtlich überflüssig sind.

Es gelingt jedoch mit Hilfe des Hirzebruch-Jung'schen Algorithmus, das obige Erzeugendensystem zu einem minimalen zu verfeinern. Wir setzen (vgl. [6, 7]):

$$i_1 = n, \quad i_2 = n - q.$$

Dann gibt es ein natürliches $a_2 \geq 2$ mit

$$i_1 = a_2 i_2 - i_3, \quad 0 \leq i_3 < i_2.$$

Entsprechend fährt man fort und erhält eine Kettenbruchentwicklung

$$\begin{aligned} i_1 &= a_2 i_2 - i_3 \\ i_2 &= a_3 i_3 - i_4 \\ &\vdots \\ i_{e-2} &= a_{e-1} i_{e-1} - i_e \end{aligned} \tag{1}$$

mit $a_2 \geq 2, \dots, a_{e-1} \geq 2, i_1 = n > i_2 = n - q > i_3 > \dots > i_{e-1} = 1 > i_e = 0, e \geq 3$. Es gilt dann

$$\frac{n}{n-q} = a_2 - \frac{1}{a_3 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{a_{e-1}}}}$$

Sind umgekehrt $a_2 \geq 2, \dots, a_{e-1} \geq 2$ bekannt, so lassen sich die i_ε induktiv berechnen vermöge

$$i_1 = n, \quad i_2 = n - q, \quad i_{\varepsilon+1} = a_\varepsilon i_\varepsilon - i_{\varepsilon-1}, \quad \varepsilon = 2, \dots, e - 1. \tag{2}$$

Wir definieren weitere Zahlen induktiv durch

$$\begin{aligned} j_1 &= 0, & j_2 &= 1, & j_{\varepsilon+1} &= a_\varepsilon j_\varepsilon - j_{\varepsilon-1}, \\ k_1 &= 1, & k_2 &= 1, & k_{\varepsilon+1} &= a_\varepsilon k_\varepsilon - k_{\varepsilon-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen $a_\varepsilon \geq 2$ folgt leicht durch Induktion, daß

$$\begin{aligned} j_1 &< j_2 < \dots < j_e \\ k_1 &\leq k_2 \leq \dots \leq k_e. \end{aligned} \tag{4}$$

Außerdem beweist man ohne Mühe die folgenden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} i_\varepsilon + q j_\varepsilon &= n k_\varepsilon, & \varepsilon &= 1, \dots, e, \\ j_{\varepsilon+1} i_\varepsilon - j_\varepsilon i_{\varepsilon+1} &= n \\ k_{\varepsilon+1} i_\varepsilon - k_\varepsilon i_{\varepsilon+1} &= q \\ j_{\varepsilon+1} k_\varepsilon - j_\varepsilon k_{\varepsilon+1} &= 1 \end{aligned} \right\} \varepsilon = 1, \dots, e - 1, \tag{5}$$

und damit insbesondere $(j_\varepsilon, k_\varepsilon) = 1, \varepsilon = 1, \dots, e$. Aus der Theorie der Kettenbrüche ist weiter bekannt (vgl. z. B. [11]), daß j_{e+1} der kanonische Zähler des Kettenbruches $a_2 - \frac{1}{a_3} - \dots - \frac{1}{a_e}$ ist. Dies impliziert $j_e = n$ und damit wegen $i_e = 0$ auch $k_e = q$.

Satz 2. Die k -Algebra S_2^q wird erzeugt von den Elementen 1 und $u^{i_\varepsilon} v^{j_\varepsilon}$, $\varepsilon = 1, \dots, e$.

Bevor wir Satz 2 beweisen, zeigen wir den folgenden

Hilfssatz 1. Es sei (i, j, k) eine Lösung von $i + qj = nk$ mit $0 \leq i < n$ und $0 < j \leq n$. Gilt dann

$$\frac{j}{k} > \frac{j_\varepsilon}{k_\varepsilon}$$

für ein ε mit $1 \leq \varepsilon \leq e$, so ist notwendig $\varepsilon < e$ und $j \geq j_{\varepsilon+1}$.

Beweis. Wegen $i + qj = nk$ gilt

$$\frac{j}{k} = \frac{n}{q} - \frac{i}{qk} \leq \frac{n}{q} = \frac{j_\varepsilon}{k_\varepsilon}$$

und damit $\varepsilon < e$. Da die j_ε mit ε monoton steigen, können wir annehmen, daß $\varepsilon < e$ maximal mit $\frac{j}{k} > \frac{j_\varepsilon}{k_\varepsilon}$ gewählt ist. Wir nehmen ferner an, es gelte $j < j_{\varepsilon+1}$. Dann ist $k \leq k_{\varepsilon+1}$ und folglich mit (5)

$$\frac{j}{k} = \frac{jk_\varepsilon - kj_\varepsilon}{kk_\varepsilon} + \frac{j_\varepsilon}{k_\varepsilon} \geq \frac{1}{k_\varepsilon k_{\varepsilon+1}} + \frac{j_\varepsilon}{k_\varepsilon} = \frac{j_{\varepsilon+1}}{k_{\varepsilon+1}}.$$

Da ε maximal ist, muß mithin $jk_{\varepsilon+1} = kj_{\varepsilon+1}$ sein, und wegen der Teilerfremdheit von $j_{\varepsilon+1}$ und $k_{\varepsilon+1}$ zieht dies $j_{\varepsilon+1} | j$ und also $j \geq j_{\varepsilon+1}$ nach sich. Widerspruch! q.e.d.

Beweis von Satz 2. Wegen $i_\varepsilon + qj_\varepsilon = nk_\varepsilon$, $\varepsilon = 1, \dots, e$, $0 \leq i_\varepsilon \leq n$, $0 \leq j_\varepsilon \leq n$, sind die Monome $u^{i_\varepsilon} v^{j_\varepsilon}$ in dem Erzeugendensystem von Satz 1 enthalten. Es muß daher nur gezeigt werden, daß sich jedes Monom $u^i v^j$, $i + qj \equiv 0 \pmod{n}$, als Polynom in den $u^{i_\varepsilon} v^{j_\varepsilon}$ darstellen läßt. Dies ergibt sich aber, wie man sich leicht überlegt, aus der folgenden Aussage:

(*) Ist $j_\varepsilon < j < j_{\varepsilon+1}$, $\varepsilon < e$, und i die eindeutig bestimmte Lösung von $i + qj = nk$ mit $0 \leq i < n$, so ist $i \geq i_\varepsilon$ (und damit $i > i_\varepsilon$ wegen $j \neq j_\varepsilon$). Anders ausgedrückt: $j_{\varepsilon+1}$ ist das kleinste $j > j_\varepsilon$, so daß das zugehörige i kleiner als i_ε ist.

Um (*) zu beweisen, multipliziere man die Gleichung $i + qj = nk$ mit k_ε und die Gleichung $i_\varepsilon + qj_\varepsilon = nk_\varepsilon$ mit k . Durch Subtraktion ergibt sich dann

$$ik_\varepsilon - ki_\varepsilon + q(jk_\varepsilon - kj_\varepsilon) = 0.$$

Nun ist $k_\varepsilon \leq k$ wegen $j_\varepsilon < j$ und $jk_\varepsilon - kj_\varepsilon \leq 0$ wegen des oben bewiesenen Hilfssatzes. Folglich ist

$$0 \leq q(kj_\varepsilon - jk_\varepsilon) = ik_\varepsilon - ki_\varepsilon \leq k(i - i_\varepsilon)$$

und also $i \geq i_\varepsilon$. q.e.d.

Wir haben bisher nur die invariante Polynomalgebra S_2^G berechnet. Nach [4], Satz III, 3.3 ist damit aber auch die analytische Algebra K_2^G festgelegt: Es sei $K_e = k\langle x_1, \dots, x_e \rangle$ und $\alpha : K_e \rightarrow K_2$ der durch $\alpha(x_\varepsilon) = u^\varepsilon v^j_\varepsilon$, $\varepsilon = 1, \dots, e$, definierte k -Algebra-Homomorphismus; dann gilt

$$K_2^G \cong K_e / \ker \alpha. \tag{6}$$

Wir werden im nächsten Paragraphen $\ker \alpha$ bestimmen. Als ein Nebenresultat wird sich ergeben, daß e die Einbettungsdimension von K_2^G ist. Daraus folgt unmittelbar der

Zusatz zu Satz 2. *Das in Satz 2 angegebene Erzeugendensystem von S_2^G ist minimal.*

§ 2. Die Gleichungen

Es sei $A_{n,q} := K_2^{G_{n,q}}$ und $X_{n,q}$ der zugehörige analytische Raumkeim. Nach der Bemerkung (6) ist $X_{n,q}$ ein analytischer Unterraumkeim von $(k^e, 0)$. Um die $X_{n,q}$ definierenden Gleichungen zu gewinnen, müssen wir ein Erzeugendensystem von $\ker \alpha$ berechnen. Wir setzen (wenn $a_2 - \underbrace{1}_{a_3} - \dots - \underbrace{1}_{a_{e-1}}$ die Kettenbruchentwicklung von $\frac{n}{n-q}$ wie in § 1 ist):

$$p_{\delta\varepsilon} = \begin{cases} x_{\delta+1}^{a_{\delta+1}} & , \delta + 1 = \varepsilon - 1, \\ x_{\delta+1}^{a_{\delta+1}-1} x_{\delta+2}^{a_{\delta+2}-2} \dots x_{\varepsilon-2}^{a_{\varepsilon-2}-2} x_{\varepsilon-1}^{a_{\varepsilon-1}-1}, & \delta + 1 < \varepsilon - 1, \end{cases} \tag{7}$$

($1 \leq \delta, \varepsilon \leq e$), und

$$g_{\delta\varepsilon} = x_\delta x_\varepsilon - p_{\delta\varepsilon}, \quad 2 \leq \delta + 1 \leq \varepsilon - 1 \leq e - 1. \tag{8}$$

Ferner sei $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{n,q}$ das von den $g_{\delta\varepsilon}$ in K_e erzeugte Ideal. Wir werden unten zeigen, daß $\mathfrak{a}_{n,q} = \ker \alpha$. Wir beginnen den Beweis mit dem

Lemma 1. $\mathfrak{a}_{n,q} \subset \ker \alpha$.

Beweis. Es gilt nach (2) und (3): $i_\delta + i_{\delta+2} = a_{\delta+1} i_{\delta+1}$ und $j_\delta + j_{\delta+2} = a_{\delta+1} j_{\delta+1}$, und daraus ergibt sich unmittelbar durch Induktion nach ε mit $\delta + 1 < \varepsilon - 1$:

$$i_\delta + i_\varepsilon = (a_{\delta+1} - 1) i_{\delta+1} + (a_{\delta+2} - 2) i_{\delta+2} + \dots \\ \dots + (a_{\varepsilon-2} - 2) i_{\varepsilon-2} + (a_{\varepsilon-1} - 1) i_{\varepsilon-1}$$

und entsprechend für $j_\delta + j_\varepsilon$. Dies zieht sofort $\alpha(g_{\delta\varepsilon}) = 0$ nach sich. q.e.d.

Für die umgekehrte Inklusion benötigen wir einen weiteren Hilfssatz. Es bezeichne

$$\mathbb{Z}_+^2 = \{(\beta, \gamma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : \beta \geq 0, \gamma \geq 0, (\beta, \gamma) \neq (0, 0)\}.$$

Hilfssatz 2. Man betrachte zu festem $(\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^2$ die Gleichungssysteme

$$(*)_\varepsilon \quad \left. \begin{aligned} \lambda_\varepsilon^{(1)} i_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^{(2)} i_{\varepsilon+1} &= \beta \\ \lambda_\varepsilon^{(1)} j_\varepsilon + \lambda_\varepsilon^{(2)} j_{\varepsilon+1} &= \gamma \end{aligned} \right\} \varepsilon = 1, \dots, e-1.$$

Besitzt dann ein Gleichungssystem $(*)_\delta$ eine Lösung $(\lambda_\delta^{(1)}, \lambda_\delta^{(2)}) \in \mathbb{Z}_+^2$, so besitzt

a) im Fall $\lambda_\delta^{(1)} = 0$, $\delta + 1 \leq e - 1$ nur noch $(*)_{\delta+1}$ eine Lösung aus \mathbb{Z}_+^2 , nämlich $(\lambda_{\delta+1}^{(1)}, \lambda_{\delta+1}^{(2)}) = (\lambda_\delta^{(2)}, 0)$,

b) im Fall $\lambda_\delta^{(2)} = 0$, $\delta - 1 \geq 1$ nur noch $(*)_{\delta-1}$ eine Lösung aus \mathbb{Z}_+^2 , nämlich $(\lambda_{\delta-1}^{(1)}, \lambda_{\delta-1}^{(2)}) = (0, \lambda_\delta^{(1)})$,

c) in allen anderen Fällen kein weiteres System $(*)_\varepsilon$, $\varepsilon \neq \delta$ eine Lösung aus \mathbb{Z}_+^2 .

Beweis. Es gilt nach (5) $i_\varepsilon j_{\varepsilon+1} - i_{\varepsilon+1} j_\varepsilon = n$. Folglich besitzt $(*)_\varepsilon$ genau eine Lösung $(\lambda_\varepsilon^{(1)}, \lambda_\varepsilon^{(2)}) \in \mathbb{Q}^2$, nämlich

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} = \frac{1}{n} (\beta j_{\varepsilon+1} - \gamma i_{\varepsilon+1}), \quad \lambda_\varepsilon^{(2)} = -\frac{1}{n} (\beta j_\varepsilon - \gamma i_\varepsilon).$$

Wegen (1), (4) und $(\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^2$ gilt stets $\lambda_\varepsilon^{(1)} < \lambda_{\varepsilon+1}^{(1)}$, $\lambda_\varepsilon^{(2)} > \lambda_{\varepsilon+1}^{(2)}$.

Es sei nun δ maximal gewählt, so daß $(\lambda_\delta^{(1)}, \lambda_\delta^{(2)}) \in \mathbb{Z}_+^2$. Es können dann die folgenden Fälle eintreten:

1) $\lambda_\delta^{(2)} = 0$, $\delta > 1$. Dann ist $\lambda_\delta^{(1)} > 0$, $\lambda_{\delta-1}^{(1)} = -\lambda_\delta^{(2)} = 0$, $\lambda_{\delta-1}^{(2)} = \lambda_\delta^{(1)} > 0$ und $\lambda_\varepsilon^{(1)} < \lambda_{\delta-1}^{(1)} = 0$ für alle $\varepsilon < \delta - 1$. Es besitzt also nur noch $(*)_{\delta-1}$ eine Lösung in \mathbb{Z}_+^2 .

2) $\lambda_\delta^{(2)} > 0$, $\delta > 1$. Dann ist $\lambda_\varepsilon^{(1)} \leq \lambda_{\delta-1}^{(1)} = -\lambda_\delta^{(2)} < 0$ für alle $\varepsilon \leq \delta - 1$, d. h. kein weiteres System besitzt eine Lösung in \mathbb{Z}_+^2 .

3) $\delta = 1$. Dann gibt es ebenfalls keine weitere Lösung in \mathbb{Z}_+^2 . q.e.d.

Satz 3. $\ker \alpha = \mathfrak{a}_{n,q}$.

Beweis. Wegen Lemma 1 brauchen wir nur noch $\ker \alpha \subset \mathfrak{a}_{n,q}$ zu zeigen. Es sei also

$$f = \sum_{v_1, \dots, v_e = 0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_e} x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e} \in \ker \alpha.$$

Wir definieren dann $I_{\beta, \gamma} = \{(v_1, \dots, v_e) : \alpha(x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e}) = u^\beta v^\gamma\}$ für $(\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^2$ und erhalten

$$f = f_0 + \sum f_{\beta, \gamma}$$

mit

$$f_0 = a_{0 \dots 0} \quad \text{und} \quad f_{\beta, \gamma} = \sum_{(v_1, \dots, v_e) \in I_{\beta, \gamma}} a_{v_1, \dots, v_e} x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e}.$$

Offensichtlich hat man auch $f_0, f_{\beta, \gamma} \in \ker \alpha$, woraus sich sofort die nachstehenden Identitäten ergeben:

$$a_{0 \dots 0} = 0, \quad \sum_{(v_1, \dots, v_e) \in I_{\beta, \gamma}} a_{v_1 \dots v_e} = 0, \quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Es genügt nun zu zeigen, daß alle $f_{\beta, \gamma} \in \mathfrak{a}_{n, q}$. Denn dann liegt $f = \sum f_{\beta, \gamma}$ in dem von $\mathfrak{a}_{n, q}$ in der Komplettierung $k\{x_1, \dots, x_e\}$ von $k\langle x_1, \dots, x_e \rangle$ erzeugten Ideal und mithin nach dem Krull'schen Lemma ([4], p. 46) in $\mathfrak{a}_{n, q}$ selbst.

Es sei $(v_1, \dots, v_e) \in I_{\beta, \gamma}$. Dann kann man einen anderen Index $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_e) \in I_{\beta, \gamma}$ finden, in dem höchstens zwei Elemente $\tilde{v}_e, \tilde{v}_{e+1}$ von Null verschieden sind, so daß

$$x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e} \equiv x_1^{\tilde{v}_1} \cdots x_e^{\tilde{v}_e} \pmod{\mathfrak{a}_{n, q}}$$

(dies beweist man ohne Mühe z. B. durch Induktion nach e). Also hat man

$$f_{\beta, \gamma} \equiv \tilde{f}_{\beta, \gamma} = \sum_{(v_1, \dots, v_e) \in I_{\beta, \gamma}} a_{v_1 \dots v_e} x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e} \pmod{\mathfrak{a}_{n, q}},$$

$$\sum a_{v_1 \dots v_e} = 0, \quad \alpha(x_1^{\tilde{v}_1} \cdots x_e^{\tilde{v}_e}) = u^\beta v^\gamma.$$

Aus Hilfssatz 2 folgt nun für $(v_1, \dots, v_e), (\mu_1, \dots, \mu_e) \in I_{\beta, \gamma}$ sofort

$$x_1^{v_1} \cdots x_e^{v_e} = x_1^{\mu_1} \cdots x_e^{\mu_e}$$

und damit für ein festes $(\mu_1, \dots, \mu_e) \in I_{\beta, \gamma}$:

$$\tilde{f}_{\beta, \gamma} = \left(\sum_{(v_1, \dots, v_e) \in I_{\beta, \gamma}} a_{v_1 \dots v_e} \right) x_1^{\mu_1} \cdots x_e^{\mu_e} = 0,$$

d. h.

$$f_{\beta, \gamma} \in \mathfrak{a}_{n, q}. \quad \text{q.e.d.}$$

Es ist somit $A_{n, q} = K_2^{G_{n, q}} \cong K_e / \mathfrak{a}_{n, q}$. Da $A_{n, q}$ als invariante Unter- algebra der regulären Algebra K_2 normal ist, ist insbesondere $\mathfrak{a}_{n, q}$ ein *Primideal*. Außerdem gilt ersichtlich $\mathfrak{a}_{n, q} \subset \mathfrak{m}_e^2$, wenn \mathfrak{m}_e das maximale Ideal von $k\langle x_1, \dots, x_e \rangle$ bezeichnet. Dies impliziert für die *Einbettungs- dimension* eib $A_{n, q}$ die Formel

Lemma 2. eib $A_{n, q} = e$.

Wir wollen schließlich noch die minimale Anzahl $\text{cg} \mathfrak{a}_{n, q}$ von Er- zeugenden des Ideals $\mathfrak{a}_{n, q}$ berechnen. Es sei

$$e_1 := \frac{1}{2}(e-1)(e-2). \quad (9)$$

Dann gilt

Satz 4. $\text{cg} \mathfrak{a}_{n, q} = e_1$.

Beweis. Es gilt $\text{cg} \mathfrak{a}_{n, q} = \dim_k \mathfrak{a}_{n, q} / \mathfrak{m}_e \mathfrak{a}_{n, q}$. Es genügt daher zu zeigen, daß die Restklassen der e_1 Erzeugenden $g_{\delta \varepsilon}, 2 \leq \delta + 1 \leq \varepsilon - 1 \leq e - 1$, in

$\mathfrak{a}_{n,q}/\mathfrak{m}_e \mathfrak{a}_{n,q}$ linear unabhängig über k sind. Es seien also $c_{\delta\varepsilon} \in k$ und

$$\sum c_{\delta\varepsilon} g_{\delta\varepsilon} \in \mathfrak{m}_e \mathfrak{a}_{n,q}.$$

Wegen $g_{1\varepsilon} = x_1 x_\varepsilon - p_{1\varepsilon}$ und $\mathfrak{a}_{n,q} \subset \mathfrak{m}_e^2$ gibt es dann ein Polynom $P(x_2, \dots, x_e)$ mit

$$\sum_{\varepsilon=3}^e c_{1\varepsilon} x_1 x_\varepsilon + P(x_2, \dots, x_e) \in \mathfrak{m}_e^3,$$

woraus sich $c_{1\varepsilon} = 0$, $\varepsilon = 3, \dots, e$, ergibt. Man beweist induktiv auf dieselbe Weise, daß auch $c_{\delta\varepsilon} = 0$ für alle δ, ε mit $2 \leq \delta + 1 \leq \varepsilon - 1 \leq e - 1$. q.e.d.

Folgerung. $A_{n,q}$ ist ein vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn $q = n - 1$. In diesem Fall ist $A_{n,q}$ die Hyperflächensingularität $k\langle x_1, x_2, x_3 \rangle / (x_1 x_3 - x_2^2)$.

Beweis. $A_{n,q}$ ist vollständiger Durchschnitt $\Leftrightarrow e = \text{eib } A_{n,q} = \dim A_{n,q} + \text{cg } \mathfrak{a}_{n,q} = 2 + e_1 \Leftrightarrow e = 3 \Leftrightarrow n - q = 1 \Leftrightarrow q = n - 1 \Leftrightarrow a_2 = n$. q.e.d.

§ 3. Auflösung der Singularitäten und die Kettenbruchentwicklungen

$$\text{für } \frac{n}{q} \text{ und } \frac{n}{n-q}$$

Die Algebra $A_{n,q}$ wird analytisch von den Elementen $u^{i\varepsilon} v^{j\varepsilon} \in k\langle u, v \rangle$, $\varepsilon = 1, \dots, e$, erzeugt; in Zeichen

$$A_{n,q} = k\langle u^{i1} v^{j1}, \dots, u^{ie} v^{je} \rangle.$$

Unter diesen Elementen kommen stets $u^n, u^{n-q}v, v^n$ vor. Wir setzen deshalb

$$B_{n,q} = k\langle u^n, u^{n-q}v, v^n \rangle.$$

Der analytische Monomorphismus $B_{n,q} \hookrightarrow A_{n,q}$ ist endlich. Da für die Quotientenkörper $Q(B_{n,q}) = Q(A_{n,q})$ gilt und $A_{n,q}$ normal ist, ist $A_{n,q}$ die Normalisierung von $B_{n,q}$. Um also die Auflösung der Singularitäten von $X_{n,q}$ zu erhalten, genügt es, die Singularitäten des zu $B_{n,q}$ gehörenden Raumkeimes $Y_{n,q}$ aufzulösen. Nun ist

$$B_{n,q} \cong k\langle x_1, x_2, x_e \rangle / (x_1^{n-q} x_e - x_2^n)$$

und damit die Auflösung von $Y_{n,q}$ seit Hirzebruch [6] wohlbekannt (vgl. zum Folgenden auch Laufer [8]): Man bildet zunächst die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{n}{q} = b_1 - \underline{1} \overline{b_2} - \dots - \underline{1} \overline{b_r}, \quad b_q \geq 2, \quad \varrho = 1, \dots, r,$$

und verheftet dann $r + 1$ Exemplare des k^2 mit Koordinaten (u_ϱ, v_ϱ) , $\varrho = 0, \dots, r$, sukzessiv auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{u_0}, & v_1 &= u_0^{b_1} v_0 \\ v_2 &= \frac{1}{v_1}, & u_2 &= v_1^{b_2} u_1 \\ & & & \vdots \end{aligned} \tag{10}$$

Dadurch erhält man eine Mannigfaltigkeit $\tilde{X}_{n,q}$, die zusammen mit einer geeigneten Abbildung $\tilde{X}_{n,q} \xrightarrow{\pi} Y_{n,q}$ die Singularitäten von $Y_{n,q}$ auflöst. Die exzeptionelle Menge $E = \pi^{-1}(0)$ ist Vereinigung von r rationalen singularitätenfreien Kurven $E_\varrho \cong \mathbb{P}_1(k)$, $\varrho = 1, \dots, r$, mit der folgenden Schnittmatrix

$$E_\varrho \circ E_\sigma = \begin{cases} -b_\varrho, & \varrho = \sigma \\ 1, & \varrho = \sigma + 1, \sigma - 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{11}$$

Der zugehörige duale Graph ist dann

$$\begin{array}{ccccccc} -b_1 & & -b_2 & & \dots & & -b_{r-1} & & -b_r \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \dots & \bullet & \text{---} & \bullet & & \bullet \end{array}, \quad \bullet = \mathbb{P}_1(k). \tag{12}$$

Die Abbildung π läßt sich durch eine Abbildung f über die Normalisierung $X_{n,q} \rightarrow Y_{n,q}$ faktorisieren. Wir wollen f im folgenden Satz explizit beschreiben, da dies bisher noch nicht in der Literatur geschehen zu sein scheint.

Satz 5. Die Funktionen $f_\varepsilon = u_0^{j_\varepsilon} v_0^{k_\varepsilon}$, $\varepsilon = 1, \dots, e$, lassen sich holomorph nach ganz $\tilde{X}_{n,q}$ fortsetzen. Die Abbildung $f: \tilde{X}_{n,q} \rightarrow X_{n,q}$ wird gegeben durch $f = (f_1, \dots, f_e)$.

Den Beweis überlassen wir dem Leser (man führe Induktion über r durch und benutze dabei die nachstehenden Überlegungen; vgl. auch die Beweisskizze zu Satz 9).

Durch Berechnung von n und q aus b_1, \dots, b_r lassen sich die Zahlen a_2, \dots, a_{e-1} (d. h. aus dem dualen Graphen der Auflösung die Gleichungen) gewinnen und umgekehrt. Wir wollen jetzt zeigen, daß es auch einen direkten Weg für diese Berechnung gibt. Dabei ergeben sich zwei wichtige Formeln für den Zusammenhang der b_ϱ mit den a_ε .

Lemma 3. Es gelte

$$\begin{aligned} \frac{n}{q} &= b_1 - \underline{1} \sqrt{b_2} - \dots - \underline{1} \sqrt{b_r}, \\ \frac{n_1}{q_1} &= b_2 - \underline{1} \sqrt{b_3} - \dots - \underline{1} \sqrt{b_r}, \\ \frac{n_1}{n_1 - q_1} &= a_2 - \underline{1} \sqrt{a_3} - \dots - \underline{1} \sqrt{a_{e-1}}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\frac{n}{n-q} = 2 - \underbrace{1}_{\sqrt{2}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{2}} - \underbrace{1}_{\sqrt{(a_2+1)}} - \underbrace{1}_{\sqrt{a_3}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{a_{e-1}}}$$

mit $(b_1 - 2)$ Zweien am Anfang.

Beweis (durch Induktion nach $b_1 \geq 2$). Es sei $b_1 = 2$. Dann gilt

$$\frac{n}{q} = 2 - \frac{1}{\frac{n_1}{q_1}} = \frac{2n_1 - q_1}{n_1}$$

und damit

$$\frac{n}{n-q} = \frac{2n_1 - q_1}{n_1 - q_1} = 1 + \frac{n_1}{n_1 - q_1} = (a_2 + 1) - \underbrace{1}_{\sqrt{a_3}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{a_{e-1}}}.$$

Es sei nun die Richtigkeit der Behauptung schon für $b_1 \geq 2$ nachgewiesen, und es sei

$$\frac{n}{q} = (b_1 + 1) - \underbrace{1}_{\sqrt{b_2}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{b_r}}.$$

Dann gilt

$$\frac{n-q}{q} = b_1 - \underbrace{1}_{\sqrt{b_2}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{b_r}} = b_1 - \frac{1}{\frac{n_1}{q_1}}$$

und also nach Induktionsvoraussetzung

$$\frac{n-q}{n-2q} = 2 - \underbrace{1}_{\sqrt{2}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{2}} - \underbrace{1}_{\sqrt{(a_2+1)}} - \dots - \underbrace{1}_{\sqrt{a_{e-1}}}$$

mit $(b_1 - 2)$ Zweien am Anfang. Die Behauptung folgt aus

$$\frac{n}{n-q} = 2 - \frac{1}{\frac{n-q}{n-2q}}. \qquad \text{q.e.d.}$$

Lemma 3 liefert das folgende praktische Verfahren zur Berechnung der a_e aus den b_q . Man ordne (b_1, \dots, b_r) ein System von Punkten in der folgenden Weise zu:

$$\underbrace{\times \quad \times \quad \dots \quad \times \quad \times}_{(b_1 - 1) \text{ Punkte}}$$

$$\underbrace{\times \quad \times \quad \dots \quad \times \quad \times}_{(b_2 - 1) \text{ Punkte}}$$

$$\underbrace{\times \quad \times \quad \dots \quad \times \quad \times}_{(b_3 - 1) \text{ Punkte}}$$

...

Jedem System von senkrecht übereinanderstehenden Punkten entspricht dann ein a_e , und zwar ist $a_e - 1$ gleich der Anzahl dieser Punkte.

Beispiel 1. $(b_1, \dots, b_5) = (5, 2, 2, 3, 2)$ liefert das Diagramm



und also $(a_2, \dots, a_6) = (2, 2, 2, 5, 3)$. Man verifiziert leicht (aber mit erheblich viel mehr Aufwand), daß tatsächlich

$$5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{47}{11}$$

und

$$\frac{47}{47 - 11} = 2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3}.$$

Die nachstehende Aussage ergibt sich unmittelbar aus Lemma 3:

Lemma 4. *Es sei*

$$\frac{n}{q} = b_1 - \sqrt{b_2} - \dots - \sqrt{b_r} \quad \text{und} \quad \frac{n}{n-q} = a_2 - \sqrt{a_3} - \dots - \sqrt{a_{e-1}}.$$

Dann gilt:

i) $\sum_{\varrho=1}^r (b_\varrho - 1) = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} (a_\varepsilon - 1),$

ii) $e = 3 + \sum_{\varrho=1}^r (b_\varrho - 2).$

Bemerkung. Die Aussage ii) liefert zusammen mit Lemma 2 die folgende bekannte Formel (vgl. [1], p. 349):

$$\text{eib } A_{n,q} = 3 + \sum_{\varrho=1}^r (b_\varrho - 2).$$

§ 4. Die Relationen

Es seien $X_{n,q}, A_{n,q} = K_e/\mathfrak{a}_{n,q}$ wie bisher. Um Deformationen von $X_{n,q}$ zu erhalten, muß man den Relationenmodul von $\mathfrak{a}_{n,q}$ bestimmen. Wir setzen (unter Veränderung der Indizes)

$$g_{ij} = x_i x_j - p_{ij}, \quad 2 \leq i + 1 \leq j - 1 \leq e - 1,$$

p_{ij} wie in (7), und müssen dann alle $(R_{ij})_{2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1} \in e_1 K_e$ finden mit

$$\sum R_{ij} g_{ij} = 0.$$

Satz 6. Der Relationenmodul von $\alpha_{n,q}$ wird erzeugt von den folgenden Relationen:

$$x_j g_{ik} = x_i g_{jk} + (x_{j+1}^{a_{i+1}^j - 2} \cdots x_{k-2}^{a_{k-2}^j - 2}) x_{k-1}^{a_{k-1}^j - 1} g_{i,j+1}, \quad 1 \leq i < j < k-1 \leq e-1, \quad (13)$$

$$x_j g_{ik} = x_k g_{ij} + x_{i+1}^{a_{i+1}^j - 1} (x_{i+2}^{a_{i+2}^j - 2} \cdots x_{j-1}^{a_{j-1}^j - 2}) g_{j-1,k}, \quad 2 \leq i+1 < j < k \leq e,$$

wobei die Klammern im Falle $j = k-2$ bzw. $i = j-2$ fortzulassen sind.

Beweis. Wir setzen abkürzend $\alpha_e = \alpha_{n,q}$ und bezeichnen den durch die Relationen (13) in $e_1 K_e$ erzeugten Untermodul mit M_e . Wir beweisen den Satz dann durch Induktion nach $e \geq 3$.

1. Im Falle $e = 3$ ist $M_e = 0$, und dies ist tatsächlich der Relationenmodul, da $\alpha_e = g_{1,3} K_3$ ein Hauptideal ist.

2. Wir können also im folgenden $e \geq 4$ voraussetzen. Wir zeigen dann als nächstes, daß die trivialen Relationen

$$g_{1e} g_{ij} = g_{ij} g_{1e}, \quad (i, j) \neq (1, e) \quad (14)$$

in M_e enthalten sind. Wir können dabei ohne Einschränkung $i > 1$ voraussetzen, führen aber die Rechnung nur für $j = e$ durch:

$$\begin{aligned} g_{1e} g_{ie} &= (x_1 x_e - p_{1e}) g_{ie} = x_e (x_1 g_{ie}) - p_{1e} g_{ie} \\ &= x_e (x_i g_{1e} - x_{i+1}^{a_{i+1}^1 - 2} \cdots x_{e-2}^{a_{e-2}^1 - 2} x_{e-1}^{a_{e-1}^1 - 1} g_{1,i+1}) \\ &\quad - x_2^{a_2^1 - 1} x_3^{a_3^1 - 2} \cdots x_{e-2}^{a_{e-2}^1 - 2} x_{e-1}^{a_{e-1}^1 - 1} g_{ie} \\ &= x_i x_e g_{1e} - x_{i+1}^{a_{i+1}^1 - 2} \cdots x_{e-2}^{a_{e-2}^1 - 2} x_{e-1}^{a_{e-1}^1 - 1} \\ &\quad \cdot (x_e g_{1,i+1} + x_2^{a_2^1 - 1} x_3^{a_3^1 - 2} \cdots x_{i-2}^{a_{i-2}^1 - 2} g_{ie}) \\ &= x_i x_e g_{1e} - x_{i+1}^{a_{i+1}^1 - 2} \cdots x_{e-2}^{a_{e-2}^1 - 2} x_{e-1}^{a_{e-1}^1 - 1} x_{i+1} g_{1e} \\ &= (x_i x_e - p_{ie}) g_{1e} = g_{ie} g_{1e}. \end{aligned}$$

3. Wir bilden nun das von g_{ij} , $2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-2$, in $K_{e-1} = k \langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle$ erzeugte Ideal α_{e-1} . Für α_{e-1} ist dann nach Induktionsvoraussetzung schon alles bewiesen: M_{e-1} ist der Relationenmodul von α_{e-1} . Weiter gilt offensichtlich

$$(M_{e-1} \otimes_{K_{e-1}} K_e) \oplus \underbrace{\oplus \cdots \oplus}_{{(e-2) \text{ Nullen}}} 0 \subset M_e. \quad (15)$$

4. In diesem Abschnitt beweisen wir durch Induktion nach t , $1 \leq t \leq e-3$, daß die folgende Aussage richtig ist:

Zu jeder Relation $(R_{ij})_{2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1}$ gibt es Funktionen

$$\begin{aligned} S_{ij}^{(0)} &\in k\langle x_1, \dots, x_e \rangle, & 2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1 \\ T_{ij}^{(0)} &\in k\langle x_1, \dots, x_\lambda \rangle, & 2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-2, \quad \lambda = \max(j, e-t) \\ V_k^{(0)} &\in k\langle x_1, \dots, x_{e-t} \rangle, & 1 \leq k \leq e-t-1, \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)_t $S_{ij}^{(0)} = (x_\lambda^{a_\lambda-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) x_{e-1}^{a_{e-1}-1} T_{ij}^{(0)}, \quad 2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-2,$
- (ii)_t $\sum_{i+2 \leq j \leq e-t} T_{ij}^{(0)} g_{ij} = x_{e-t} V_{e-t-1}^{(0)} + \sum_{1 \leq k \leq e-t-2} x_{k+1}^{a_{k+1}-1} \cdot (x_{k+2}^{a_{k+2}-2} \dots x_{e-t-1}^{a_{e-t-1}-2}) V_k^{(0)},$
- (iii)_t $(R_{ij}) \equiv (S_{ij}^{(0)}) \pmod{M_e}.$

Beweis. Es sei $t = 1$. Wir zerlegen $R_{ij} = R_{ij}^{(0)} + x_e R_{ij}^{(1)}$ mit $R_{ij}^{(0)} \in K_{e-1}$ und $R_{ij}^{(1)} \in K_e$. In M_e kommt für $j \leq e-1$ die Relation

$$x_e g_{ij} = x_j g_{ie} - x_{i+1}^{a_{i+1}-1} (x_{i+2}^{a_{i+2}-2} \dots x_{j-1}^{a_{j-1}-2}) g_{j-1,e}$$

vor. Dies impliziert

$$(R_{ij}) \equiv (R'_{ij}) \pmod{M_e}$$

mit $R'_{ij} = R_{ij}^{(0)} \in K_{e-1}$ für $j \leq e-1$. Wir können also ohne Einschränkung von vornherein

$$R_{ij} \in K_{e-1}, \quad j \leq e-1,$$

annehmen. Setzt man dann in

$$\sum_{i+2 \leq j \leq e-1} R_{ij} g_{ij} + \sum_{1 \leq k \leq e-2} (R_{ke}^{(0)} + x_e R_{ke}^{(1)}) g_{ke} = \sum_{i+2 \leq j \leq e} R_{ij} g_{ij} = 0$$

$x_e = 0$ ein, so folgt eine Gleichung

$$\sum_{i+2 \leq j \leq e-1} R_{ij} g_{ij} = \sum_{k \leq e-2} R_{ke}^{(0)} p_{ke} \tag{16}$$

in K_{e-1} , und damit

$$\begin{aligned} &x_e^{a_{e-1}-1} \left(x_{e-1} R_{e-2,e}^{(0)} + \sum_{k \leq e-3} x_{k+1}^{a_{k+1}-1} (x_{k+2}^{a_{k+2}-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) R_{ke}^{(0)} \right) \\ &= \sum_{k \leq e-2} R_{ke}^{(0)} p_{ke} \in \mathfrak{a}_{e-1}. \end{aligned}$$

Da \mathfrak{a}_{e-1} ein Primideal ist und $x_{e-1} \notin \mathfrak{a}_{e-1}$ wegen $\mathfrak{a}_{e-1} \subset \mathfrak{m}_{e-1}^2$, muß schon der Ausdruck in der Klammer in \mathfrak{a}_{e-1} liegen. Es existieren also Funktionen

$$T_{ij}^{(1)} \in k\langle x_1, \dots, x_{e-1} \rangle, \quad 2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-2,$$

mit

$$\sum_{i+2 \leq j \leq e-1} T_{ij}^{(1)} g_{ij} = x_{e-1} R_{e-2,e}^{(0)} + \sum_{k \leq e-3} x_{k+1}^{a_{k+1}-1} (x_{k+2}^{a_{k+2}-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) R_{ke}^{(0)}.$$

Hieraus folgt mit (16):

$$\sum_{i+2 \leq j \leq e-1} (R_{ij} - x_{e-1}^{a_{e-1}-1} T_{ij}^{(1)}) g_{ij} = 0.$$

Nach Induktionsvoraussetzung (bzgl. $e-1$) gilt dann aber

$$(R_{ij} - x_{e-1}^{a_{e-1}-1} T_{ij}^{(1)})_{i+2 \leq j \leq e-1} \in M_{e-1},$$

und hieraus folgt wegen (15) sofort

$$(R_{ij} - S_{ij}^{(1)})_{i+2 \leq j \leq e} \in M_e$$

mit $S_{ij}^{(1)} = x_{e-1}^{a_{e-1}-1} T_{ij}^{(1)}$, $i+2 \leq j \leq e-1$. Setzt man noch $V_k^{(1)} = R_k^{(0)}$, $k=1, \dots, e-2$, so sind (i)₁, (ii)₁ und (iii)₁ bewiesen.

Es seien nun die obigen Aussagen für t mit $1 \leq t < e-3$ schon gezeigt. Wir betrachten dann $T_{il}^{(t)}$ mit $1 \leq e-t-1$. Nach Voraussetzung ist $T_{il}^{(t)} \in k\langle x_1, \dots, x_{e-t} \rangle$, und wir können setzen

$$T_{il}^{(t)} = \tilde{T}_{il}^{(t)} + x_{e-t} \tilde{\tilde{T}}_{il}^{(t)}, \quad \tilde{\tilde{T}}_{il}^{(t)} \in k\langle x_1, \dots, x_{e-t-1} \rangle.$$

In $\Sigma S_{ij}^{(t)} g_{ij}$ tritt damit der Ausdruck

$$(x_{e-t}^{a_{e-t}-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) x_{e-1}^{a_{e-1}-1} \cdot x_{e-t} \tilde{\tilde{T}}_{il}^{(t)} g_{il}$$

auf. Wegen der Relation

$$x_{e-t} g_{il} = x_l g_{i, e-t} - x_{i+1}^{a_{i+1}-1} (x_{i+2}^{a_{i+2}-2} \dots x_{l-1}^{a_{l-1}-2}) g_{l-1, e-t}$$

kann man diesen Ausdruck mit Hilfe neuer $S_{i, e-t}^{(t+1)}$ -Terme der richtigen Bauart fortschaffen. Wir dürfen dann sogar ohne Einschränkung

$$T_{il}^{(t)} = \tilde{T}_{il}^{(t)} \in k\langle x_1, \dots, x_{e-t-1} \rangle, \quad l \leq e-t-1,$$

annehmen, da man in (ii)_t die zusätzlichen Glieder in den Ausdruck $x_{e-t} V_{e-t-1}^{(t)}$ hineinnehmen kann. Man setzt nun in (ii)_t $x_{e-t} = 0$ ein, und erhält die Gleichung

$$\begin{aligned} & \sum_{i+2 \leq j \leq e-t-1} T_{ij}^{(t)} g_{ij} \\ &= \sum_{k \leq e-t-2} (\tilde{T}_{k, e-t}^{(t)} p_{k, e-t} + x_{k+1}^{a_{k+1}-1} (x_{k+2}^{a_{k+2}-2} \dots x_{e-t-1}^{a_{e-t-1}-2}) \tilde{V}_k^{(t)}) \\ &= x_{e-t-1}^{a_{e-t-1}-2} \left(x_{e-t-1} V_{e-t-2}^{(t+1)} + \sum_{1 \leq k \leq e-t-3} x_{k+1}^{a_{k+1}-1} (x_{k+2}^{a_{k+2}-2} \dots \right. \\ & \quad \left. \dots x_{e-t-2}^{a_{e-t-2}-2}) \cdot V_k^{(t+1)} \right) \end{aligned}$$

mit gewissen Funktionen $V_k^{(t+1)} \in k\langle x_1, \dots, x_{e-t-1} \rangle$. Man definiert analog wie oben das Ideal \mathfrak{a}_{e-t-1} und schließt weiter wie im Falle $t=1$.

5. Um Satz 6 zu beweisen, wenden wir die oben bewiesenen Gleichungen im Falle $t=e-3$ an. Es gilt also

$$(R_{ij}) \equiv (\tilde{S}_{ij}) \pmod{M_e}$$

mit

$$\tilde{S}_{ij} = S_{ij}^{(e-3)} = (x_j^{a_j-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) x_{e-1}^{a_{e-1}-1} T_{ij}, \quad T_{ij} = T_{ij}^{(e-3)},$$

$$2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-2.$$

Nun ist die Relation

$$(x_j^{a_j-2} \dots x_{e-2}^{a_{e-2}-2}) x_{e-1}^{a_{e-1}-1} g_{ij} = x_{j-1} g_{ie} - x_i g_{j-1,e}$$

in M_e , und folglich hat man

$$(R_{ij}) \equiv (S_{ij}) \text{ mod } M_e$$

mit $S_{ij} = 0$ für $i+2 \leq j \leq e-1$. Es gilt also

$$\sum_{1 \leq k \leq e-2} S_{ke} g_{ke} = 0,$$

woraus

$$S_{1e} g_{1e} \in \tilde{a}_{e-1} K_e$$

folgt, wobei $\tilde{a}_{e-1} K_e$ das von den Elementen g_{ij} , $3 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1$, in K_e erzeugte Primideal ist. Nun ist

$$g_{1e} \notin \tilde{a}_{e-1} K_e,$$

da sonst im Gegensatz zu Satz 4 $\text{cg } a_e < e_1$ wäre, und mithin

$$S_{1e} = \sum_{3 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1} S'_{ij} g_{ij}.$$

Da die trivialen Relationen $g_{ij} g_{1e} = g_{1e} g_{ij}$ nach Abschnitt 2 des Beweises in M_e enthalten sind, erhalten wir schließlich eine Kongruenz

$$(R_{ij}) \equiv (S''_{ij}) \text{ mod } M_e \quad \text{mit} \quad S''_{ij} = 0, \quad j = 3, \dots, e.$$

Entwickelt man S''_{ij} nach Potenzen von x_1 und wendet noch einmal die Induktionsvoraussetzung auf \tilde{a}_{e-1} an, so ergibt sich

$$(R_{ij}) \equiv 0 \text{ mod } M_e. \quad \text{q.e.d.}$$

Bemerkung. Man kann zeigen, daß die nunmehr konstruierte *Auflösung*

$$e_2 K_e \rightarrow e_1 K_e \rightarrow K_e \rightarrow K_e / a_{n,q} \rightarrow 0$$

minimal ist im Sinne von [4], Kapitel III, § 2.1, wobei e_2 die Anzahl der Relationen in Satz 6 ist:

$$e_2 = \frac{1}{3}(e-1)(e-2)(e-3).$$

Da $A_{n,q} = K_e / a_{n,q}$ normal und 2-dimensional und damit auch Macaulaysch ist (was auch aus $A_{n,q} = K_2^{G_{n,q}}$ folgt), gilt nach dem Syzygiensatz (vgl. z. B. [4], Satz III. 2.6) für die Syzygienlänge von $A_{n,q}$:

$$\text{syl}_{K_e} A_{n,q} = e - 2.$$

Also ist im Falle $e=4$ die Abbildung $e_2 K_e \rightarrow e_1 K_e$ schon injektiv, und damit

$$0 \rightarrow 2K_4 \rightarrow 3K_4 \rightarrow K_4 \rightarrow K_4/\alpha_{n,q} \rightarrow 0$$

eine Hilbertauflösung von $K_4/\alpha_{n,q}$. In dem homogenen Fall

$$\alpha_{3,1} = (x_1 x_3 - x_2^2, x_2 x_4 - x_3^2, x_1 x_4 - x_2 x_3) k \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$$

kann man diese exakte Sequenz schon bei Hilbert ([5], p. 503) finden.

Es ist zu vermuten, daß die volle Hilbertauflösung für beliebiges e stets folgendermaßen aussieht:

$$0 \rightarrow e_{e-2} K_e \rightarrow e_{e-3} K_e \rightarrow \cdots \rightarrow e_2 K_e \rightarrow e_1 K_e \rightarrow K_e \rightarrow K_e/\alpha_{n,q} \rightarrow 0,$$

wobei

$$e_j = \frac{1}{j+1} (e-1)(e-2)\cdots(e-(j+1)), \quad 1 \leq j \leq e-2.$$

§ 5. Die spezielle Deformation

Nach der Folgerung zu Satz 4 ist $A_{n,q}$ ein vollständiger Durchschnitt genau dann, wenn $q=n-1$, und dies gilt genau dann, wenn $e=3$. In diesem Fall hat man die Hyperflächensingularität

$$A_{n,n-1} = k \langle x_1, x_2, x_3 \rangle / (x_1 x_3 - x_2^n), \quad n \geq 2,$$

deren verselle Deformation leicht zu berechnen ist. Sie wird beschrieben durch die Funktion

$$x_1 x_3 - x_2^n + s_1 + s_2 x_2 + \cdots + s_{n-1} x_2^{n-2} \quad (18)$$

in $k \langle x_1, x_2, x_3, s_1, \dots, s_{n-1} \rangle$ (vgl. z. B. [16]). Insbesondere ist die Dimension des regulären Basisraumes gleich $n-1 = a_2 - 1$. Die Singularitäten in den Nachbarfasern von $X_{n,n-1}$ lassen sich aufgrund der Gl. (18) ohne Mühe bestimmen: Es treten alle $X_{n',n'-1}$ auf mit $2 \leq n' \leq n$. Schließlich gibt es eine einparametrische Unterfamilie, beschrieben durch $x_1 x_3 - x_2^n + s_1$, d. h. $s_2 = \cdots = s_{n-1} = 0$, deren allgemeine Faser singularitätenfrei ist.

Im Fall $e \geq 4$ existiert nach Grauert [3] zwar auch eine verselle Deformation – da dann aber kein vollständiger Durchschnitt mehr vorliegt, gibt es keine Methode, sie auf einfache Weise zu berechnen. Wir begnügen uns daher in diesem Paragraphen mit der Konstruktion einer Familie, von der wir später sehen werden, daß sie hinreichend viele schöne Eigenschaften besitzt. In § 7 beweisen wir, daß sie für $e=4$ sogar versell ist, während dies für $e \geq 5$ nicht mehr zutrifft.

Es sei also im folgenden $e \geq 4$ und $\alpha_{n,q} = (g_{ij}) k \langle x_1, \dots, x_e \rangle$ mit $g_{ij} = x_i x_j - p_{ij}$, $2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1$ wie in (8). Wir führen Parameter

$$s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}$$

ein und definieren die folgenden Funktionen in

$$k\langle x, s \rangle = k\langle x \rangle \hat{\otimes} k\langle s \rangle = k\langle x_1, \dots, x_e \rangle \hat{\otimes} k\langle s_2^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_e-1-1)} \rangle:$$

$$y_i = \begin{cases} x_i + s_i^{(1)}, & i = 3, \dots, e-2, \\ x_i, & i = e-1, e, \end{cases} \quad (19)$$

$$X_i = \begin{cases} x_i^{a_i-1} + s_i^{(1)} x_i^{a_i-2} + \dots + s_i^{(a_i-1)}, & i = 2, e-1, \\ x_i^{a_i-2} + s_i^{(2)} x_i^{a_i-3} + \dots + s_i^{(a_i-1)}, & i = 3, \dots, e-2, \end{cases} \quad (20)$$

$$G_{ij} = \begin{cases} x_1 y_e - X_2 \cdots X_{e-1}, & 2 = i+1 \leq j-1 = e-1, \\ x_1 y_j - X_2 \cdots X_{j-1} x_{j-1}, & 2 = i+1 \leq j-1 < e-1, \\ x_i y_e - y_{i+1} X_{i+1} \cdots X_{e-1}, & 2 < i+1 \leq j-1 = e-1, \\ x_i y_j - y_{i+1} X_{i+1} \cdots X_{j-1} x_{j-1}, & 2 < i+1 \leq j-1 < e-1. \end{cases} \quad (21)$$

Ferner sei $\mathfrak{A}_{n,q}$ das von den G_{ij} , $2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1$, in $k\langle x, s \rangle$ erzeugte Ideal, und φ sei die Komposition der kanonischen Abbildungen

$$k\langle s \rangle \hookrightarrow k\langle x \rangle \hat{\otimes} k\langle s \rangle \rightarrow k\langle x, s \rangle / \mathfrak{A}_{n,q}. \quad (22)$$

Es gilt dann

Satz 7. $\varphi : k\langle s \rangle \rightarrow k\langle x, s \rangle / \mathfrak{A}_{n,q}$ ist eine Deformation von $A_{n,q} = k\langle x \rangle / \mathfrak{a}_{n,q}$ über $k\langle s \rangle$.

Beweis. Es gilt nach Konstruktion $G_{ij} \equiv g_{ij} \pmod{m(k\langle s \rangle)}$. Folglich ist $A_{n,q}$ die Faser von φ über dem Nullpunkt. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß φ platt ist. Das ist äquivalent dazu, daß die Relationen (13) zu Relationen der G_{ij} in $k\langle x, s \rangle$ fortgesetzt werden können, was wegen

$$x_j G_{ik} = \begin{cases} x_i G_{jk} + X_{j+1} \cdots X_{k-1} x_{k-1} G_{i,j+1}, & 1 \leq i < j < k-1 < e-1, \\ x_i G_{je} + X_{j+1} \cdots X_{e-1} G_{i,j+1}, & 1 \leq i < j < k-1 = e-1, \end{cases}$$

$$y_j G_{ik} = \begin{cases} y_k G_{1j} + X_2 \cdots X_{j-1} G_{j-1,k}, & 2 = i+1 < j < k \leq e, \\ y_k G_{ij} + y_{i+1} X_{i+1} \cdots X_{j-1} G_{j-1,k}, & 2 < i+1 < j < k \leq e \end{cases}$$

der Fall ist. q.e.d.

Beispiel 2. Der Kegel $A_{n,1}$ über der rationalen Normalkurve vom Grad n in \mathbb{P}_n besitzt die Gleichungen

$$x_i x_j - x_{i+1} x_{j-1} = 0, \quad 2 \leq i+1 \leq j-1 \leq n.$$

Es gilt also $e = \text{eib } A_{n,1} = n+1$ und $a_e = 2$, $\varepsilon = 2, \dots, n$. Man kann diese Gleichungen auch suggestiver in der Form

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \dots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

schreiben. Die obige Deformation hat dann die Gestalt

$$\frac{x_1}{x_2 + s_2^{(1)}} = \frac{x_2}{x_3 + s_3^{(1)}} = \dots = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1} + s_{n-1}^{(1)}} = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n + s_n^{(1)}}{x_{n+1}}$$

und ist offensichtlich zu der von Tjurina [15] angegebenen Familie äquivalent.

Für die der Abbildung φ zugeordnete Abbildung analytischer Räume schreiben wir

$$\varphi: Z_{n,q} \rightarrow S. \quad (23)$$

Wir wollen jetzt die Singularitäten der Fasern $\varphi^{-1}(s)$, $s \in S$, bestimmen. Dazu führen wir die neue Schreibweise

$$X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1}) \quad (24)$$

ein. Mit Hilfe von (7) und (8) sieht man, daß $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ auch dann sinnvoll definiert ist, wenn $a_2 = 1$ oder $a_{e-1} = 1$. Es gilt

$$X(1, a_3, \dots, a_{e-1}) = X(a_3 - 1, \dots, a_{e-1}), \quad X(1) = \text{reguläre Singularität}.$$

Satz 8. *Es sei $\varphi: Z_{n,q} \rightarrow S$ die spezielle Deformation (23) von $\varphi^{-1}(0) = X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1})$. Dann sind die in den Fasern $\varphi^{-1}(s)$, $s \in S$, auftretenden Singularitäten genau die folgenden:*

$$X(a'_2, \dots, a'_{e-1}), \quad 1 \leq a'_2 \leq a_2, \quad 1 \leq a'_{e-1} \leq a_{e-1}, \quad 2 \leq a'_\varepsilon \leq a_\varepsilon, \quad \varepsilon = 3, \dots, e-2.$$

Jede dieser Singularitäten kommt in beliebiger Nähe von $X(a_2, \dots, a_{e-1})$ vor.

Außerdem gibt es einen eindimensionalen regulären Unterraum S_1 von S durch 0, so daß die allgemeine Faser der eingeschränkten Familie $\hat{Z}_{n,q} = Z_{n,q}|_{S_1} \rightarrow S_1$ singularitätenfrei ist. Insbesondere ist φ nicht trivial und somit $X_{n,q}$ nicht starr.

Der Beweis wird zweckmäßigerweise durch Induktion nach e geführt und sei dem Leser überlassen. Wir begnügen uns damit, die Familie $\hat{Z}_{n,q}$ anzugeben. Es sei s_1 eine neue Variable und

$$\hat{y}_i = \begin{cases} x_i + s_1, & i = 3, \dots, e-2 \\ x_i, & i = e-1, e, \end{cases} \quad (25)$$

$$\hat{X}_i = \begin{cases} (x_i + s_1)(x_i + \zeta_n s_1) \cdots (x_i + \zeta_n^{a_i-2} s_1), & i = 2, e-1, \\ (x_i + \zeta_n s_1) \cdots (x_i + \zeta_n^{a_i-2} s_1), & i = 3, \dots, e-2, \end{cases} \quad (26)$$

$$\hat{G}_{i,j} = \begin{cases} x_1 \hat{y}_e - \hat{X}_2 \cdots \hat{X}_{e-1}, & 2 = i+1 \leq j-1 = e-1, \\ x_1 \hat{y}_j - \hat{X}_2 \cdots \hat{X}_{j-1} x_{j-1}, & 2 = i+1 \leq j-1 < e-1, \\ x_i \hat{y}_e - \hat{y}_{i+1} \hat{X}_{i+1} \cdots \hat{X}_{e-1}, & 2 < i+1 \leq j-1 = e-1, \\ x_i \hat{y}_j - \hat{y}_{i+1} \hat{X}_{i+1} \cdots \hat{X}_{j-1} x_{j-1}, & 2 < i+1 \leq j-1 < e-1. \end{cases} \quad (27)$$

Ist dann $\hat{\mathfrak{A}}_{n,q}$ das von den Funktionen \hat{G}_{ij} in $k\langle x_1, \dots, x_e \rangle \hat{\otimes} k\langle s_1 \rangle$ erzeugte Ideal, so existiert eine surjektive Abbildung $k\langle s \rangle \rightarrow k\langle s_1 \rangle$ mit

$$k\langle x, s_1 \rangle / \hat{\mathfrak{A}}_{n,q} \cong (k\langle x, s \rangle / \mathfrak{A}_{n,q}) \hat{\otimes}_{k\langle s \rangle} k\langle s_1 \rangle.$$

Die durch $\hat{\mathfrak{A}}_{n,q}$ definierte Deformation $\hat{Z}_{n,q} \rightarrow S_1$ ist also die Einschränkung von $Z_{n,q}$ auf den eindimensionalen regulären Unterraum S_1 von S . Daß in $\hat{Z}_{n,q}$ außerhalb der speziellen Faser nur reguläre Fasern vorkommen, liegt an der Tatsache, daß

$$a_\varepsilon \leq n, \quad \varepsilon = 2, \dots, e-1,$$

für

$$\frac{n}{n-q} = a_2 - \underbrace{1}_{\lfloor} a_3 - \dots - \underbrace{1}_{\lfloor} a_{e-1}.$$

Wir wollen schließlich noch anmerken, wie sich die *Graphen* der Singularitäten bei der speziellen Deformation verändern. Ist

$$\frac{n}{q} = b_1 - \underbrace{1}_{\lfloor} b_2 - \dots - \underbrace{1}_{\lfloor} b_r, \quad \frac{n}{n-q} = a_2 - \underbrace{1}_{\lfloor} a_3 - \dots - \underbrace{1}_{\lfloor} a_{e-1},$$

so schreiben wir auch

$$\begin{aligned} X_{n,q} &= X(a_2, \dots, a_{e-1}) = X[b_1, \dots, b_r], \\ X[\emptyset] &= \text{reguläre Singularität.} \end{aligned} \tag{28}$$

Aus Lemma 3 liest man unmittelbar ab:

Lemma 5. *Ist $X(a_2, \dots, a_{e-1}) = X[b_1, \dots, b_r]$, so gilt*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & X(a_2 - 1, a_3, \dots, a_{e-1}) = X[b_2, \dots, b_r] \\ & X(a_2, \dots, a_{e-2}, a_{e-1} - 1) = X[b_1, \dots, b_{r-1}] \end{aligned}$$

(ii) *für $2 < \varepsilon < e-1$, $a_\varepsilon \geq 3$, gibt es ein ϱ mit $1 \leq \varrho < r$, so daß*

$$\begin{aligned} & X(a_2, \dots, a_{\varepsilon-1}, a_\varepsilon - 1, a_{\varepsilon+1}, \dots, a_{e-1}) \\ &= X[b_1, \dots, b_{\varrho-1}, b_\varrho + b_{\varrho+1} - 2, b_{\varrho+2}, \dots, b_r]. \end{aligned}$$

Damit kann man Satz 8 auf die folgende Weise formulieren:

Satz 8'. *Es sei $\varphi: Z_{n,q} \rightarrow S$ die spezielle Deformation von $\varphi^{-1}(0) = X_{n,q} = X[b_1, \dots, b_r]$. Dann sind die in den Fasern $\varphi^{-1}(s)$, $s \in S$, vorkommenden Singularitäten $X[b_1^{(l)}, \dots, b_r^{(l)}]$ genau diejenigen, die durch die folgenden Bedingungen beschrieben werden:*

- a) $0 \leq l \leq r$.
- b) $l = r \Rightarrow X[b_1^{(l)}, \dots, b_r^{(l)}] = X[b_1, \dots, b_r]$.

c) Sind die Singularitäten $X[b_1^{(l)}, \dots, b_l^{(l)}]$ für festes $l \leq r$ schon bekannt, so erhält man alle Singularitäten $X[b_1^{(l-1)}, \dots, b_{l-1}^{(l-1)}]$ durch die in Lemma 5 beschriebenen Operationen:

- (i) „Streichen“ von $b_1^{(l)}$ oder $b_l^{(l)}$
- (ii) „Vereinigen“ von $b_\lambda^{(l)}$ und $b_{\lambda+1}^{(l)}$ zu $b_\lambda^{(l)} + b_{\lambda+1}^{(l)} - 2$ bei festem λ , $1 \leq \lambda \leq l-1$.

Wir betrachten dazu das

Beispiel 3. $A_{8,3}$ hat den Graphen $\bullet \overset{-3}{\text{---}} \overset{-3}{\bullet}$ und die Exponenten $(a_2, a_3, a_4) = (2, 3, 2)$. Nach Satz 8 treten die folgenden Singularitäten auf:

$$X(2, 3, 2) = X[3, 3]$$

$$X(1, 3, 2) = X(2, 2) = X[3]$$

$$X(2, 3, 1) = X(2, 2) = X[3]$$

$$X(2, 2, 2) = X[4]$$

$$X(1, 2, 2) = X(1, 2) = X(1) = X[\emptyset]$$

$$X(2, 2, 1) = X(2, 1) = X(1) = X[\emptyset].$$

Die auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke sind genau die, die auch nach Satz 8' auftreten müssen.

Bemerkung. Die spezielle Deformation (22) ist abhängig von der Reihenfolge der Koordinaten x_1, \dots, x_e . Kehrt man diese um, so erhält man im allgemeinen eine andere Deformation. Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, daß sie zu (22) äquivalent ist.

§ 6. Die simultane Auflösung der Singularitäten der speziellen Deformation

Die in § 5 konstruierte Deformation von $X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1})$ hat einen regulären Basisraum S der Dimension

$$\sum_{\varepsilon=2}^{e-1} (a_\varepsilon - 1).$$

Nun ist diese Größe nach Lemma 4 gleich

$$\sum_{\varrho=1}^r (b_\varrho - 1),$$

wenn $X_{n,q} = X[b_1, \dots, b_r]$, und dies legt die Vermutung nahe, daß die spezielle Deformation (23) in Zusammenhang stehen muß mit einer Deformation der Auflösung $\tilde{X}_{n,q}$ von $X_{n,q}$. Wir setzen analog zu (28) $\tilde{X}_{n,q} = \tilde{X}[b_1, \dots, b_r]$ und geben für diese Mannigfaltigkeit eine kanonische Deformation an:

Es sei T der $\Sigma(b_\varrho - 1)$ -dimensionale k -Vektorraum mit den Variablen $t = (t_1^{(1)}, \dots, t_1^{(b_1-1)}, \dots, t_r^{(1)}, \dots, t_r^{(b_r-1)})$. Wir verkleben $(r + 1)$ Exemplare von $k^2 \times T$ mit Variablen $(u_\varrho, v_\varrho, t)$, $\varrho = 0, \dots, r$, sukzessiv vermöge

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{u_0}, & v_1 &= u_0^{b_1} v_0 + t_1^{(1)} u_0^{b_1-1} + \dots + t_1^{(b_1-1)} u_0, & t &= t, \\ v_2 &= \frac{1}{v_1}, & u_2 &= v_1^{b_2} u_1 + t_2^{(1)} v_1^{b_2-1} + \dots + t_2^{(b_2-1)} v_1, & t &= t, \\ & & & \vdots & & \end{aligned} \tag{29}$$

Dadurch erhält man eine Mannigfaltigkeit $\tilde{Z}_{n,q}$ zusammen mit einer regulären Abbildung

$$\tilde{\varphi} : \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow T,$$

deren Faser $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$ wegen (10) isomorph zu $\tilde{X}_{n,q}$ ist. $\tilde{\varphi}$ ist also eine Deformation von $\tilde{X}_{n,q}$, die sich nach [13] zu einer Deformation von $X_{n,q}$ über T zusammenblasen läßt.

Wir setzen nun

$$\tau_\varrho^{(\beta_\varrho)} = \begin{cases} t_\varrho^{(b_\varrho-1)} + t_{\varrho+1}^{(1)}, & 1 \leq \varrho < r, & \beta_\varrho = b_\varrho - 1, \\ t_\varrho^{(\beta_\varrho)}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und numerieren das System der $\tau_\varrho^{(\beta_\varrho)}$ gemäß Lemma 4 um:

$$(\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_1^{(b_1-1)}, \dots, \tau_r^{(1)}, \dots, \tau_r^{(b_r-1)}) = (s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}, \dots, s_e^{(1)}, \dots, s_e^{(a_e-1-1)}).$$

Dies liefert eine bianalytische Abbildung $T \rightarrow S$ und eine induzierte Deformation von $\tilde{X}_{n,q}$ über S , die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit $\tilde{\varphi} : \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow S$ bezeichnen wollen. Wir definieren schließlich noch

$$\begin{aligned} F_1 &= v_0 \\ F_2 &= u_0 v_0 + s_2^{(1)} \\ F_3 &= u_0 F_2 (F_2 - s_2^{(2)}) \cdots (F_2 - s_2^{(a_2-1)}) + s_3^{(1)} \\ &\vdots \\ F_{j+1} &= u_0 (F_2 - s_2^{(2)}) \cdots (F_2 - s_2^{(a_2-1)}) (F_3 - s_3^{(2)}) \cdots (F_{j-1} - s_{j-1}^{(a_{j-1}-1)}) \\ &\quad \cdot F_j (F_j - s_j^{(2)}) \cdots (F_j - s_j^{(a_j-1)}) + s_{j+1}^{(1)} \\ &\vdots \\ (2 \leq j \leq e-1, s_e^{(1)} &:= 0). \end{aligned} \tag{31}$$

Satz 9. Die Funktionen F_1, \dots, F_e lassen sich holomorph nach ganz $\tilde{Z}_{n,q}$ fortsetzen. Ihre Einschränkung auf $\tilde{X}_{n,q} = \tilde{\varphi}^{-1}(0)$ stimmt mit den Funktionen f_1, \dots, f_e aus Satz 5 überein.

Beweis. Man führt Induktion nach r . Indem man F_1, \dots, F_e in dem Koordinatensystem mit Koordinaten (u_1, v_1, s) berechnet, stellt man fest, daß man sich bezüglich u_1, F_{b_1}, \dots, F_e in der Situation der Induktionsvoraussetzung befindet. Diese Funktionen lassen sich also auch in die restlichen Koordinatensysteme fortsetzen. Die Funktionen F_1, \dots, F_{b_1-1} sind in diesem Koordinatensystem Polynome in u_1 und $u_1 v_1$ und daher nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls fortsetzbar.

Die zweite Behauptung folgt aus der Definition der F_e und f_e . q.e.d.

Folgerung. Die Funktionen F_1, \dots, F_e blasen die Deformation $\tilde{\varphi}: \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow S$ zu einer Deformation von $X_{n,q}$ über S zusammen.

Um die Gleichungen dieser Deformation zu bestimmen, muß man die Relationen zwischen den Funktionen F_1, \dots, F_e berechnen. Man bekommt ohne weiteres

$$\begin{aligned} x_1(x_3 - s_3^{(1)}) &= x_2(x_2 - s_2^{(1)}) \cdots (x_2 - s_2^{(a_2-1)}) \\ x_2(x_4 - s_4^{(1)}) &= x_3(x_3 - s_3^{(1)}) \cdots (x_3 - s_3^{(a_3-1)}) \\ &\vdots \\ x_{e-2}x_e &= x_{e-1}(x_{e-1} - s_{e-1}^{(1)}) \cdots (x_{e-1} - s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)}) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{32}$$

Offensichtlich entsteht diese Deformation (bis auf Äquivalenz) aus der speziellen Deformation durch Liften bezüglich einer endlichen surjektiven Abbildung $\psi: S \rightarrow S$. Damit erhalten wir schließlich den folgenden

Satz 10. *Es gibt ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z}_{n,q} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Z_{n,q} \\ \tilde{\varphi} \downarrow & & \downarrow \varphi \\ T & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

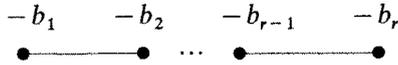
mit ψ endlich und surjektiv, $\tilde{\varphi}$ eigentlich, so daß für alle $t \in T$ die Faser $\tilde{\varphi}^{-1}(t)$ eine Auflösung der Singularitäten von $\varphi^{-1}(\psi(t))$ ist. (Das heißt: die spezielle Deformation $\varphi: Z_{n,q} \rightarrow S$ von $X_{n,q}$ besitzt eine (simultane) Auflösung der Singularitäten im Sinne von [2].)

Da für $e=4$ die spezielle Deformation versell ist, wie im nächsten Paragraphen gezeigt wird, ergibt sich als

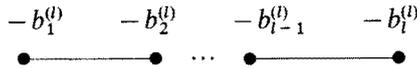
Folgerung. Jede (lokale) Deformation einer Singularität $A_{n,q}$ mit $\text{eib } A_{n,q} = 4$ besitzt eine Auflösung der Singularitäten.

Da die Abbildung ψ in Satz 10 endlich und surjektiv ist, kann man aus Satz 8' unmittelbar ablesen, wie sich die exzeptionelle Menge in den Fasern von $\tilde{\varphi}: \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow T$ mit t verändert. Wir symbolisieren exzeptionelle Mengen durch ihren dualen Graphen und erhalten

Satz 8'. Es sei $\tilde{\varphi} : \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow T$ die spezielle Deformation (30) von $\tilde{X}_{n,q} = \tilde{X}[b_1, \dots, b_r]$. Dann kommen in den Fasern $\tilde{\varphi}^{-1}(t)$, $t \in T$ (und zwar in beliebiger Nähe der exzeptionellen Menge



der speziellen Faser $\tilde{\varphi}^{-1}(0)$) die folgenden exzeptionellen Mengen vor:



(wobei die Zahlen $(b_1^{(l)}, \dots, b_l^{(l)})$ wie in Satz 8' zu bestimmen sind).

Insbesondere treten also die beiden folgenden Phänomene auf:

(i) Exzeptionelle Kurven $\overset{-b}{\bullet}$, $b \geq 2$, können *verschwinden* bei Deformation der umgebenden Mannigfaltigkeit.

(ii) Die irreduziblen Komponenten einer exzeptionellen Menge $\overset{-b_1}{\bullet} \text{---} \overset{-b_2}{\bullet}$ können *verschmelzen* zu einer einzigen Komponente mit Selbstschnittzahl $-(b_1 + b_2 - 2)$.

Zum Abschluß dieses Paragraphen erläutern wir an einem Beispiel das zweite Phänomen (und gleichzeitig die Beweisskizze zu Satz 9). Durch

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{u_0}, & v_1 &= u_0^{b_1} v_0 + t_0 u_0 \\ v_2 &= \frac{1}{v_1}, & u_2 &= v_1^{b_2} u_1 - t_0 v_1^{b_2-1} \end{aligned} \tag{33}$$

wird eine Teilfamilie der speziellen Deformation (30) von $\tilde{X}[b_1, b_2]$ gegeben. Die zusammenblasenden Funktionen F_1, \dots, F_e , $e = b_1 + b_2 - 1$, haben in den einzelnen Koordinatensystemen die Darstellung

$$\begin{aligned} F_1 &= v_0 & &= u_1^{b_1-1} (u_1 v_1 - t_0) = u_2 v_2^{b_1+b_2-2} (u_2 v_2^{b_2-1} + t_0)^{b_1-1} \\ F_2 &= u_0 v_0 & &= u_1^{b_1-2} (u_1 v_1 - t_0) = u_2 v_2^{b_1+b_2-3} (u_2 v_2^{b_2-1} + t_0)^{b_1-2} \\ & & & \vdots \\ F_{b_1} &= u_0^{b_1-1} v_0 & &= u_1 v_1 - t_0 & &= u_2 v_2^{b_2-1} \\ F_{b_1+1} &= u_0^{b_1} v_0 (u_0^{b_1-1} v_0 + t_0) & &= (u_1 v_1 - t_0) v_1 & &= u_2 v_2^{b_2-2} \\ & & & \vdots \\ F_e &= u_0^{b_1+b_2-2} v_0 (u_0^{b_1-1} v_0 + t_0)^{b_2-1} & &= (u_1 v_1 - t_0) v_1^{b_2-1} = u_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Die exzeptionelle Menge $E(t_0)$ in der Faser über t_0 wird beschrieben durch das Verschwinden von F_1, \dots, F_e bei festem t_0 :

$$E(t_0) = \{v_0 = 0\} \cup \{u_1 v_1 = t_0\} \cup \{u_2 = 0\}. \tag{35}$$

Für $t_0 = 0$ ist das gerade $\bullet \xrightarrow{-b_1} \xrightarrow{-b_2} \bullet$. Im Falle $t_0 \neq 0$ betrachten wir das Geradenbündel $L = L(b_1 + b_2 - 2)$ über dem \mathbb{P}_1 mit Chernscher Klasse $-(b_1 + b_2 - 2)$, gegeben durch die Gleichungen

$$\xi_1 = \frac{1}{\xi_0}, \quad \eta_1 = \xi_0^{b_1 + b_2 - 2} \eta_0. \tag{36}$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} (u_0, v_0) &\mapsto (\xi_0, \eta_0) = \left(u_0(u_0^{b_1 - 1} v_0 + t_0), \frac{v_0}{(u_0^{b_1 - 1} v_0 + t_0)^{b_1 - 1}} \right) \\ (u_1, v_1) &\mapsto (\xi_0, \eta_0) = \left(v_1, \frac{u_1 v_1 - t_0}{v_1^{b_2 - 1}} \right) \\ (u_2, v_2) &\mapsto (\xi_1, \eta_1) = (v_2, u_2) \end{aligned} \tag{37}$$

bildet eine Umgebung von $E(t_0)$ in der Faser über t_0 biholomorph auf eine Umgebung des Nullschnitts in L ab. Da dabei $E(t_0)$ selbst biholomorph auf den Nullschnitt geworfen wird, ist $E(t_0)$ für $t_0 \neq 0$ ein \mathbb{P}_1 mit Selbstschnittzahl $-(b_1 + b_2 - 2)$.

§ 7. Der Vektorraum der infinitesimalen Deformationen und die verselle Deformation bei kleinen Einbettungsdimensionen

Da $X_{n,q}$ ein reduzierter komplexer Raumkeim ist, ist der Vektorraum der infinitesimalen Deformationen (1. Ordnung) von $X_{n,q}$ isomorph zu

$$\text{Ext}_{A_{n,q}}^1(\Omega_{n,q}, A_{n,q}),$$

wobei $\Omega_{n,q}$ den analytischen Modul der Pfaffschen Formen über $A_{n,q}$ bezeichnet. Es sei $A_{n,q} = K_e/\mathfrak{a}_{n,q}$, $\Omega_e \cong eK_e$ der Modul der Pfaffschen Formen über K_e und $d: K_e \rightarrow \Omega_e$ die kanonische Derivation. Schränkt man d auf $\mathfrak{a}_{n,q}$ ein und schaltet die kanonische Restklassenabbildung $\Omega_e \cong eK_e \rightarrow eA_{n,q}$ dahinter, so erhält man einen K_e -Homomorphismus $\delta: \mathfrak{a}_{n,q} \rightarrow eA_{n,q}$, und es gilt nach Tjurina [15]

$$\text{Ext}_{A_{n,q}}^1(\Omega_{n,q}, A_{n,q}) \cong \text{Hom}_{K_e}(\mathfrak{a}_{n,q}, A_{n,q}) / \{\psi \circ \delta : \psi \in \text{Hom}(eA_{n,q}, A_{n,q})\}. \tag{38}$$

Jedem Homomorphismus aus $\text{Hom}_{K_e}(a_{n,q}, A_{n,q})$ kann man ein Element aus $\text{Hom}_{K_e}(e_1 K_e, K_e)$ zuordnen, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} e_1 K_e & \rightarrow & K_e \\ \downarrow & & \downarrow \\ a_{n,q} & \rightarrow & A_{n,q} \end{array}$$

kommutiert. Wir werden Elemente aus der Ext-Gruppe (38) somit repräsentieren durch Elemente

$$(h_{ij})_{2 \leq i+1 \leq j-1 \leq e-1} \in e_1 K_e \cong \text{Hom}_{K_e}(e_1 K_e, K_e).$$

Satz 11. *Es sei $X_{n,q} = X(a_2, \dots, a_{e-1})$. Dann gilt für die zugehörige analytische k -Algebra $A_{n,q}$:*

$$d_{n,q} = \dim_k \text{Ext}_{A_{n,q}}^1(\Omega_{n,q}, A_{n,q}) = \begin{cases} a_2 - 1, & e = 3, \\ e - 1 \\ \sum_{e=2} a_e - 2, & e \geq 4. \end{cases} \quad (39)$$

Beispiel 4. Wir betrachten erneut den Kegel $A_{n,1}$ über der rationalen Kurve vom Grad n in \mathbb{P}_n . Nach der obigen Formel ergibt sich mit $e = n + 1, a_2 = \dots = a_{e-1} = 2$:

$$d_{n,1} = \begin{cases} 1, & n = 2, \\ 2(n - 2), & n \geq 3. \end{cases} \quad (40)$$

Dies ist Mumfords Formel aus [9].

Der Beweis von Satz 11 ist für $e = 3$ trivial [vgl. Formel (18)]. Für $e \geq 4$ sind dagegen umfangreiche Rechnungen nötig. Wir geben daher nur an, wie man eine Basis der Ext-Gruppe berechnet: Man betrachtet die spezielle Deformation (22) und bildet die zugehörige infinitesimale Deformation über $k\langle s \rangle / \mathfrak{m}^2, \mathfrak{m} = \mathfrak{m}(k\langle s \rangle)$. Dies liefert $\Sigma(a_e - 1)$ Elemente in $e_1 K_e$. Zum Beispiel ergeben sich für $e = 5$ mit $(h_{ij})_{2 \leq i+1 \leq j-1 \leq 4} = (h_{13}, h_{14}, h_{15}; h_{24}, h_{25}; h_{35})$ die Vektoren

$$\begin{aligned} & x_2^{\lambda_2} (x_2, x_3^{a_3-1}, x_3^{a_3-2} x_4^{a_4-1}; 0, 0; 0), & \lambda_2 = 0, \dots, a_2 - 2, \\ & (-x_1, 0, 0; x_3^{a_3-1}, x_3^{a_3-2} x_4^{a_4-1}; 0) & \\ & x_3^{\lambda_3} (0, x_2^{a_2-1} x_3, x_2^{a_2-1} x_4^{a_4-1}; x_3^2, x_3 x_4^{a_4-1}; 0), & \lambda_3 = 0, \dots, a_3 - 3, \\ & x_4^{\lambda_4} (0, 0, x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-2}; 0, x_3^{a_3-1}; x_4), & \lambda_4 = 0, \dots, a_4 - 2. \end{aligned} \quad (41)$$

Wegen $x_2 x_4 \equiv x_3^{a_3} \pmod{a_{n,q}}$ läßt sich der dritte Vektor für $\lambda_3 = 0$ noch durch x_3 dividieren modulo $a_{n,q}$. Man erhält so das Element

$$(0, x_2^{a_2-1}, x_2^{a_2-2} x_3^{a_3-1} x_4^{a_4-2}; x_3, x_4^{a_4-1}; 0), \quad (42)$$

von dem man leicht zeigt, daß es eine infinitesimale Deformation repräsentiert. (41) und (42) bilden zusammen eine Basis von (38).

Allgemein erhält man auf diese Weise außer den aus der speziellen Deformation gewonnenen infinitesimalen Deformationen je eine weitere zu jedem Index ε mit $3 \leq \varepsilon \leq e - 2$, also insgesamt

$$\sum_{\varepsilon=2}^{e-1} (a_\varepsilon - 1) + (e - 4) = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_\varepsilon - 2,$$

und diese bilden eine Basis von (38).

Wir wollen diesen Paragraphen mit einigen Bemerkungen über die verselle Deformation $Z_{n,q}^{vers} \rightarrow \Sigma$ von $X_{n,q}$ beschließen. Ist $d = d_{n,q}$, so läßt sich Σ einbetten in k^d mit den Variablen

$$s_2^{(1)}, \dots, s_2^{(a_2-1)}; s_3^{(1)}, \dots, s_3^{(a_3)}; \dots; s_{e-2}^{(1)}, \dots, s_{e-2}^{(a_{e-2})};$$

$$s_{e-1}^{(1)}, \dots, s_{e-1}^{(a_{e-1}-1)},$$

und d ist minimal, d. h. $\text{eib } \Sigma = d$.

Es sei zunächst $e = 4$. Dann ist $d = \dim S$, wenn S den regulären Basisraum der speziellen Familie (23) bezeichnet. Da $X_{n,q}$ 2-codimensional in k^4 liegt und Macauleysch ist, ist $A_{n,q} = K_4/a_{n,q}$ "determinantal" im Sinne von Schaps [14]: Die Erzeugenden von $a_{n,q}$ können beschrieben werden als maximale Unterdeterminanten einer gewissen Matrix von Funktionen aus K_4 . In unserem Fall ist diese Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3^{a_3-1} \\ x_2^{a_2-1} & x_3 & x_4 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Schaps gibt in [14] ein Verfahren an, wie man aus der Matrix (43) die verselle Familie berechnet. Man erhält ihre Gleichungen als maximale Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3^{a_3-1} + s_3^{(1)} x_3^{a_3-2} + \dots + s_3^{(a_3-1)} \\ x_2^{a_2-1} + s_2^{(1)} x_2^{a_2-2} + \dots + s_2^{(a_2-1)} & x_3 & x_4 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Durch Vergleich mit (21) folgt dann unmittelbar:

Satz 12. *Ist $\text{eib } X_{n,q} = 4$, so ist die spezielle Familie $Z_{n,q} \rightarrow S$ versell.*

Für $e \geq 5$ ist $\dim S = \text{eib } S < d$, und folglich kann die spezielle Familie in diesem Fall nicht versell sein. Es ist aber folgendes klar:

Es gibt Einbettungen $S \hookrightarrow \Sigma \hookrightarrow k^d$ (wobei $S \hookrightarrow k^d$ durch $s_3^{(a_3)} = \dots = s_6^{(a_6-2)} = 0$ beschrieben wird), so daß die spezielle Deformation $\varphi: Z_{n,q} \rightarrow S$ von $X_{n,q}$ die Einschränkung der versellen Familie $Z_{n,q}^{\text{vers}} \rightarrow \Sigma$ auf S ist.

Wir wollen als nächstes die verselle Familie im Falle $e = 5$ berechnen. Dazu ist es zweckmäßig, zu einer Matrixschreibweise überzugehen. Wir setzen

$$g^{(0)} = (g_{13}, g_{14}, g_{15}; g_{24}, g_{25}; g_{35})^T \tag{45}$$

mit den Funktionen g_{ij} aus (8) und

$$R^{(0)} = \left\{ \begin{array}{cccccc} x_3^{a_3-1} & -x_2 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & -x_3 & 0 & x_2^{a_2-1} & 0 & 0 \\ x_3^{a_3-2} x_4^{a_4-1} & 0 & -x_2 & 0 & x_1 & 0 \\ x_5 & 0 & -x_3 & 0 & x_2^{a_2-1} & 0 \\ 0 & x_4^{a_4-1} & -x_3 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & x_5 & -x_4 & 0 & 0 & x_2^{a_2-1} x_3^{a_3-2} \\ 0 & 0 & 0 & x_4^{a_4-1} & -x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & -x_4 & x_3^{a_3-1} \end{array} \right\} \tag{46}$$

In $R^{(0)}$ stehen die Erzeugenden der Relationen zwischen den Funktionen g_{ij} (vgl. Satz 6). Somit ist

$$R^{(0)} g^{(0)} = 0. \tag{47}$$

Ferner schreiben wir für die Transponierten der Zeilenvektoren (41) der Reihe nach

$$\begin{aligned} g_{2, \lambda_2+1}^{(1)}, \quad \lambda_2 = 0, \dots, a_2 - 2 \\ g_{3, a_3}^{(1)} \end{aligned} \tag{48}$$

$$g_{3, \lambda_3+2}^{(1)}, \quad \lambda_3 = 0, \dots, a_3 - 3$$

$$g_{4, \lambda_4+1}^{(1)}, \quad \lambda_4 = 0, \dots, a_4 - 2$$

und

$$g_{3,1}^{(1)} \tag{49}$$

für den (42) entsprechenden Spaltenvektor. Schließlich sei

$$g^{(1)} = \sum_{j=1}^{a_2-1} s_2^{(a_2-j)} g_{2,j}^{(1)} + \sum_{j=1}^{a_3} s_3^{(a_3-j+1)} g_{3,j}^{(1)} + \sum_{j=1}^{a_4-1} s_4^{(a_4-j)} g_{4,j}^{(1)}. \tag{50}$$

Daß $g^{(0)} + g^{(1)}$ eine Deformation von $A_{n,q}$ über $k\langle s \rangle/m^2$ darstellt [wobei $m = m(k\langle s \rangle)$], ist äquivalent dazu, daß es eine 8×6 -Matrix $R^{(1)}$ mit

Koeffizienten in $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) \otimes K_5$ gibt, so daß

$$R^{(1)}g^{(0)} + R^{(0)}g^{(1)} = 0. \quad (51)$$

Schreibt man $R_{kl}^{(1)}$, $k = 1, \dots, 8$, $l = 1, \dots, 6$, für die Komponenten von $R^{(1)}$, so erhält man die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} R_{11}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_3-1} s_3^{(a_3-j+1)} x_3^{j-1}, & R_{1l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{22}^{(1)} &= s_3^{(1)}, & R_{24}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_2-1} s_2^{(a_2-j)} x_2^{j-1}, & R_{2l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{31}^{(1)} &= - \sum_{j=2}^{a_3-1} s_3^{(a_3-j+1)} x_3^{j-2} x_4^{a_4-1} - \sum_{j=1}^{a_4-1} s_4^{(a_4-j)} x_3^{a_3-2} x_4^{j-1}, \\ R_{32}^{(1)} &= - s_3^{(a_3)} x_4^{a_4-2}, & R_{3l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{43}^{(1)} &= s_3^{(1)}, & R_{44}^{(1)} &= - s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-2} x_4^{a_4-2}, & R_{45}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_2-1} s_2^{(a_2-j)} x_2^{j-1}, \\ R_{4l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{52}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_4-1} s_4^{(a_4-j)} x_4^{j-1}, & R_{54}^{(1)} &= - s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-2} x_4^{a_4-2}, & R_{5l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{65}^{(1)} &= - s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-2}, & R_{66}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_2-1} s_2^{(a_2-j)} x_2^{j-1} x_3^{a_3-2} \\ &\quad - \sum_{j=2}^{a_3-1} s_3^{(a_3-j+1)} x_2^{a_2-1} x_3^{j-2}, & R_{6l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{74}^{(1)} &= - \sum_{j=1}^{a_4-1} s_4^{(a_4-j)} x_4^{j-1}, & R_{7l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst} \\ R_{86}^{(1)} &= - s_3^{(1)} x_3^{a_3-2} - \sum_{j=1}^{a_3-1} s_3^{(a_3-j+1)} x_3^{j-1}, & R_{8l}^{(1)} &= 0 \quad \text{sonst}. \end{aligned} \quad (52)$$

Wir wollen jetzt die Deformation $g^{(0)} + g^{(1)}$ von $A_{n,q}$ bis zur zweiten Ordnung fortsetzen. Das heißt: Gesucht sind ein Vektor $g^{(2)}$ und eine 8×6 -Matrix $R^{(2)}$ mit Koeffizienten in $(\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3) \otimes K_5$, so daß

$$R^{(2)}g^{(0)} + R^{(1)}g^{(1)} + R^{(0)}g^{(2)} = 0. \quad (53)$$

Wir werden zeigen, daß dies nur möglich ist, wenn man gewisse Relationen in der Basisalgebra $k\langle s \rangle$ einführt. Bezeichnet man mit $\tilde{\mathfrak{a}}$ das von \mathfrak{a} in $(\mathfrak{m}^2/\mathfrak{m}^3) \otimes K_5$ erzeugte Ideal, so bedeutet die Gl. (53) nichts anderes, als daß die Komponenten des Vektors $R^{(1)}g^{(1)} + R^{(0)}g^{(2)}$ in $\tilde{\mathfrak{a}}$ liegen müssen. Wir setzen $g^{(2)} = (g_1^{(2)}, \dots, g_6^{(2)})$ und erhalten durch Berechnung der

2., 3., 5. und 7. Komponente, daß die folgenden vier Funktionen aus \tilde{a} sind:

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{a_2-1} \sum_{k=1}^{a_3-1} s_2^{(a_2-j)} s_3^{(a_3-k+1)} x_2^{j-1} x_3^k + s_3^{(1)} s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-1} \\ & + x_4 g_1^{(2)} - x_3 g_2^{(2)} + x_2^{a_2-1} g_4^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{a_2-1} \sum_{k=1}^{a_4-1} s_2^{(a_2-j)} s_4^{(a_4-k)} x_2^j x_3^{a_3-2} x_4^{k-1} \\ & - \sum_{j=1}^{a_2-1} \sum_{k=2}^{a_3-1} s_2^{(a_2-j)} s_3^{(a_3-k+1)} x_2^j x_3^{k-2} x_4^{a_4-1} \\ & - \sum_{j=1}^{a_2-1} s_2^{(a_2-j)} s_3^{(a_3)} x_2^{j-1} x_3^{a_3-1} x_4^{a_4-2} - s_3^{(a_3)2} x_2^{a_2-1} x_4^{a_4-2} \\ & + \sum_{j=1}^{a_4-1} s_3^{(1)} s_4^{(a_4-j)} x_1 x_3^{a_3-2} x_4^{j-1} + x_3^{a_3-2} x_4^{a_4-1} g_1^{(2)} - x_2 g_3^{(2)} + x_1 g_5^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{a_2-1} \sum_{k=1}^{a_4-1} s_2^{(a_2-j)} s_4^{(a_4-k)} x_2^{j-1} x_3^{a_3-1} x_4^{k-1} \\ & - \sum_{j=1}^{a_4-1} \sum_{k=1}^{a_3-1} s_3^{(a_3-k+1)} s_4^{(a_4-j)} x_2^{a_2-1} x_3^{k-1} x_4^{j-1} \\ & - s_3^{(a_3)2} x_2^{a_2-2} x_3 x_4^{a_4-2} - s_3^{(1)} s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-2} x_3^{a_3-1} x_4^{a_4-2} \\ & + x_4^{a_4-1} g_2^{(2)} - x_3 g_3^{(2)} + x_1 g_6^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sum_{j=1}^{a_4-1} \sum_{k=1}^{a_3-1} s_3^{(a_3-k+1)} s_4^{(a_4-j)} x_3^k x_4^{j-1} \\ & - \sum_{j=1}^{a_4-1} s_3^{(1)} s_4^{(a_4-j)} x_3^{a_3-1} x_4^{j-1} + x_4^{a_4-1} g_4^{(2)} - x_3 g_5^{(2)} + x_2 g_6^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Setzt man in (54) und (57) $x_1 = x_3 = x_5 = 0$ ein, so ergeben sich mit $\tilde{g}_j^{(2)} = g_j^{(2)} (s; 0, x_2, 0, x_4, 0)$ die folgenden Gleichungen in $(m^2/m^3) \otimes k \langle x_2, x_4 \rangle$:

$$s_3^{(1)} s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-1} + x_4 \tilde{g}_1^{(2)} + x_2^{a_2-1} \tilde{g}_4^{(2)} \in (x_2^{a_2}, x_2 x_4, x_4^{a_4}) \quad (58)$$

$$x_4^{a_4-1} \tilde{g}_4^{(2)} + x_2 \tilde{g}_6^{(2)} \in (x_2^{a_2}, x_2 x_4, x_4^{a_4}). \quad (59)$$

Multipliziert man (58) mit $x_4^{a_4-1}$ und (59) mit $-x_2^{a_2-1}$, so ergibt sich durch Addition

$$s_3^{(1)} s_3^{(a_3)} x_2^{a_2-1} x_4^{a_4-1} \in (x_2^{a_2}, x_4^{a_4}),$$

was offensichtlich nur möglich ist, wenn die Relation

$$s_3^{(1)} s_3^{(a_3)} = 0 \quad (60)$$

erfüllt ist. In (56) setzt man $x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ein und erhält

$$s_3^{(a_3)} s_4^{(a_4-1)} x_2^{a_2-1} \in (x_2^{a_2}),$$

was die Relation

$$s_3^{(a_3)} s_4^{(a_4-1)} = 0 \quad (61)$$

nach sich zieht. Entsprechend gewinnt man aus (55) die Relation

$$s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3)} = 0. \quad (62)$$

Wir werden nun zeigen, daß sich die Deformation $g^{(0)} + g^{(1)}$ nach $k \langle s \rangle / (s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3)}, s_3^{(1)} s_3^{(a_3)}, s_4^{(a_4-1)} s_3^{(a_3)})$ fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung ist dann die gesuchte verselle Familie. Das Ideal $(s_2^{(a_2-1)} s_3^{(a_3)}, s_3^{(1)} s_3^{(a_3)}, s_4^{(a_4-1)} s_3^{(a_3)})$ definiert einen Unterraum Σ des $d_{n,q}$ -dimensionalen komplexen Zahlenraumes, der aus den beiden singularitätenfreien irreduziblen Komponenten

$$\Sigma_1 = \{s_3^{(a_3)} = 0\} \quad \text{und} \quad \Sigma_2 = \{s_2^{(a_2-1)} = s_3^{(1)} = s_4^{(a_4-1)} = 0\}$$

besteht. Es genügt daher, $g^{(0)} + g^{(1)}$ nach Σ_1 und Σ_2 so fortzusetzen, daß die Deformationen auf dem Durchschnitt der beiden Komponenten übereinstimmen. Nun hat man auf Σ_1 eine Fortsetzung, nämlich die spezielle Familie, die durch folgende Gleichungen gegeben wird:

$$\begin{aligned} x_1(x_3 + s_3^{(1)}) - x_2(x_2^{a_2-1} + \dots + s_2^{(a_2-1)}) \quad x_3 x_5 - x_4(x_4^{a_4-1} + \dots + s_4^{(a_4-1)}) \\ x_2 x_4 - x_3(x_3 + s_3^{(1)})(x_3^{a_3-2} + \dots + s_3^{(a_3-1)}) \quad (63) \\ x_1 x_4 - (x_2^{a_2-1} + \dots) x_3(x_3^{a_3-2} + \dots) \quad x_2 x_5 - (x_3 + s_3^{(1)})(x_3^{a_3-2} + \dots)(x_4^{a_4-1} + \dots) \\ x_1 x_5 - (x_2^{a_2-1} + \dots)(x_3^{a_3-2} + \dots)(x_4^{a_4-1} + \dots). \end{aligned}$$

Von den nächsten Gleichungen weist man ebenfalls leicht nach, daß sie eine Fortsetzung von $g^{(0)} + g^{(1)}$ nach Σ_2 darstellen:

$$\begin{aligned} x_1 x_3 - x_2^2(x_2^{a_2-2} + \dots + s_2^{(a_2-2)}) \quad x_3 x_5 - x_4^2(x_4^{a_4-2} + \dots + s_4^{(a_4-2)}) \\ x_2 x_4 - x_3(x_3^{a_3-1} + s_3^{(2)} x_3^{a_3-2} + \dots + s_3^{(a_3)}) \quad (64) \\ x_1 x_4 - x_2(x_2^{a_2-2} + \dots)(x_3^{a_3-1} + \dots) \quad x_2 x_5 - (x_3^{a_3-1} + \dots) x_4(x_4^{a_4-2} + \dots) \\ x_1 x_5 - (x_2^{a_2-2} + \dots)(x_3^{a_3-1} + \dots)^2(x_4^{a_4-2} + \dots). \end{aligned}$$

Man beachte jedoch, daß diese Funktionen nicht die durch (8) gegebenen Erzeugenden von $\mathfrak{a}_{n,q}$, sondern ein anderes Erzeugendensystem fortsetzen. Da ersichtlich die Deformationen (63) und (64) auf

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{s_2^{(a_2-1)} = s_3^{(1)} = s_3^{(a_3)} = s_4^{(a_4-1)} = 0\}$$

übereinstimmen, ist das folgende Resultat bewiesen:

Satz 13. Der Basisraum $\Sigma \subset \mathbb{C}^{d_{n,q}}$ der versellen Deformation von $X_{n,q}$ mit $\text{eib } X_{n,q} = 5$ wird beschrieben durch

$$\{s_3^{(a_3)} = 0\} \cup \{s_2^{(a_2-1)} = s_3^{(1)} = s_4^{(a_4-1)} = 0\}.$$

Die verselle Deformation, eingeschränkt auf die beiden Komponenten des Basisraumes, wird gegeben durch die Gln. (63) bzw. (64).

Bemerkung. Satz 13 verallgemeinert Pinkham's Konstruktion [12] für den Kegel $X_{4,1}$.

Mit der expliziten Beschreibung der versellen Familie in Satz 13 ist es nun möglich, alle Singularitäten zu berechnen, in die ein $X_{n,q}$ mit Einbettungsdimension 5 lokal deformiert werden kann. Wegen Satz 8 braucht man dazu nur noch die Fasersingularitäten der Familie (64) zu bestimmen. Man erhält dabei zusätzlich zu den schon bekannten Singularitäten die Singularitäten $X(a'_2, a'_3, a'_4)$ mit $2 \leq a'_2 \leq a_2, 1 \leq a'_3 \leq a_3, 2 \leq a'_4 \leq a_4$, wobei offensichtlich

$$X(a'_2, 1, a'_4) = X(a'_2 - 1, a'_4 - 1), \quad a'_2 \geq 2, a'_4 \geq 2, \quad (65)$$

gilt. Also:

Satz 14. Jede lokale Deformation von $X_{n,q} = X(a_2, a_3, a_4)$ ist von der Gestalt

a) $X(a'_2, a'_3, a'_4), \quad 1 \leq a'_2 \leq a_2, \quad 2 \leq a'_3 \leq a_3, \quad 1 \leq a'_4 \leq a_4,$

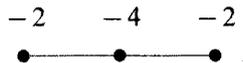
oder

b) $X(a'_2, a'_3, a'_4), \quad 2 \leq a'_2 \leq a_2, \quad 1 \leq a'_3 \leq a_3, \quad 2 \leq a'_4 \leq a_4.$

Jede dieser Singularitäten kommt als lokale Deformation vor.

Wir wollen an einem Beispiel zeigen, daß unter b) in Satz 14 Singularitäten auftreten können, die nicht in der speziellen Deformation vorkommen.

Beispiel 5. $(n, q) = (12, 7)$. Es gilt $\frac{12}{5} = 3 - \underline{1}\sqrt{2} - \underline{1}\sqrt{3}$ und $\frac{12}{7} = 2 - \underline{1}\sqrt{4} - \underline{1}\sqrt{2}$. Damit handelt es sich um die Singularität



Nach Satz 8' werden die Singularitäten in den Fasern der speziellen Familie durch die folgenden Graphen gegeben:



Nach Satz 14 hat man in der Familie über Σ_2 auch die Singularität $X(3, 1, 3) = X(2, 2) = X[3]$, d. h.

– 3

• .

Wir wollen diese Singularität direkt nachweisen. Schränkt man in diesem Fall die Deformation (64) auf den Unterraum $s_2^{(1)} = s_4^{(1)} = 0$ ein und setzt $s_3^{(2)} = \sigma$, so erhält man die einparametrische Familie

$$\begin{aligned} x_1 x_3 - x_2^3 & & x_2 x_4 - x_3(x_3 + \sigma) & & x_3 x_5 - x_4^3 \\ x_1 x_4 - x_2^2(x_3 + \sigma) & & x_2 x_5 - (x_3 + \sigma)x_4^2 & & (66) \\ x_1 x_5 - x_2(x_3 + \sigma)^2 x_4 & & & & \end{aligned}$$

Für $\sigma \neq 0$ liegt in der Faser über σ im Punkte $x_1^{(0)} = \dots = x_5^{(0)} = 0$ eine Singularität, deren lokaler Ring isomorph ist zu

$$k\langle x_1, x_2, x_4, x_5 \rangle / (x_1 x_4 - x_2^2, x_2 x_5 - x_4^2, x_1 x_5 - x_2 x_4) = A_{3,1}.$$

Pinkham hat in [12] auch die verselle Familie der Kegel $A_{n,1}$ mit $n \geq 5$ bestimmt. In diesem Fall besteht der Basisraum Σ aus dem Basisraum $\Sigma_1 = S$ der speziellen Deformation zusammen mit einer in Σ_1 eingebetteten Komponente Σ_2 der Dimension Null. Man kann diese Familie für $n = 5$ mit unseren Methoden ebenfalls konstruieren. Mit $s_\varepsilon = s_\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon = 2, \dots, 5$, $\tilde{s}_\varepsilon = s_\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon = 3, 4$, erhält man für das Σ beschreibende Ideal die Erzeugenden

$$\begin{aligned} s_2 \tilde{s}_3, & \quad s_3 \tilde{s}_3, & \quad s_4 \tilde{s}_3, & \quad s_5 \tilde{s}_3 \\ s_2 \tilde{s}_4, & \quad s_3 \tilde{s}_4, & \quad s_4 \tilde{s}_4, & \quad s_5 \tilde{s}_4 \\ \tilde{s}_3^2, & \quad \tilde{s}_3 \tilde{s}_4, & \quad \tilde{s}_4^2. & \end{aligned} \quad (67)$$

Die eingebettete Komponente Σ_2 wird gegeben durch das Ideal $(s_2, s_3, s_4, s_5, \tilde{s}_3^2, \tilde{s}_3 \tilde{s}_4, \tilde{s}_4^2)$, und $Z_{5,1}^{\text{vers}} | \Sigma_2$ wird beschrieben durch die Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 x_3 - x_2^2 & \quad x_2 x_4 - x_3(x_3 + \tilde{s}_3) & \quad x_3 x_5 - x_4(x_4 + \tilde{s}_4) & \quad x_4 x_6 - x_5^2 \\ x_1 x_4 - x_2(x_3 + \tilde{s}_3) & \quad x_2 x_5 - (x_3 + \tilde{s}_3)(x_4 + \tilde{s}_4) & \quad x_3 x_6 - (x_4 + \tilde{s}_4)x_5 & \\ x_1 x_5 - x_2(x_4 + \tilde{s}_4) - \tilde{s}_3 x_3 & \quad x_2 x_6 - (x_3 + \tilde{s}_3)x_5 - \tilde{s}_4 x_4 & & \\ x_1 x_6 - x_2 x_5 - \tilde{s}_4 x_3 - \tilde{s}_3 x_4 & & & \end{aligned} \quad (68)$$

Man kann die Rechnungen auch noch für beliebiges $A_{n,q}$ mit $e = 6$ durchführen und erhält dann für Σ eine Zerlegung $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_m$, wobei $m \geq 2$ abhängt von der Anzahl der Exponenten a_ε mit $a_\varepsilon \geq 3$. Σ_1 ist gleich S ,

Σ_2 ist eine in Σ_1 eingebettete Komponente der Dimension $\Sigma(a_e - 2)$, und die Reduktionen der Σ_μ , $\mu = 3, \dots, m$, sind singularitätenfrei und schneiden Σ_1 transversal.

§ 8. Offene Fragen und Vermutungen

Die Formel (39) in Satz 11 läßt sich mit Hilfe von Lemma 4 auch durch die b_ϱ ausdrücken. Es gilt

$$\sum_{\varepsilon=2}^{e-1} a_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=2}^{e-1} (a_\varepsilon - 1) + (e - 2) = \sum_{\varrho=1}^r (2b_\varrho - 3) + 1$$

und damit

Satz 11'.
$$d_{n,q} = \dim_k \text{Ext}_{A_{n,q}}^1(\Omega_{n,q}, A_{n,q})$$

$$= \max \left\{ \sum_{\varrho=1}^r (2b_\varrho - 3) - 1, r \right\},$$

wobei das Maximum nur dann gleich r ist, wenn $e = 3$ oder 4 .

Es sei nun (X, x_0) eine beliebige (nicht reguläre) rationale Singularität. Die minimale Auflösung X besitze das exzeptionelle Kurvensystem

$$E = \bigcup_{\varrho=1}^r E_\varrho, \quad E_\varrho \circ E_\varrho = -b_\varrho, \quad \varrho = 1, \dots, r.$$

Frage 1. *Gilt stets*

$$\dim_k \text{Ext}_{x_0}^1(\Omega(X), \mathcal{O}(X)) = \max \left\{ \sum_{\varrho=1}^r (2b_\varrho - 3) - 1, r \right\}?$$

Für rationale Doppelpunkte ist diese Formel richtig. Würde sie stets gelten, so wäre die Ext-Gruppe für jede rationale Singularität von Null verschieden. Man hätte damit einen Beweis für die

Vermutung 1. *Keine rationale Singularität (außer der regulären) ist starr.*

Bisher gibt es meines Wissens überhaupt kein Beispiel für 2-dimensionale normale starre Singularitäten. Dagegen gibt es 2-dimensionale normale Singularitäten, die sich nicht in reguläre Singularitäten lokal deformieren lassen (Mumford [9]). Wir verschärfen deshalb die Vermutung 1 zu

Vermutung 2. *Jede rationale Singularität besitzt Deformationen, deren allgemeine Faser singularitätenfrei ist.*

In den Spezialfällen $X = X_{n,q}$ gibt es stets Deformationen der Auflösung \tilde{X} , in deren allgemeiner Faser die exzeptionelle Menge ver-

schwunden ist (vgl. Bemerkung (i) im Anschluß an Satz 8''). Wäre dies für jede rationale Singularität richtig, so wäre die Vermutung 2 bestätigt.

Im Falle $eib X_{n,q} = 3, 4, 5$ sind alle Deformationen von $X_{n,q}$ wieder vom Typ $X_{n',q'}$. Es steht außer Zweifel, daß dies für jede Einbettungsdimension gilt. Allgemeiner ist die

Vermutung 3. *Lokal können Quotientensingularitäten nur in Quotientensingularitäten deformiert werden.*

Bekanntlich sind isolierte Quotientensingularitäten der Dimension ≥ 3 sogar starr (Schlessinger). Falls die Vermutung 3 richtig ist, stellt sich die

Frage 2. *Welche Beziehungen bestehen zwischen den endlichen Automorphismengruppen, die die Quotientensingularität und ihre lokalen Deformationen beschreiben?*

Noch allgemeiner als Vermutung 3 ist die

Vermutung 4. *Lokale Deformationen rationaler Singularitäten sind rational.*

Jedenfalls ist dies richtig (für $k = \mathbb{C}$, was wir im folgenden voraussetzen wollen) für Deformationen, die eine Auflösung mit regulärer Basis besitzen ([13], Theorem 3); also insbesondere für alle Deformationen von rationalen Doppelpunkten (Brieskorn [2], Tjurina [16]) und von rationalen Tripelpunkten vom Typ $X_{n,q}$ (Folgerung zu Satz 10). Die Vermutung 4 läßt sich jedoch im Allgemeinfall nicht auf dieselbe Weise verifizieren; denn:

Es gibt Deformationen rationaler Singularitäten, die keine Auflösung besitzen.

Das einfachste Beispiel ist die Pinkham-Familie (64) für den Kegel $A_{4,1}$. Den Beweis für die Unmöglichkeit einer Auflösung kann man durch Kompaktifizierung der Fasern und Berechnung der Euler-Poincaré-Charakteristik der Auflösungen der Fasern führen. Die spezielle Familie von $X_{n,q}$ ist dagegen stets auflösbar nach Satz 10. Wir glauben deshalb an die

Vermutung 5. *Die spezielle Deformation $Z_{n,q} \rightarrow S$ von $X_{n,q}$ ist versell bezüglich auflösbarer Deformationen.*

Ein wesentlicher Schritt zum Beweis dieser Vermutung scheint uns darin zu bestehen, die Versalität der speziellen Deformation (30) $\tilde{\varphi}: \tilde{Z}_{n,q} \rightarrow T$ von $\tilde{X}_{n,q}$ zu zeigen. Dazu ist es notwendig, die Deformationstheorie von Kodaira-Kuranishi-Nirenberg-Spencer von kompakten auf streng pseudokonvexe Mannigfaltigkeiten zu übertragen. Daß (30) versell ist, folgt dann aus der Tatsache, daß die Kodaira-Spencer-

Abbildung des Tangentialraumes von T in 0 nach $H^1(\tilde{X}_{n,q}, \tilde{\Theta}_{n,q})$ bijektiv ist ($\tilde{\Theta}_{n,q}$ bezeichnet die Garbe der Keime holomorpher Vektorfelder auf $\tilde{X}_{n,q}$) – insbesondere gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\tilde{X}_{n,q}, \tilde{\Theta}_{n,q}) = \sum_{\varrho=1}^r (b_{\varrho} - 1).$$

Wir werden auf diese Zusammenhänge in einer späteren Arbeit näher eingehen.

Zum Schluß wollen wir die obige Vermutung sogar auf beliebige rationale Singularitäten ausdehnen:

Vermutung 6. *Die verselle Deformation $Z^{\text{vers}} \rightarrow \Sigma$ einer rationalen Singularität X besitzt eine Teilfamilie $Z \rightarrow S$ mit regulärer Basis $S \subset \Sigma$ der Dimension $\sum_{\varrho=1}^r (b_{\varrho} - 1)$, die versell bezüglich auflösbarer Deformationen von X ist.*

Literatur

1. Brieskorn, E.: Rationale Singularitäten komplexer Flächen. *Inventiones math.* **4**, 336—358 (1968)
2. Brieskorn, E.: Singular elements of semisimple algebraic groups. In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens, Nice 1970*
3. Grauert, H.: Über die Deformation isolierter Singularitäten analytischer Mengen. *Inventiones math.* **15**, 171—198 (1972)
4. Grauert, H., Remmert, R.: *Analytische Stellenalgebren*. Unter Mitarbeit von O. Riemenschneider. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
5. Hilbert, D.: Über die Theorie der algebraischen Formen. *Math. Ann.* **36**, 473—534 (1890)
6. Hirzebruch, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* **126**, 1—22 (1953)
7. Jung, H. W. E.: Darstellung der Funktionen eines algebraischen Körpers zweier unabhängigen Veränderlichen x, y in der Umgebung einer Stelle $x=a, y=b$. *J. reine angew. Math.* **133**, 289—314 (1908)
8. Laufer, H.: *Normal two-dimensional singularities*. *Annals of Mathematics Studies* 71. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1971
9. Mumford, D.: A remark on the paper of M. Schlessinger. In: *Proc. Conf. on Singularities at Rice University (March 1972)*. *Rice University Studies* 1973
10. Noether, E.: Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen. *Math. Ann.* **77**, 89—92 (1916)
11. Perron, O.: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Leipzig-Berlin: Teubner 1913
12. Pinkham, H. C.: *Deformations of cones with negative grading*. To appear in: *Jour. of Algebra*
13. Riemenschneider, O.: *Deformations of rational singularities and their resolutions*. In: *Proc. Conf. on Singularities at Rice University (March 1972)*. *Rice University Studies* 1973

14. Schaps, M.E.: Non-singular deformations of space curves, using determinantal schemes. Thesis: Harvard University 1972
15. Tjurina, G.N.: Platte lokal semi-universelle Deformationen von isolierten Singularitäten komplexer Räume. (Russisch). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **33**, 1026—1058 (1969)
16. Tjurina, G.N.: Auflösung von Singularitäten für platte Deformationen von rationalen Doppelpunkten. (Russisch). Funkcional. Anal. i. Priložen. **4**, 77—83 (1970)

Prof. Dr. Oswald Riemenschneider
Mathematisches Institut der Universität
D-3400 Göttingen
Bunsenstraße 3/5

z. Z.:
Mathematisches Seminar der Universität
D-2000 Hamburg
Rothenbaumchaussee 67/69
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 26. Oktober 1973)