

# Über die Anwendung algebraischer Methoden in der Deformationstheorie komplexer Räume

OSWALD RIEMENSCHNEIDER

**Abstract.** Es handelt sich um einen Beweis der folgenden Sätze, die zuerst von Grauert angegeben wurden (Publ. Math. I.H.E.S. No. 5, 1960; vgl. dies Zbl. **100**, 80 (1963)):

Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume,  $\mathcal{S}$  sei eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ ; es bezeichne  $X_y$  die Faser von  $f$  über einem Punkt  $y \in Y$  und  $\mathcal{S}_y$  die analytische Einschränkung von  $\mathcal{S}$  auf  $X_y$ . Dann gilt: (I) Die Funktionen  $d_q(y) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  sind halbstetig nach oben. (II) Ist für ein  $q \in \mathbb{Z}$  die Funktion  $d_q(y)$  konstant und  $Y$  reduziert, so ist die  $q$ -te direkte Bildgarbe von  $\mathcal{S}$  unter  $f$  lokal frei über  $Y$ . (III) Die Euler-Poincaré-Charakteristik  $\chi(y) = \sum (-1)^q \dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  ist lokal konstant über  $Y$ . — Der Beweis benutzt systematisch den Begriff des „Steinschen Kompaktums“ (= kompakte semianalytische Menge mit Steinscher Umgebungsbasis). Mit Hilfe der von Frisch bewiesenen Tatsache, daß die Algebra der Schnitte in der Strukturgarbe eines komplexen Raumes über einem Steinschen Kompaktum noethersch ist (Invent. Math. **4**, 118–138 (1967); vgl. dies Zbl. **167**, 68 (1969)), gelingt es, die Grothendieckschen Methoden im algebraischen Fall (EGA III) auf die analytische Situation zu übertragen.

## Einleitung

In dem abschließenden Paragraphen seiner bekannten Arbeit „Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen“ [4] gibt Grauert einige Folgerungen aus dem großen Kohärenzsatz an, die man folgendermaßen formulieren kann (vgl. auch [5], p. 74f.):

**Theorem.** *Es seien  $X$  und  $Y$  (nicht notwendig reduzierte) komplexe Räume,  $f: X \rightarrow Y$  sei eine eigentliche holomorphe Abbildung und  $\mathcal{S}$  sei eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ . Es bezeichne  $X_y$  die Faser von  $X$  über dem Punkt  $y \in Y$  bezüglich  $f$  und  $\mathcal{S}_y$  die analytische Einschränkung von  $\mathcal{S}$  auf  $X_y$ . Dann gilt*

(I) *Die Funktionen*

$$d_q(y) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{S}_y), \quad q = 0, 1, \dots,$$

*sind halbstetig nach oben. Ist  $Y$  überdies reduziert, so existiert eine niederdimensionale analytische Menge  $N$  in  $Y$ , so daß alle  $d_q$  in  $Y \setminus N$  lokal konstant sind.*

(II) *Ist die Funktion  $d_q$  für ein  $q$  konstant und  $Y$  reduziert, so ist die  $q$ -te direkte Bildgarbe  $f_* \mathcal{S}$  von  $\mathcal{S}$  lokal frei.*

(III) *Die Euler-Poincaré-Charakteristik*

$$\chi(y) = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$$

*ist lokal konstant auf  $Y$ .*

Der Beweis dieses Satzes wurde in [4] nur angedeutet und bisher m. W. nirgends vollständig durchgeführt. Mit der vorliegenden Arbeit soll diese Lücke geschlossen werden.

Außer dem Grauert'schen Kohärenzsatz, der natürlich wesentlich eingeht, verwenden wir die von Frisch [2] bewiesene Aussage, daß die  $\mathbb{C}$ -Algebra der holomorphen Funktionen auf einem Steinschen Kompaktum noethersch ist. Wir folgen dabei einer Bemerkung von Kiehl aus der Arbeit [9], in der ein Teil des obigen Theorems für rigid-analytische Räume bewiesen wurde. Es gelingt damit, die Grothendieckschen Methoden im algebraischen Fall (EGA III) auf die analytische Situation zu übertragen. Die zu dem obigen Theorem analogen Sätze der algebraischen Geometrie werden wir jedoch nicht direkt anwenden (vgl. dazu die Schlußbemerkung (4.13)). Da wir die Kenntnis von EGA III nicht voraussetzen wollen, werden wir die benutzten Hilfsmittel etwas breiter darstellen; insbesondere wird der Beweis des Theorems für den Fall einer Riemannschen Fläche  $Y$  (fast) vollständig durchgeführt.

Zum Aufbau dieser Arbeit sei kurz folgendes gesagt: In den Paragraphen 1 und 2 stellen wir Ergebnisse über formale Cohomologietheorie bzw. Steinsche Kompakta zusammen. In § 3 leiten wir mit Hilfe dieser Ergebnisse das Haupttheorem für den eindimensionalen Fall her und führen in § 4 den Beweis für den Allgemeinfall durch vollständige Induktion.

Es sei mir gestattet, an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. Grauert für sein Interesse und die stete Förderung zu danken, die er dieser Arbeit zuteil werden ließ. Ferner schulde ich den Herren W. Baurichter und P. Pflug Dank für viele aufschlußreiche Diskussionen.

## § 1. Formale Cohomologie

(1.1) Es sei im folgenden  $A$  stets ein kommutativer noetherscher Ring und

$$C: \dots \rightarrow C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1} \rightarrow \dots$$

ein formaler Komplex von  $A$ -Moduln. Wir setzen wie üblich

$$Z^q = Z^q(C) = \ker \delta^q,$$

$$B^q = B^q(C) = \operatorname{im} \delta^{q-1},$$

$$Z_c^q = Z_c^q(C) = \operatorname{coker} \delta^{q-1} = C^q/B^q,$$

$$H^q = H^q(C) = Z^q/B^q.$$

$H^q$  heißt bekanntlich die  $q$ -te Cohomologiegruppe des Komplexes  $C$ .

(1.2) Mit den Bezeichnungen von (1.1) hat man die exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow H^q \rightarrow Z_c^q \rightarrow B^{q+1} \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow B^q \rightarrow Z^q \rightarrow H^q \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow Z^q \rightarrow C^q \rightarrow B^{q+1} \rightarrow 0.$$

(1.3) Ist  $M$  ein beliebiger  $A$ -Modul, so verstehen wir unter  $C' \otimes M$  den durch

$$\dots \rightarrow C^q \otimes M \xrightarrow{\delta^q \otimes id} C^{q+1} \otimes M \rightarrow \dots$$

definierten formalen Komplex. Im folgenden interessieren wir uns für die Beziehungen zwischen  $H^q(C')$  und  $H^q(C' \otimes M)$ .

(1.4) Es seien  $u^q: Z_c^q \otimes M \rightarrow B^{q+1} \otimes M$ ,  $v^{q+1}: B^{q+1} \otimes M \rightarrow Z^{q+1} \otimes M$  und  $w^{q+1}: Z^{q+1} \otimes M \rightarrow C^{q+1} \otimes M$  die aus (1.2) gewonnenen Homomorphismen. Dann gilt

$$H^q(C' \otimes M) = \ker(w^{q+1} \circ v^{q+1} \circ u^q);$$

denn es ist

$$\begin{aligned} H^q(C' \otimes M) &= \ker(\delta^q \otimes id) / \text{im}(\delta^{q-1} \otimes id) \\ &= \ker((C^q \otimes M / \text{im}(\delta^{q-1} \otimes id)) \rightarrow C^{q+1} \otimes M) \\ &= \ker(Z_c^q \otimes M \rightarrow C^{q+1} \otimes M), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Rechtsexaktheit des Funktors  $\cdot \otimes M$  folgt.

(1.5) Wegen (1.2) erhält man die folgenden exakten Sequenzen:

$$\begin{aligned} \text{Tor}_1^A(B^{q+1}, M) &\rightarrow H^q \otimes M \xrightarrow{t_M^q} Z_c^q \otimes M \xrightarrow{u^q} B^{q+1} \otimes M \rightarrow 0, \\ \text{Tor}_1^A(Z^{q+1}, M) &\rightarrow \text{Tor}_1^A(H^{q+1}, M) \rightarrow B^{q+1} \otimes M \xrightarrow{v^{q+1}} Z^{q+1} \otimes M, \\ \text{Tor}_1^A(B^{q+2}, M) &\rightarrow Z^{q+1} \otimes M \xrightarrow{w^{q+1}} C^{q+1} \otimes M. \end{aligned}$$

(1.6) Da im  $t_M^q = \ker u^q \subset \ker(w^{q+1} \circ v^{q+1} \circ u^q) = H^q(C' \otimes M)$ , so hat man stets eine kanonische Abbildung

$$t_M^q: H^q(C') \otimes M \rightarrow H^q(C' \otimes M).$$

(1.7) **Satz.** Sind alle  $Z^q$  und  $B^q$  platte  $A$ -Moduln, so existiert für alle  $q$  eine kanonische exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^q(C') \otimes M \xrightarrow{t_M^q} H^q(C' \otimes M) \rightarrow \text{Tor}_1^A(H^{q+1}, M) \rightarrow 0.$$

Insbesondere sind alle  $t_M^q$  injektiv.

*Beweis.* Aufgrund der Voraussetzungen verschwinden in (1.5) alle links stehenden Torsionsmoduln. Folglich ist  $w^{q+1}$  injektiv. Man erhält dann die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker u^q \rightarrow \ker(v^{q+1} \circ u^q) \rightarrow \ker v^{q+1} \rightarrow 0,$$

die wegen

$$\begin{aligned} \ker u^q &= H^q \otimes M, \\ \ker(v^{q+1} \circ u^q) &= H^q(C' \otimes M), \\ \ker v^{q+1} &= \text{Tor}_1^A(H^{q+1}, M) \end{aligned}$$

mit der Behauptung übereinstimmt.

(1.8) **Bemerkung.** Ist  $A$  ein eindimensionaler regulärer Ring (d. h. ist die Lokalisierung von  $A$  nach einem beliebigen maximalen Ideal ein diskreter Bewertungsring), so ist jeder Untermodul eines platten  $A$ -Moduls  $M$  platt. Infolgedessen sind die Voraussetzungen von (1.7) in diesem Fall schon erfüllt, wenn alle  $C^q$  platt sind.

(1.9) **Satz.** Es sei  $C'$  ein nach oben beschränkter Komplex von platten  $A$ -Moduln (d. h. es existiere eine natürliche Zahl  $m$ , so daß  $C^q = 0$  für alle  $q > m$ ). Ferner seien alle  $H^q$  platt. Dann ist für alle  $q$  und alle  $A$ -Moduln  $M$  die Abbildung

$$r_M^q : H^q \otimes M \rightarrow H^q(C' \otimes M)$$

bijektiv.

*Beweis.* Wir zeigen zunächst durch absteigende Induktion, daß alle  $Z^q$  und  $B^q$  platte  $A$ -Moduln sind. Für  $q > m$  ist dies jedenfalls wegen  $Z^q = B^q = 0$  richtig. Seien nun für festes  $q$  die Moduln  $Z^q$  und  $B^q$  als platt nachgewiesen; dann folgt aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow Z^{q-1} \rightarrow C^{q-1} \rightarrow B^q \rightarrow 0$$

die Platteheit von  $Z^{q-1}$  und damit aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow B^{q-1} \rightarrow Z^{q-1} \rightarrow H^{q-1} \rightarrow 0$$

die Platteheit von  $B^{q-1}$ .

Die Behauptung folgt dann unmittelbar aus (1.7) wegen  $\text{Tor}_1^A(H^{q+1}, M) = 0$ .

(1.10) Ist  $D'$  ein weiterer Komplex und  $\alpha' : D' \rightarrow C'$  ein Komplexhomomorphismus, so hat man kanonische Abbildungen

$$H^q(D') \rightarrow H^q(C').$$

Der nächste Satz gibt an, unter welchen Voraussetzungen man die  $C^q$  durch endliche (= endlich erzeugte)  $A$ -Moduln  $D^q$  „ersetzen“ kann:

(1.11) **Satz.** Es sei  $C'$  ein nach oben beschränkter Komplex von  $A$ -Moduln mit  $C^q = 0$  für  $q > m$ . Ferner seien alle  $H^q = H^q(C')$  endliche  $A$ -Moduln. Dann existiert ein Komplex  $D'$  und eine Komplexabbildung  $\alpha' : D' \rightarrow C'$  mit den folgenden Eigenschaften:

- i) Alle  $D^q$  sind endliche freie  $A$ -Moduln, und es gilt  $D^q = 0$  für  $q > m$ .
- ii) Die kanonischen Abbildungen  $H^q(D') \rightarrow H^q(C')$  sind bijektiv für alle  $q$ .

Der Beweis ist elementar, aber langwierig. Wir verweisen deshalb z. B. auf [6], (0<sub>III</sub>, 11.9.1) und (11.9.2).

(1.12) **Satz.** Es seien  $C'$  und  $D'$  nach oben beschränkte Komplexe von platten  $A$ -Moduln, und  $\alpha' : D' \rightarrow C'$  sei ein Komplexhomomorphismus, so daß die induzierten Abbildungen  $H^q(D') \rightarrow H^q(C')$  bijektiv sind. Dann sind für einen beliebigen  $A$ -Modul  $M$  auch alle von  $\alpha' \otimes \text{id} : D' \otimes M \rightarrow C' \otimes M$  induzierten Abbildungen

$$H^q(D' \otimes M) \rightarrow H^q(C' \otimes M)$$

bijektiv.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus [6] (III, 6.3.3) und (6.3.7); vgl. auch (0<sub>III</sub>, 11.9.3). Im eindimensionalen regulären Fall kann man leicht folgendermaßen schließen: Wegen (1.7) und (1.8) hat man ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^q(D') \otimes M & \rightarrow & H^q(D' \otimes M) & \rightarrow & \text{Tor}_1^A(H^{q+1}(D'), M) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 \\ 0 & \rightarrow & H^q(C') \otimes M & \rightarrow & H^q(C' \otimes M) & \rightarrow & \text{Tor}_1^A(H^{q+1}(C'), M) \rightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen, in dem  $\varphi_1$  und  $\varphi_3$  bijektiv sind. Dann ist aber auch  $\varphi_2$  ein Isomorphismus.

(1.13) **Satz.** *Es sei  $D'$  ein Komplex von platten  $A$ -Moduln. Dann sind die folgenden Aussagen für ein  $q \in \mathbb{Z}$  äquivalent:*

- i)  $t_M^q: H^q(D') \otimes M \rightarrow H^q(D' \otimes M)$  ist bijektiv für alle  $A$ -Moduln  $M$ ,
- ii)  $Z_c^{q+1}(D')$  ist ein platter  $A$ -Modul,
- iii) *Es existiert ein Komplex  $C'$  von platten  $A$ -Moduln mit  $\delta^q = 0: C^q \rightarrow C^{q+1}$  und ein Komplexhomomorphismus  $D' \rightarrow C'$ , so daß alle induzierten Homomorphismen  $H^k(D' \otimes M) \rightarrow H^k(C' \otimes M)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , bijektiv sind.*

Dieser Satz ist eine Zusammenfassung von [6], (III, 7.3.1) und (7.4.2).

(1.14) **Folgerung.** *Es sei  $C': \dots \rightarrow 0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^{m-1} \rightarrow C^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  ein endlicher Komplex von platten  $A$ -Moduln, so daß alle  $H^q$  endliche  $A$ -Moduln sind. Dann existiert ein Komplex*

$$P': \dots \rightarrow 0 \rightarrow P^0 \rightarrow \dots \rightarrow P^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

von endlichen platten  $A$ -Moduln  $P^q$  und ein Homomorphismus  $\alpha': P' \rightarrow C'$ , so daß für alle  $A$ -Moduln  $M$  die kanonischen Homomorphismen

$$H^q(P' \otimes M) \rightarrow H^q(C' \otimes M)$$

bijektiv sind.

Man setze mit den Bezeichnungen von (1.11)  $P^q = D^q$ ,  $q \geq 1$ ,  $P^q = 0$ ,  $q \leq -1$ ,  $P^0 = Z_c^0(D')$ .

Zum Schluß notieren wir noch den bekannten

(1.15) **Satz.** *Es sei  $V': \dots \rightarrow 0 \rightarrow V^0 \rightarrow \dots \rightarrow V^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots$  ein endlicher Komplex von endlichen Vektorräumen über einem Körper  $k$ . Dann gilt*

$$\sum_{q=0}^m (-1)^q \dim_k H^q(V') = \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim_k V^q.$$

## § 2. Steinsche Kompakta

(2.0) In den folgenden Nummern (2.1) bis (2.8) geben wir eine konzentrierte Darstellung einiger Ergebnisse von Frisch [2]; vgl. dazu auch Kiehl [8].

(2.1) **Definition.** *Eine Teilmenge  $K$  eines komplexen Raumes  $X = (X, \mathcal{O})$  heißt Steinsches Kompaktum, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften besitzt:*

- i)  $K$  ist kompakt,
- ii)  $K$  ist semianalytisch,
- iii) Es existiert eine Umgebungsbasis  $\{U_i : i \in I\}$  von  $K$ , die aus offenen Steinschen Unterräumen von  $X$  besteht.

(2.2) **Theorem** (Frisch [2]). Für jedes Steinsche Kompaktum  $K \subset X$  ist  $A = \Gamma(K, \mathcal{O})$  eine noethersche  $\mathbb{C}$ -Algebra.

(2.3) Ist  $\mathcal{S}$  eine kohärente analytische Garbe über  $X$  und  $K \subset X$  ein Steinsches Kompaktum, so ist  $\Gamma(K, \mathcal{S})$  ein endlicher  $A = \Gamma(K, \mathcal{O})$ -Modul.

*Beweis.* Mit Theorem A und B (vgl. etwa [7], Chap. VIII A, Theorem 17).

(2.4) Unter den Voraussetzungen von (2.2) existiert eine bijektive stetige Abbildung

$$K \rightarrow \text{Specm } A.$$

Dabei bezeichnet  $\text{Specm } A$  die mit der Zariski-Topologie versehene Menge aller maximalen Ideale von  $A = \Gamma(K, \mathcal{O})$ . Diese Abbildung wird gegeben durch  $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ , wobei  $\mathfrak{m}_x$  das Ideal aller in  $x \in K$  verschwindenden Funktionen aus  $\Gamma(K, \mathcal{O})$  ist.

(2.5) Es sei  $X$  ein parakompakter topologischer Raum,  $\mathcal{S}$  eine Garbe über  $X$ ,  $K \subset X$  eine abgeschlossene Menge und  $\mathfrak{U}$  ein Fundamentalsystem von (offenen) Umgebungen von  $K$ . Dann gilt für alle  $q$ :

$$H^q(K, \mathcal{S}) = \varinjlim_{U \in \mathfrak{U}} H^q(U, \mathcal{S}).$$

Zum Beweis vgl. [3], Théorème 4.11.1.

(2.6) Unter den Voraussetzungen von (2.3) gilt (falls  $X$  parakompakt ist):

$$H^q(K, \mathcal{S}) = 0, \quad q \geq 1.$$

(2.7) Es sei  $\mathfrak{a} \subset \Gamma(K, \mathcal{O})$  ein Ideal. Dann ist  $\mathfrak{a}\mathcal{S}$  eine kohärente analytische Garbe in einer Umgebung von  $K$ , und es gilt

$$\Gamma(K, \mathcal{S}/\mathfrak{a}\mathcal{S}) = \Gamma(K, \mathcal{S})/\mathfrak{a}\Gamma(K, \mathcal{S}).$$

*Beweis.* Da  $A = \Gamma(K, \mathcal{O})$  noethersch ist, wird  $\mathfrak{a}$  von endlich vielen Funktionen erzeugt, die in einer Umgebung von  $K$  holomorph sind. Folglich ist  $\mathfrak{a}\mathcal{S}$  kohärent in einer Umgebung von  $K$ . Aus der exakten Cohomologiesequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(K, \mathfrak{a}\mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{S}) \rightarrow \Gamma(K, \mathcal{S}/\mathfrak{a}\mathcal{S}) \rightarrow H^1(K, \mathfrak{a}\mathcal{S}) = 0$$

folgt dann mit  $\Gamma(K, \mathfrak{a}\mathcal{S}) = \mathfrak{a}\Gamma(K, \mathcal{S})$  die Behauptung.

(2.8) Für jedes  $x \in K$  besteht eine kanonische Isomorphie

$$\widehat{\Gamma(K, \mathcal{S})}_{\mathfrak{m}_x} = \hat{\mathcal{S}}_x$$

von  $\widehat{\Gamma(K, \mathcal{O})}_{\mathfrak{m}_x} = \hat{\mathcal{O}}_x$ -Moduln. Hierbei bedeutet  $\widehat{\phantom{x}}$  die Kompletzierung bezüglich der  $\mathfrak{m}_x A_{\mathfrak{m}_x}$ - bzw.  $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_x)$ -adischen Topologie.

Man hat nämlich, wenn  $\mathfrak{m}(x)$  die zum Punkte  $x \in K$  gehörende maximale Idealgarbe bezeichnet, eine kanonische Isomorphie

$$\mathcal{S}_x/\mathfrak{m}(x)_x^v \mathcal{S}_x = \Gamma(K, \mathcal{S}/\mathfrak{m}(x)^v \mathcal{S}) = \Gamma(K, \mathcal{S})/\mathfrak{m}_x^v \Gamma(K, \mathcal{S}).$$

(2.9) Es sei nun im folgenden  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume,  $\mathcal{S}$  sei eine kohärente analytische Garbe über  $X$ ,  $L$  ein Steinsches Kompaktum in  $Y$  und  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ .

(2.10) Wir studieren die Cohomologie von  $K := f^{-1}(L)$  mit Werten in  $\mathcal{S}$ . Man kann  $K$  mit endlich vielen Steinschen Kompakta  $K_j$ ,  $j=0, \dots, m$ , überdecken, da  $K$  kompakt ist. Es gilt dann

$$K = \bigcup_{j=0}^m K_j, \quad K_j = K'_j \cap K.$$

Wir wollen zeigen, daß die  $K_j$  wieder Steinsche Kompakta sind: Zunächst ist  $K_j$  als Durchschnitt der kompakten semianalytischen Mengen  $K'_j$  und  $K$  kompakt und semianalytisch. Ist  $U'$  eine offene Umgebung von  $K_j$ , so existiert eine Steinsche Umgebung  $U_1$  von  $K_j$  und eine Steinsche Umgebung  $U_2$  von  $L$ , so daß  $U = U_1 \cap f^{-1}(U_2) \subset U'$ . Da  $f$  eigentlich ist, ist mit  $U_2$  auch  $f^{-1}(U_2)$  holomorph-konvex. Infolgedessen ist  $U$  holomorph-konvex und als offener Teil von  $U_1$  auch holomorph-separabel, d. h. Steinsch.

(2.11) Wir haben somit eine endliche Überdeckung  $\{K_0, \dots, K_m\}$  von  $K$  mit Steinschen Kompakta konstruiert. Da endliche Durchschnitte Steinscher Kompakta wieder Steinsch sind, ist diese Überdeckung wegen (2.6) azyklisch. Man kann daher die Cohomologiegruppen  $H^q(K, \mathcal{S})$  folgendermaßen ausrechnen (Satz von Leray, vgl. [3], Théorème 5.2.4, Cor.):

Man setzt wie üblich  $K_{j_0 \dots j_q} = K_{j_0} \cap \dots \cap K_{j_q}$  und  $C^q = \prod \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{S})$ , und erhält wie in der Čech-Theorie den formalen Komplex

$$C' : \dots \rightarrow 0 \rightarrow C^0 \rightarrow \dots \rightarrow C^m \rightarrow 0 \rightarrow \dots.$$

Es gilt dann

$$H^q = H^q(C') = H^q(K, \mathcal{S}).$$

(2.12) Ist  $\mathcal{S}$   $f$ -platt, so sind alle  $C^q$  platte  $A$ -Moduln.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, daß jeder  $A$ -Modul  $M = \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{S})$  platt ist. Es sei  $B = \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{O}_X)$  und  $\varphi: A \rightarrow B$  die natürliche Abbildung. Dann genügt es zu beweisen (vgl. [1], Chap. 2, § 3, Prop. 15), daß für alle maximalen Ideale  $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_x$ ,  $x \in K_{j_0 \dots j_q}$ , der Modul  $M_{\mathfrak{n}}$  platt über  $A_{\mathfrak{m}}$  ist, wo  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y$ ,  $y = f(x)$ . Dies ist aber gleichbedeutend mit der Platttheit von  $\hat{M}_{\mathfrak{n}} = \hat{\mathcal{S}}_x$  über  $\hat{A}_{\mathfrak{m}} = \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$  ([1], Chap. 3, § 5, Prop. 4), was aus der Platttheit von  $\mathcal{S}_x$  über  $\mathcal{O}_{Y,y}$  folgt.

(2.13) Unter den Voraussetzungen von (2.9) sei  $y \in L$  und  $\mathbf{C}_y = \mathbf{C} = A/\mathfrak{m}_y$ . Dann gilt

$$H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = H^q(C' \otimes \mathbf{C}_y).$$

*Beweis.* Es sei  $\{K_0, \dots, K_m\}$  die in (2.11) konstruierte Überdeckung von  $K = f^{-1}(L)$  mit Steinschen Kompakta. Dann ist  $\{K_j^* = K_j \cap X_y\}$  eine endliche Überdeckung von  $X_y$  mit Steinschen Kompakta, s. d.  $H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  gleich der  $q$ -ten Cohomologiegruppe des Komplexes  $D'$  mit

$$D^q = \Pi \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}^*, \mathcal{S}_y)$$

ist. Aus

$$\begin{aligned} D^q &= \Pi \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}^*, \mathcal{S}/\mathfrak{m}(y) \cdot \mathcal{S}) \\ &= \Pi \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{S})/\mathfrak{m}_y \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{S}) \\ &= C^q \otimes \mathbb{C}_y \end{aligned}$$

folgt die Behauptung (vgl. hierzu auch (2.21)).

(2.14) Bezeichnet  $f_q \mathcal{S}$  die  $q$ -te direkte Bildgarbe von  $\mathcal{S}$  und  $\mathfrak{m}(y)$  die maximale Idealgarbe von  $y \in Y$ , so gilt

$$H^q \otimes \mathbb{C}_y = (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y.$$

*Beweis.* Es gilt  $H^q \otimes \mathbb{C}_y = H^q / \mathfrak{m}_y H^q$  und

$$H^q = H^q(K, \mathcal{S}) = \lim_{U \supset L} H^q(f^{-1}(U), \mathcal{S}) = \lim_{U \supset L} \Gamma(U, f_q \mathcal{S}) = \Gamma(L, f_q \mathcal{S}),$$

wobei die mittlere Gleichung aus [4], § 2, Satz 5 folgt. Hieraus ergibt sich mit (2.7)

$$\begin{aligned} H^q \otimes \mathbb{C}_y &= \Gamma(L, f_q \mathcal{S}) / \mathfrak{m}_y \Gamma(L, f_q \mathcal{S}) = \Gamma(L, f_q \mathcal{S} / \mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S}) \\ &= (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y. \end{aligned}$$

(2.15) Wegen (1.6), (2.14) und (2.13) hat man für alle  $y \in L$  einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraumhomomorphismus

$$t_y^q = t_{\mathbb{C}_y}^q : (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y \rightarrow H^q(X_y, \mathcal{S}_y).$$

Man sieht leicht, daß  $t_y^q$  nur von  $y$  abhängt.  $t_y^q$  stimmt mit der von Grauert in [4] mit  $\lambda_y$  bezeichneten Abbildung überein.

Ist  $Y$  eine Riemannsche Fläche, so sind alle  $Z^q(C')$  und  $B^q(C')$  als Untermoduln des platten Moduls  $C^q$  platt. Infolgedessen (1.7) ist in diesem Fall  $t_y^q$  stets injektiv.

(2.16) Ist  $f_q \mathcal{S}$  lokal frei über  $L$ , so ist  $H^q = H^q(f^{-1}(L), \mathcal{S})$  ein platter  $A$ -Modul.

*Beweis.* Es gilt  $H^q = \Gamma(L, f_q \mathcal{S})$  und daher für  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y, y \in L : \widehat{H}_\mathfrak{m}^q = \widehat{(f_q \mathcal{S})}_y$ . Da  $(f_q \mathcal{S})_y$  ein freier  $\mathcal{O}_{Y,y}$ -Modul ist, ist  $\widehat{(f_q \mathcal{S})}_y$  ein freier  $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ -Modul. Folglich ist  $H_\mathfrak{m}^q$  ein freier  $A_\mathfrak{m}$ -Modul für alle maximalen Ideale  $\mathfrak{m}$  und also  $H^q$  ein platter  $A$ -Modul.

(2.17) **Satz.** Es sei  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche Abbildung,  $Y$  reduziert und  $\mathcal{S}$  eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ . Dann gibt es eine niederdimensionale analytische Menge  $N$  in  $Y$ , so daß  $t_y^q$  für alle  $q$  und alle  $y \in Y \setminus N$  bijektiv ist und alle Funktionen  $d_q(y) = \dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  lokal konstant auf  $Y \setminus N$  sind.



*Beweis* (vgl. Kiehl [9], Satz 5.5, und Grauert [4], § 7, Satz 2). Da das System der niederdimensionalen analytischen Mengen  $N_q = \{y \in Y : f_q \mathcal{S} \text{ ist nicht lokal frei in } y\}$  lokal endlich ist, ist  $N = \bigcup N_q$  eine niederdimensionale analytische Menge in  $Y$ .

Es sei nun  $y_0 \in Y$  und  $L$  ein Steinsches Kompaktum mit  $y_0 \in \overset{\circ}{L} \subset L \subset Y \setminus N$ . Da alle  $f_q \mathcal{S}$  lokal frei über  $L$  sind, ist

$$\text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) = \dim_{\mathbb{C}}(f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y,$$

lokal konstant über  $L$  für alle  $q$ . Außerdem sind alle

$$t_y^q : (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y \rightarrow H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$$

nach (1.9) bijektiv, d. h.  $d_q(y)$  ist lokal konstant auf  $Y \setminus N$  für alle  $q$ .

(2.18) Mit (2.17) ist der zweite Teil von Theorem (I) schon bewiesen.

(2.19) Bei dem Induktionsbeweis in § 4 benötigen wir einige Aussagen über geliftete Familien. Es sei also  $f : X \rightarrow Y$  eine eigentliche und  $g : Y' \rightarrow Y$  eine beliebige holomorphe Abbildung,  $\mathcal{S}$  sei eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ . Dann hat man für  $X' = X \times_Y Y'$  ein kanonisches kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

wo  $f'$  eine eigentliche holomorphe Abbildung ist. Die analytische Urbildgarbe  $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$  von  $\mathcal{S}$  bezüglich  $g'$  ist eine  $f'$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X'$ . Wir nennen das System  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$  die *Liftung* von  $(X, f, Y, \mathcal{S})$  nach  $Y'$ .

(2.20) Wir setzen im folgenden zusätzlich voraus, daß  $g$  eine endliche Abbildung ist. Ist dann  $L$  ein Steinsches Kompaktum in  $Y$ , so ist  $L' = g^{-1}(L)$  ein Steinsches Kompaktum in  $Y'$  und  $A' = \Gamma(L', \mathcal{O}_{Y'}) = \Gamma(L, g_0 \mathcal{O}_{Y'})$  ist eine endliche  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ -Algebra. Es besteht also eine kanonische Isomorphie

$$A' = A[T_1, \dots, T_r]/\mathfrak{a},$$

$\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_s) \subset A[T_1, \dots, T_r]$ . Ist  $K \subset f^{-1}(L)$  ein Steinsches Kompaktum, so auch  $K' = K \times_L L'$ , und es gilt offenbar mit  $B = \Gamma(K, \mathcal{O}_X)$  und  $B' = \Gamma(K', \mathcal{O}_{X'})$ :

$$B' = B[T_1, \dots, T_r]/\mathfrak{b},$$

wobei  $\mathfrak{b} = (a_1 \circ f, \dots, a_s \circ f) \cdot B[T_1, \dots, T_r]$ . Daraus folgt unmittelbar

$$B' = B \otimes_A A'.$$

(2.21) Unter den Voraussetzungen von (2.20) rechnet man sofort nach, daß man

$$\Gamma(K', \mathcal{S}') = \Gamma(K, \mathcal{S}) \otimes_B B'$$

hat, was wegen  $B' = B \otimes_A A'$  die wichtige Gleichung

$$\Gamma(K', \mathcal{S}') = \Gamma(K, \mathcal{S}) \otimes_A A'$$

impliziert.

### § 3. Der eindimensionale Fall

(3.1) Es sei im folgenden  $Y$  eine Riemannsche Fläche,  $L \subset Y$  sei ein Steinsches Kompaktum, das in einer Karte (mit der Koordinate  $y$ ) enthalten sei. Dann ist für jedes  $y_0 \in L$  die Funktion  $y - y_0$  ein Element von  $\Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ ; sie erzeugt  $\mathfrak{m}_{A_m}$ , wobei  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{y_0}$ , und  $(\mathfrak{m}(y_0) \cdot \mathcal{O}_Y)_{y_0}$ . Insbesondere ist  $A_m$  ein diskreter Bewertungsring und folglich  $A$  ein eindimensionaler regulärer Ring im Sinne von (1.8).

(3.2) Die Funktionen  $d_q(y) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  sind halbstetig nach oben.

*Beweis.* Da die Aussage lokaler Natur ist, können wir uns auf die Betrachtung einer Koordinatenumgebung  $U$  eines Punktes  $y_0 \in Y$  beschränken. Wegen der Halbstetigkeit der Corangfunktion

$$\text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) = \dim_{\mathbb{C}} (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y$$

können wir  $U$  so klein wählen, daß für alle  $y \in U$  die Ungleichung  $\text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) \leq \text{cg}_{y_0}(f_q \mathcal{S})$  besteht. Ferner können wir wegen (2.17) annehmen, daß  $t_y^q$  bijektiv ist für alle  $y \in U \setminus y_0$ . Daraus folgt für  $y \neq y_0$ , da  $t_{y_0}^q$  nach (2.15) injektiv ist:

$$\dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = \text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) \leq \text{cg}_{y_0}(f_q \mathcal{S}) \leq \dim H^q(X_{y_0}, \mathcal{S}_{y_0}).$$

(3.3) Ist  $d_q(y)$  für ein  $q \in \mathbb{Z}$  konstant auf  $Y$ , so ist  $f_q \mathcal{S}$  eine lokal freie Garbe, und  $t_y^q$  ist bijektiv für alle  $y \in Y$ .

*Beweis.* Wir wählen die Umgebung eines Punktes  $y_0 \in Y$  wie im Beweis zu (3.2). Es folgt dann wegen  $\dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = \dim H^q(X_{y_0}, \mathcal{S}_{y_0})$  sogar  $\text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) = \text{cg}_{y_0}(f_q \mathcal{S})$  für alle  $y \in U$ , d. h.  $f_q \mathcal{S}$  ist lokal frei über  $U$ .

Da  $t_y^q$  stets injektiv ist und außerdem  $\text{cg}_y(f_q \mathcal{S}) = \dim H_q(X_y, \mathcal{S}_y)$  gilt, so ist  $t_y^q$  sogar bijektiv.

(3.4) Zur Durchführung des Induktionsbeweises in § 4 benötigen wir noch:

Ist  $L$  wie in (3.1) gewählt und  $d_q(y)$  konstant, so sind  $Z_c^q(\mathbb{C}')$  und  $Z_c^{q+1}(\mathbb{C}')$  platte  $A$ -Moduln.

*Beweis.* Wegen der exakten Sequenzen  $0 \rightarrow H^k \rightarrow Z_c^k \rightarrow B^{k+1} \rightarrow 0$ ,  $k = q, q + 1$ , und der Platttheit von  $B^{q+1}$  und  $B^{q+2}$  ist die Behauptung äquivalent zu der Platttheit von  $H^q$  und  $H^{q+1}$ . Da nach (3.3)  $f_q \mathcal{S}$  eine lokal freie Garbe ist, so ist  $H^q$  wegen (2.16) ein platter  $A$ -Modul. Weiter hat man für alle  $y \in L$  eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow (f_q \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_q \mathcal{S})_y \xrightarrow{t_y^q} H^q(X_y, \mathcal{S}_y) \rightarrow \text{Tor}_1^A(H^{q+1}, \mathbb{C}_y) \rightarrow 0.$$

Da  $t_y^q$  nach (3.3) bijektiv ist, erhalten wir also

$$\text{Tor}_1^A(H^{q+1}, \mathbb{C}_y) = 0, \quad y \in L.$$

Es sei nun  $y_0 \in L$  fest und  $y - y_0 : A \rightarrow A$  die Multiplikation von  $A$  mit der Funktion  $y - y_0$ . Da das maximale Ideal  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{y_0}$  von  $y - y_0$  erzeugt wird, hat man eine exakte  $A$ -Sequenz

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{y - y_0} A \rightarrow A/\mathfrak{m}_{y_0} = \mathbb{C}_{y_0} \rightarrow 0.$$

Durch Tensorieren mit  $H^{q+1}$  bekommt man daraus

$$0 = \text{Tor}_1^A(H^{q+1}, \mathbb{C}_{y_0}) \rightarrow H^{q+1} \xrightarrow{y - y_0} H^{q+1}.$$

Da schließlich  $A_{\mathfrak{m}}$  ein platter  $A$ -Modul ist und  $H_{\mathfrak{m}}^{q+1} = H^{q+1} \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$  gilt, so ist auch die Abbildung

$$y - y_0 : H_{\mathfrak{m}}^{q+1} \rightarrow H_{\mathfrak{m}}^{q+1}$$

injektiv. Nun erzeugt  $y - y_0$  das maximale Ideal  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$  des diskreten Bewertungsrings  $A_{\mathfrak{m}}$ . Folglich ist die Abbildung  $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \otimes H_{\mathfrak{m}}^{q+1} \rightarrow \mathfrak{m}H_{\mathfrak{m}}^{q+1}$  injektiv, d. h.  $H_{\mathfrak{m}}^{q+1}$  ist platt für alle maximalen Ideale  $\mathfrak{m}$  von  $A$ .

(3.5) **Folgerung.** *Unter den Voraussetzungen von (3.4) gilt: Alle Abbildungen*

$$t_M^k : H^k \otimes M \rightarrow H^k(C \otimes M),$$

$k = q - 1, q$ , sind bijektiv. Insbesondere ist neben  $t_y^q$  auch  $t_y^{q-1}$  bijektiv für alle  $y \in L$ .

Der Beweis folgt unmittelbar aus (1.13).

(3.6) Die Euler-Poincaré-Charakteristik  $\chi(y)$  ist lokal konstant auf  $Y$ .

*Beweis.* Es sei  $y_0 \in Y$  und  $L$  ein Steinsches Kompaktum mit  $y_0 \in L$ . Dann kann man den Komplex  $C$  von platten  $A$ -Moduln nach (1.14) ersetzen durch einen Komplex

$$P' : \cdots \rightarrow 0 \rightarrow P^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P^m \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

von endlichen platten  $A$ -Moduln, s. d.  $H^q(C' \otimes M) = H^q(P' \otimes M)$  für alle  $A$ -Moduln  $M$ . Es gilt dann für  $y \in L$  wegen (1.15):

$$\begin{aligned} \chi(y) &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim H^q(C \otimes \mathbb{C}_y) \\ &= \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim H^q(P' \otimes \mathbb{C}_y) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \dim (P^q \otimes \mathbb{C}_y). \end{aligned}$$

Weiter hat man eine kanonische  $\mathbb{C}$ -Isomorphie  $P^q \otimes \mathbb{C}_y = P^q/\mathfrak{m}_y P^q = P_{\mathfrak{m}_y}^q/\mathfrak{m}_y P_{\mathfrak{m}_y}^q$ , so daß schließlich

$$\chi(y) = \sum_{q=0}^m (-1)^q \text{cg } P_{\mathfrak{m}_y}^q$$

folgt. Da  $A$  noethersch ist, sind die endlichen platten  $A$ -Moduln  $P^q$  projektiv ([1], Chap. 1, § 2, Lemme 8 (ii) und Chap. 2, § 5, Th. 1, Cor. 2). Für endliche projektive Moduln  $P$  ist aber die Funktion  $\mathfrak{p} \mapsto \text{cg } P_{\mathfrak{p}}$  lokal konstant in  $\text{Spec } A$  (vgl. [1], Chap. 2, § 5, Th. 1). Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

(3.7) **Bemerkung.** *Der vorstehende Beweis gilt wörtlich auch ohne Einschränkung an  $Y$ .*

§ 4. Beweis der Hauptsätze

(4.1) Wir verwenden die Bezeichnungen von (2.19) für die vermöge  $g: Y' \rightarrow Y$  nach  $Y'$  geliftete Familie  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$ . Für jeden Punkt  $y' \in Y'$  sind dann die Räume  $X_{y'}$  und  $X_y, y=g(y')$ , analytisch äquivalent, ebenso die Garben  $\mathcal{S}'_{y'} = \mathcal{S}'|_{X_{y'}}$  und  $\mathcal{S}_y = \mathcal{S}|_{X_y}$ . Setzt man

$$d'_q(y') = \dim_{\mathbb{C}} H^q(X_{y'}, \mathcal{S}'_{y'}),$$

so gilt also  $d_q(g(y')) = d'_q(y')$ .

(4.2) Ist  $g$  eine endliche surjektive Abbildung, so folgt aus der Halbstetigkeit von  $d'_q$  die Halbstetigkeit von  $d_q$ . Ist  $d_q$  konstant, so auch  $d'_q$ . Wir werden diese Bemerkung anwenden für den Fall, daß  $g$  die kanonische Abbildung  $\text{red } Y \rightarrow Y$  oder die Normalisierungsabbildung  $Y' \rightarrow Y$  bei reduziertem  $Y$  ist.

(4.3) **Theorem.** *Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Räume,  $\mathcal{S}$  eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ , so ist die Funktion  $d_q(y)$  auf  $Y$  halbstetig nach oben.*

*Beweis* (durch Induktion nach  $n = \dim Y$ ). Es sei  $n=1$ . Wegen der Bemerkung (4.2) können wir  $Y$  als reduziert voraussetzen. Dann ist die Normalisierung  $Y'$  von  $Y$  eine Riemannsche Fläche, s. d. für die nach  $Y'$  geliftete Familie  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$  die Funktion  $d'_q$  halbstetig nach oben ist (3.2). Daraus folgt die Halbstetigkeit von  $d_q$ .

Es sei nun  $n \geq 2$ ; die Behauptung sei schon für alle Familien  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$  mit  $\dim Y \leq n-1$  nachgewiesen. Wir können  $Y$  wiederum als reduziert voraussetzen. Dann gibt es nach (2.17) eine niederdimensionale analytische Menge  $Y' \subset Y$ , so daß  $d_q$  auf  $Y \setminus Y'$  lokal konstant ist. Wir können uns daher auf die Betrachtung eines Punktes  $y_0 \in Y'$  beschränken. Zu jeder der endlich vielen an  $y_0$  angrenzenden Zusammenhangskomponenten  $V_i$  von  $Y \setminus Y'$  findet man dann eine Umgebung  $U_i$  von  $y_0$  und eine eindimensionale analytische Menge  $Y'' \subset U_i$  mit den folgenden Eigenschaften:

- i)  $Y'' \cap Y' = \{y_0\}$ ,
- ii)  $Y'' \setminus \{y_0\} \subset V_i$ ,
- iii)  $d'_q(y') \leq d'_q(y_0), \quad y' \in Y' \cap U_i,$   
 $d''_q(y'') \leq d''_q(y_0), \quad y'' \in Y''.$

Ist nun  $y \in V_i \cap U_i$ , so existiert ein  $y'' \in Y''$  mit  $d_q(y) = d''_q(y'')$ , also ist  $d_q(y) \leq d_q(y_0)$ . Daraus folgt  $d_q(y) \leq d_q(y_0)$  für alle  $y \in U = \bigcap U_i$ .

(4.4) **Bemerkung.** Die Konstanz der Euler-Poincaré-Charakteristik kann man nach demselben Verfahren aus dem eindimensionalen Fall (3.6) herleiten (vgl. jedoch (3.7)).

(4.5) Um Theorem (II) zu beweisen, werden wir induktiv die folgende Aussage verifizieren:

*Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine eigentliche holomorphe Abbildung,  $\mathcal{S}$  sei eine  $f$ -platte kohärente analytische Garbe über  $X$ , es sei  $d_q(y) = \dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y)$  konstant auf  $Y$  und  $Y$  reduziert. Dann gibt es zu jedem Punkt  $y_0 \in Y$  ein Steinsches Kompaktum*

$L_0$  mit  $y_0 \in \overset{\circ}{L}_0$ , s. d. für alle Steinschen Kompakta  $L \subset L_0$  gilt: Ist  $C'$  der in (2.11) zu  $L$  konstruierte Komplex von  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$ -Moduln, so sind

$$Z_c^q(C') \quad \text{und} \quad Z_c^{q+1}(C')$$

platte  $A$ -Moduln.

(4.6) Wir wollen zunächst zeigen, daß Theorem (II) aus (4.5) folgt. Wir wählen  $L = L_0$ ; dann impliziert die Platteheit von  $Z_c^{q+1}(C')$  nach (1.13) die Bijektivität aller Abbildungen  $t_y^q, y \in L_0$ . Wegen  $\dim H^q(X_y, \mathcal{S}_y) = \text{const.}$  bedeutet dies, daß der Corang von  $f_q \mathcal{S}$  konstant auf  $L_0$  ist, d. h.  $f_q \mathcal{S}$  ist lokal frei in einer Umgebung eines jeden Punktes  $y_0 \in Y$ .

(4.7) Genau wie in (3.5) folgt aus (4.5) außerdem:

Unter den Voraussetzungen von Theorem (II) sind auch die Abbildungen

$$t_y^{q-1}: (f_{q-1} \mathcal{S})_y / (\mathfrak{m}(y) \cdot f_{q-1} \mathcal{S})_y \rightarrow H^{q-1}(X_y, \mathcal{S}_y),$$

$y \in Y$ , bijektiv.

(4.8) In (4.5) kann man den letzten Satz noch folgendermaßen abschwächen:

Ist  $D'$  ein beliebiger Komplex von platten  $A$ -Moduln und  $\alpha': D' \rightarrow C'$  ein Komplexhomomorphismus, so daß für alle  $A$ -Moduln  $M$  die induzierten Abbildungen  $H^k(D' \otimes M) \rightarrow H^k(C' \otimes M)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , bijektiv sind, so sind  $Z_c^q(D')$  und  $Z_c^{q+1}(D')$  platte  $A$ -Moduln.

Man hat nämlich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^k(D') \otimes M & \rightarrow & H^k(D' \otimes M) \\ & & \downarrow \\ H^k(C') \otimes M & \rightarrow & H^k(C' \otimes M), \end{array}$$

$k = q, q - 1$ , in dem die beiden senkrechten Pfeile und der obere waagerechte Pfeil Isomorphismen bezeichnen, woraus wegen (1.13) die Platteheit von  $Z_c^q(C')$  und  $Z_c^{q+1}(C')$  folgt.

(4.9) Wir beweisen nun:

i) Die Aussage (4.5) gilt für allgemeine reduzierte Räume  $Y$ , wenn sie in bezug auf normale Räume  $Y$  bewiesen ist.

ii) Die Aussage (4.5) folgt für normale komplexe Räume  $Y$ , wenn sie für allgemeine reduzierte komplexe Räume von kleinerer Dimension als  $Y$  richtig ist.

Da (4.5) für Riemannsche Flächen in (3.4) bewiesen wurde, ist hiermit eine vollständige Induktion gegeben, die Theorem (II) beweist.

(4.10) Beweis von (4.9.i): Es seien  $(X, f, Y, \mathcal{S})$  wie in (4.5) gegeben, es sei  $g: Y' \rightarrow Y$  die Normalisierungsabbildung von  $Y$  und  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$  die nach  $Y'$  geliftete Familie. Ferner sei  $y_0 \in Y$  ein fester Punkt und  $g^{-1}(y_0) = \{y'_{01}, \dots, y'_{0t}\}$ . Da die Konstanz von  $d_q$  impliziert, daß auch  $d'_q$  konstant ist, so gibt es nach Voraussetzung zu jedem  $y'_{0j}$  ein Steinsches Kompaktum  $L_{0,j}$  mit den Eigenschaften aus (4.5). Da  $g$  endlich ist, können wir die  $L_{0,j}$  überdies so klein wählen, daß  $L_{0,j} \cap L_{0,k} = \emptyset$ ,  $1 \leq j < k \leq t$ . Es existiert dann ein Steinsches Kompaktum  $L_0$  in  $Y$  mit  $y_0 \in L_0$ , s.d.

$$L_0 = g^{-1}(L_0) \subset \bigcup_{j=1}^t L_{0,j}.$$

Für jedes Steinsche Kompaktum  $L \subset L_0$  ist  $L' = g^{-1}(L)$  ein Steinsches Kompaktum, das in endlich viele disjunkte Steinsche Kompakta zerlegt werden kann:

$$L' = \bigcup_{j=1}^t L_j, \quad L_j = L' \cap L_{0,j}.$$

Es sei nun  $\{K_0, \dots, K_m\}$  eine Überdeckung von  $K = f^{-1}(L)$  mit Steinschen Kompakta. Dann sind auch  $\{K'_{i,j} = K_i \times_L L_j : i = 0, \dots, m\}$  bzw.  $\{K'_i = K_i \times_L L' : i = 0, \dots, m\}$  ebensolche Überdeckungen von  $f'^{-1}(L')$  bzw.  $f'^{-1}(L)$ . Setzen wir noch

$$A'_j = \Gamma(L_j, \mathcal{O}_{Y'}) \quad \text{und} \quad A' = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y),$$

so gilt wegen (2.21)

$$\Gamma(K'_{i,j}, \mathcal{S}') = \Gamma(K_i, \mathcal{S}) \otimes_A A'_j$$

und entsprechend

$$\Gamma(K'_i, \mathcal{S}') = \Gamma(K_i, \mathcal{S}) \otimes_A A'.$$

Es sei nun  $C^q = \Pi \Gamma(K_{j_0 \dots j_q}, \mathcal{S})$  und  $D_j^q = C^q \otimes_A A'_j$  bzw.  $D^q = C^q \otimes_A A'$ . Nach dem eben Bewiesenen sind  $D_j^q$  bzw.  $D^q$  die zu den Steinschen Kompakta  $L_j$  bzw.  $L$  gehörenden Komplexe. Aufgrund der Voraussetzung sind  $Z_c^q(D_j^q)$  und  $Z_c^{q+1}(D_j^q)$  platte  $A_j$ -Moduln,  $j = 1, \dots, t$ , woraus wegen  $A = \bigoplus A_j$  und  $D^q = \bigoplus D_j^q$  unmittelbar die Plattheit von  $Z_c^q(D)$  und  $Z_c^{q+1}(D)$  über  $A$  folgt.

Wir ersetzen nun den Komplex  $C'$  gemäß (1.14) durch einen endlichen Komplex  $P'$  von endlichen platten  $A$ -Moduln  $P^q$ . Da für jeden  $A'$ -Modul  $M'$  die kanonischen Homomorphismen

$$H^k((P' \otimes_A A') \otimes_{A'} M') \rightarrow H^k(D' \otimes_A M')$$

bijektiv sind, sind nach (4.8) auch  $Z_c^q(P' \otimes_A A')$  und  $Z_c^{q+1}(P' \otimes_A A')$  platte  $A'$ -Moduln.

Nun gilt aufgrund der Rechtsexaktheit des Tensorproduktes stets  $Z_c^k(P' \otimes_A A') = Z_c^k(P') \otimes_A A'$ . Es genügt daher, die folgende Aussage zu beweisen:

(4.11) *Es seien  $A$  und  $A'$  wie in (4.10). Ist  $M$  ein endlicher  $A$ -Modul, so daß  $M \otimes_A A'$  platt über  $A'$  ist, so ist  $M$  ein platter  $A$ -Modul.*

*Beweis.* Es sei  $y \in L$ ,  $g^{-1}(y) = \{y'_1, \dots, y'_s\}$ ,  $m = m_y$ ,  $m'_j = m_{y'_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ . Wir setzen  $B_j = \mathcal{O}_{Y', y'_j}$ ,  $B = \mathcal{O}_{Y, y}$  und  $M_y = M_m \otimes_{A_m} B$ . Da nach Voraussetzung  $(M \otimes_A A')_{m'_j}$  ein platter  $A'_{m'_j}$ -Modul ist und offensichtlich

$$\widehat{(M \otimes_A A')_{m'_j}} = \widehat{M_y \otimes_B B_j}$$

gilt, so ist auch  $M_j = M_y \otimes_B B_j$  ein platter  $B_j$ -Modul,  $j = 1, \dots, s$ . Es seien nun  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$  die minimalen Primideale von  $B$ . Da  $Y'$  die Normalisierung von  $Y$  ist, ist  $s = t$ , und bei geeigneter Numerierung ist  $B_j$  die Normalisierung von

$B/\mathfrak{p}_j$  in  $Q_j = Q(B/\mathfrak{p}_j)$ ,  $j = 1, \dots, t$ . Daher gilt

$$M_y \otimes_B (B/\mathfrak{m}(B)) = M_j \otimes_{B_j} (B_j/\mathfrak{m}(B_j)),$$

$$M_y \otimes_B Q_j = M_j \otimes_{B_j} Q_j.$$

Da  $M_j$  ein freier  $B_j$ -Modul ist, gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_j \otimes_{B_j} (B_j/\mathfrak{m}(B_j))) = \dim_{Q_j}(M_j \otimes_{B_j} Q_j),$$

woraus mit den vorstehenden Gleichungen

$$\dim_{\mathbb{C}}(M_y \otimes_B (B/\mathfrak{m}(B))) = \dim_{Q_j}(M_y \otimes_B Q_j),$$

$j = 1, \dots, t$ , folgt. Da  $B$  reduziert ist, ist dies aber nach [1], Chap. 2, § 3, No. 2, Prop. 7 gleichbedeutend mit der Freiheit von  $M_y$  über  $B$ . Wegen  $\hat{M}_y = \hat{M}_m$  und  $\hat{B} = \hat{A}_m$  folgt daraus die Freiheit von  $M_m$  über  $A_m$  und somit die Platteit von  $M$  über  $A$ .

(4.12) *Beweis von (4.9.ii)*. Es sei  $Y$  ein normaler Raum der Dimension  $n \geq 2$ ,  $y_0 \in Y$  sei fest. Dann gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $y_0$  und eine endliche offene holomorphe Abbildung von  $U$  auf ein Gebiet  $G$  im  $\mathbb{C}^n$ ; insbesondere ist  $Y$  in  $U$  rein  $n$ -dimensional. Es sei  $d_q$  konstant auf  $U$ ; ferner sei (4.5) schon für alle reduzierten Räume  $Y'$  der Dimension  $\leq n - 1$  bewiesen.

Es sei dann  $L \subset U$  ein Steinsches Kompaktum und  $C$  der übliche Komplex. Wir ersetzen  $C$  wieder durch den Komplex  $P'$  von endlichen platten  $A$ -Moduln und werden beweisen, daß  $Z_c^q(P')$  und  $Z_c^{q+1}(P')$  platte  $A$ -Moduln sind. Es sei  $M$  einer dieser beiden Moduln,  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{y_0}$ ,  $y_0 \in L$ , und  $e_1, \dots, e_t$  sei ein minimales Erzeugendensystem von  $M_m$  über  $A_m$ . Angenommen, es existierte eine Relation

$$\sum_{j=1}^t h_j e_j = 0, \quad h_j \in A_m, \quad j = 1, \dots, t,$$

mit  $h_1 \neq 0$ . Dann ist  $N(h_1) = \{y \in Y : h_1(y) = 0\}$  eine niederdimensionale analytische Menge in einer Umgebung von  $y_0$  mit  $y_0 \in N(h_1)$ . Aufgrund der Wahl von  $U$  findet man einen eindimensionalen reduzierten Unterraum  $Y'$  von  $U$ , der in der Nähe von  $y_0$  die Menge  $N(h_1)$  nur in  $y_0$  trifft. Wir setzen  $L' = L \cap Y'$ ;  $L'$  ist ein Steinsches Kompaktum. Wie in (4.10) sieht man, daß mit  $A = \Gamma(L, \mathcal{O}_Y)$  und  $A' = \Gamma(L', \mathcal{O}_{Y'})$  wegen (2.21)  $P' \otimes_A A'$  der zu der eingeschränkten Familie  $(X', f', Y', \mathcal{S}')$  über  $L'$  gehörende Komplex ist. Nach Voraussetzung sind also  $Z_c^k(P' \otimes_A A') = Z_c^k(P') \otimes_A A'$  platte  $A'$ -Moduln für  $k = q, q + 1$ ; d. h.  $M \otimes_A A'$  ist ein platter  $A$ -Modul.

Bezeichnet man nun mit  $\mathfrak{m}'$  das zu  $y_0$  gehörende maximale Ideal von  $A'$ , so ist  $M' = M_m \otimes_{A_m} A'_m$  ein freier  $A'_m$ -Modul. Wegen

$$M' \otimes_{A'_m} (A'_m/\mathfrak{m}'A'_m) = M_m \otimes_{A_m} (A_m/\mathfrak{m}A_m)$$

ist aber  $\text{cg}_{A'_m} M' = \text{cg}_{A_m} M_m = t$ . Da die  $e_j \otimes 1$ ,  $j = 1, \dots, t$ , den Modul  $M'$  erzeugen, bilden sie folglich eine Basis von  $M'$ , s.d. aus  $\sum h_j e_j = 0$  unmittelbar  $\bar{h}_1 = 0$  folgt, wenn der Querstrich das Bild von  $h_1$  in  $A'_m$  bezeichnet. Das be-

deutet aber  $h_1|Y'=0$  in einer kleinen Umgebung von  $y_0$  im Widerspruch zur Wahl von  $Y'$ .

(4.13) *Schlußbemerkung.* Man kann die Theoreme (I) und (III) nach den Vorbereitungen in § 2 auch unmittelbar aus den Grothendieckschen Sätzen [6], (III, 7.6.9 (i)) und (7.9.3) gewinnen. Dagegen scheint man Theorem (II) aus (III, 7.6.9 (ii)) nicht direkt herleiten zu können.

### Literatur

1. Bourbaki, N.: Algèbre commutative. Paris: Hermann 1961.
2. Frisch, J.: Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques. Invent. Math. **4**, 118—138 (1967).
3. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1964.
4. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. I.H.E.S. No. **5**, 5—64 (1960).
5. — On the number of moduli of complex structures, pp. 63—78; in: Contributions to function theory. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960.
6. Grothendieck, A.: Éléments de géométrie algébrique. Publ. Math. I.H.E.S. No. **11** (1961) et No. **17** (1963).
7. Gunning, R. C., Rossi, H.: Analytic functions of several complex variables. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall 1965.
8. Kiehl, R.: Note zu der Arbeit von J. Frisch: "Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques". Invent. Math. **4**, 139—141 (1967).
9. — Analytische Familien affinoider Algebren. S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl., 25—49 (1968).

Dr. Oswald Riemenschneider  
Mathematisches Institut der Universität  
D-3400 Göttingen, Bunsenstr. 3—5

(Eingegangen am 18. Dezember 1969)