Lehreinheit Jordansche Normalform

Birgit Richter

Entspricht Abschnitt VI.3 (ab VI.3.5) im Skript

Weierstraß-Normalform

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, (1815–1897).

Korollar: Weierstraß-Normalform

Ist $A \in M(n \times n, K)$ dann gibt es eine bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmte Folge $h_1, \dots, h_k$ von Potenzen teilerfremder, normierter Polynome in $K[X]$, so dass A ähnlich ist zu

$$\begin{pmatrix} B_{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{h_k} \end{pmatrix}.$$

Weierstraß-Normalform

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, (1815–1897).

Korollar: Weierstraß-Normalform

Ist $A \in M(n \times n, K)$ dann gibt es eine bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmte Folge $h_1, \dots, h_k$ von Potenzen teilerfremder, normierter Polynome in $K[X]$, so dass A ähnlich ist zu
$$\begin{pmatrix} B_{h_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{h_k} \end{pmatrix}.$$
Die h_i heißen *Weierstraßsche Elementarteiler*.

Weierstraß-Normalform

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß, (1815–1897).

Korollar: Weierstraß-Normalform

Ist $A \in M(n \times n, K)$ dann gibt es eine bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmte Folge $h_1, \ldots, h_k$ von Potenzen teilerfremder, normierter Polynome in $K[X]$, so dass A ähnlich ist zu $\begin{pmatrix} B_{h_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & B_{h_k} \end{pmatrix}$. Die h_i heißen *Weierstraßsche Elementarteiler*.

Der folgende Beweis bleibt unvollständig.

Beweis

Wir wissen, dass A ähnlich ist zu

$$\begin{pmatrix} B_{g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{g_r} \end{pmatrix},$$

wenn $1, \dots, 1, g_1, \dots, g_r$ die Invariantenteiler von A sind.

Beweis

Wir wissen, dass A ähnlich ist zu

$$\begin{pmatrix} B_{g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{g_r} \end{pmatrix},$$

wenn $1, \dots, 1, g_1, \dots, g_r$ die Invariantenteiler von A sind.
Wir benutzen dann, dass sich jedes Polynom in $K[X]$ vom Grad $\geqslant 1$ in irreduzible Faktoren zerlegen läßt. Zusammen mit dem Lemma aus der letzten Vorlesung folgt die Behauptung.

$\square$

Beweis

Wir wissen, dass A ähnlich ist zu

$$\begin{pmatrix} B_{g_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{g_r} \end{pmatrix},$$

wenn $1, \dots, 1, g_1, \dots, g_r$ die Invariantenteiler von A sind. Wir benutzen dann, dass sich jedes Polynom in $K[X]$ vom Grad $\geqslant 1$ in irreduzible Faktoren zerlegen läßt. Zusammen mit dem Lemma aus der letzten Vorlesung folgt die Behauptung.

$\square$

Wir untersuchen den Spezialfall, bei dem alle h_i von der Form $(X - \lambda)^m$ sind.

Lemma

Ist $\lambda \in K$ und ist $m \in \mathbb{N}$, so ist die Begleitmatrix von $(X - \lambda)^m$ ähnlich zur Matrix

$$J(\lambda; m) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Beweis

Wir betrachten die charakteristische Matrix von $J(\lambda; m)$:

$$M_{J(\lambda;m)}(X) = \begin{pmatrix} \lambda - X & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda - X \end{pmatrix}.$$

und erhalten

$$\det M_{J(\lambda;m)}(X) = d^{(m)}_{J(\lambda;m)} = (\lambda - X)^m = (-1)^m (X - \lambda)^m.$$

und erhalten

$$\det M_{J(\lambda;m)}(X) = d^{(m)}_{J(\lambda;m)} = (\lambda - X)^m = (-1)^m (X - \lambda)^m.$$

Das Streichen der ersten Zeile und der m-ten Spalte gibt eine Matrix mit Determinante 1 und somit stimmen die Determinantenteiler von $J(\lambda; m)$ mit denen der Begleitmatrix von $(X - \lambda)^m$ überein:

und erhalten

$$\det M_{J(\lambda;m)}(X) = d^{(m)}_{J(\lambda;m)} = (\lambda - X)^m = (-1)^m (X-\lambda)^m.$$

Das Streichen der ersten Zeile und der m-ten Spalte gibt eine Matrix mit Determinante 1 und somit stimmen die Determinantenteiler von $J(\lambda; m)$ mit denen der Begleitmatrix von $(X-\lambda)^m$ überein:

$$d^{(i)}_{J(\lambda;m)} = d^{(i)}_{B_{(X-\lambda)^m}} \text{ für } 1 \leqslant i \leqslant m.$$

$\square$

Jordansche Normalform

Definition

Die Matrix $J(\lambda; m)$ heißt die *$m \times m$-Jordan Matrix zu* λ.

Jordansche Normalform

Definition

Die Matrix $J(\lambda; m)$ heißt die *$m \times m$-Jordan Matrix zu λ*.
Marie Ennemond Camille Jordan, genannt Camille Jordan (1838–1922).

Jordansche Normalform

Definition

Die Matrix $J(\lambda; m)$ heißt die *$m \times m$-Jordan Matrix zu λ*.
Marie Ennemond Camille Jordan, genannt Camille Jordan (1838–1922).

Satz: Jordansche Normalform

Es sei $A \in M(n \times n, K)$ und das charakteristische Polynome von A, $P_A(X)$, zerfalle über K in Linearfaktoren.

Jordansche Normalform

Definition

Die Matrix $J(\lambda; m)$ heißt die $m \times m$*-Jordan Matrix zu* λ.
Marie Ennemond Camille Jordan, genannt Camille Jordan (1838–1922).

Satz: Jordansche Normalform

Es sei $A \in M(n \times n, K)$ und das charakteristische Polynome von A, $P_A(X)$, zerfalle über K in Linearfaktoren. Dann gibt es eine bis auf Reihenfolge eindeutige Folge von Jordan-Matrizen $J_1, \ldots, J_r$ über K, so dass A ähnlich ist zu

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_r \end{pmatrix}.$$

Beweis

Da $c_A^{(j)}$ immer $d_A^{(j)}$ teilt und da diese wiederum $P_A(X) = d_A^{(n)}$ teilen, zerfallen alle Invarianten- und Determinantenteiler von A ebenfalls in Linearfaktoren.

Beweis

Da $c_A^{(j)}$ immer $d_A^{(j)}$ teilt und da diese wiederum $P_A(X) = d_A^{(n)}$ teilen, zerfallen alle Invarianten- und Determinantenteiler von A ebenfalls in Linearfaktoren.

Damit ist A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} B_{(X-\lambda_1)^{m_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{(X-\lambda_r)^{m_r}} \end{pmatrix}$$

Beweis

Da $c_A^{(j)}$ immer $d_A^{(j)}$ teilt und da diese wiederum $P_A(X) = d_A^{(n)}$ teilen, zerfallen alle Invarianten- und Determinantenteiler von A ebenfalls in Linearfaktoren.

Damit ist A ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} B_{(X-\lambda_1)^{m_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_{(X-\lambda_r)^{m_r}} \end{pmatrix}$$

und damit auch ähnlich zu

$$\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Beispiel

Es sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{Q})$.

Beispiel

Es sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{Q})$.
Wir berechnen $P_A(X)$ durch Entwicklung nach der letzten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det \begin{pmatrix} 9-X & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5-X & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= (2-X)^2((9-X)(-5-X)+49) \\ &= (2-X)^2(X^2-4X+4) \\ &= (2-X)^4 \end{aligned}$$

Beispiel

Es sei $A = \begin{pmatrix} 9 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4; \mathbb{Q})$.

Wir berechnen $P_A(X)$ durch Entwicklung nach der letzten Zeile und erhalten

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det \begin{pmatrix} 9-X & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -5-X & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-X \end{pmatrix} \\ &= (2-X)^2((9-X)(-5-X)+49) \\ &= (2-X)^2(X^2-4X+4) \\ &= (2-X)^4 \end{aligned}$$

und somit ist $\lambda = 2$ eine vierfache Nullstelle.

Wir müssen die Eigenvektoren von A bestimmen:

Wir müssen die Eigenvektoren von A bestimmen:

$$(A - 2E_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Wir müssen die Eigenvektoren von A bestimmen:

$$(A - 2E_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Die Koeffizientenmatrix hat Rang 2: Sie kann nicht mehr als Rang 2 haben wegen der 0-Spalte und der beiden sichtbar linear abhängigen ersten und zweiten Spalte.

Wir müssen die Eigenvektoren von A bestimmen:

$$(A - 2E_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = 0.$$

Die Koeffizientenmatrix hat Rang 2: Sie kann nicht mehr als Rang 2 haben wegen der 0-Spalte und der beiden sichtbar linear abhängigen ersten und zweiten Spalte. Da $\det \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = -7 + 8 = 1 \neq 0$ hat sie genau Rang 2.

Damit ist die Dimension des Eigenraums $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Eig}(A;2) = 2$ und als Jordansche Normalformen kommen a priori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(2;1) & 0 \\ 0 & J(2;3) \end{pmatrix}$$

und

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(2;2) & 0 \\ 0 & J(2;2) \end{pmatrix}$$

in Betracht.

Damit ist die Dimension des Eigenraums $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Eig}(A; 2) = 2$ und als Jordansche Normalformen kommen a priori

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(2;1) & 0 \\ 0 & J(2;3) \end{pmatrix}$$

und

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(2;2) & 0 \\ 0 & J(2;2) \end{pmatrix}$$

in Betracht.

Wir bestimmen das Minimalpolynom von A. Es ist $A - 2E_4 \neq 0$. Das hatten wir oben schon gesehen.

Aber $(A-2E_4)^2$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Aber $(A - 2E_4)^2$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Also ist das Minimalpolynom $m_A(X) = (X - 2)^2$. Ähnliche Matrizen haben übereinstimmende Minimalpolynome. Wir bestimmen also die Minimalpolynome von A_1 und A_2:

Aber $(A-2E_4)^2$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Also ist das Minimalpolynom $m_A(X) = (X-2)^2$. Ähnliche Matrizen haben übereinstimmende Minimalpolynome. Wir bestimmen also die Minimalpolynome von A_1 und A_2: Die Matrix

$(A_1 - 2)$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und damit ist $(A_1-2)^2 \neq 0$.

Aber $(A-2E_4)^2$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 & 2 \\ 7 & -7 & 0 & 2 \\ 4 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Also ist das Minimalpolynom $m_A(X) = (X-2)^2$. Ähnliche Matrizen haben übereinstimmende Minimalpolynome. Wir bestimmen also die Minimalpolynome von A_1 und A_2: Die Matrix $(A_1 - 2)$ ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und damit ist $(A_1-2)^2 \neq 0$. Daher muss die Jordansche Normalform von A gleich A_2 sein. Wir machen den Test:

$$(A_2-2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Bemerkung

- Oft finden Sie Jordan-Matrizen in der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

- Oft finden Sie Jordan-Matrizen in der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dies liefert eine äquivalente Theorie, weil

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} = J(\lambda; m)^t$$

und für $A \in M(n \times n; K)$ gilt für alle i: $c_A^{(i)} = c_{A^t}^{(i)}$ und $d_A^{(i)} = d_{A^t}^{(i)}$.

und für $A \in M(n \times n; K)$ gilt für alle i: $c_A^{(i)} = c_{A^t}^{(i)}$ und $d_A^{(i)} = d_{A^t}^{(i)}$.

- Ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen λ_i, so ist

$$P_A(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - X)^{m_r}$$

und damit gilt $\mu_{\text{alg}}(A; \lambda_i) = m_i$.

und für $A \in M(n \times n; K)$ gilt für alle i: $c_A^{(i)} = c_{A^t}^{(i)}$ und $d_A^{(i)} = d_{A^t}^{(i)}$.

- Ist A ähnlich zu $\begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}$ mit paarweise verschiedenen λ_i, so ist

  $$P_A(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_r - X)^{m_r}$$

  und damit gilt $\mu_{\text{alg}}(A; \lambda_i) = m_i$.
- Für die geometrische Vielfachheit gilt dagegen:

  $$\mu_{\text{geo}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 1$$

Allgemeiner gilt: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist die Anzahl der Jordan-Blöcke zu diesem Eigenwert.

Allgemeiner gilt: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist die Anzahl der Jordan-Blöcke zu diesem Eigenwert.

- Das Minimalpolynom können Sie ebenfalls direkt aus der Jordanschen Normalform ablesen: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte von A und zerfällt $P_A(X)$ in Linearfaktoren, so sei ℓ_i jeweils die Größe eines maximalen Jordanblocks zum Eigenwert λ_i, dann gilt:

$$(J(\lambda_i, \ell_i) - \lambda_i E_{\ell_i})^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} 0, & k \geqslant \ell_i, \\ \neq 0, & k < \ell_i. \end{cases}$$

Allgemeiner gilt: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist die Anzahl der Jordan-Blöcke zu diesem Eigenwert.

- Das Minimalpolynom können Sie ebenfalls direkt aus der Jordanschen Normalform ablesen: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die verschiedenen Eigenwerte von A und zerfällt $P_A(X)$ in Linearfaktoren, so sei ℓ_i jeweils die Größe eines maximalen Jordanblocks zum Eigenwert λ_i, dann gilt:

$$(J(\lambda_i, \ell_i) - \lambda_i E_{\ell_i})^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{cases} 0, & k \geqslant \ell_i, \\ \neq 0, & k < \ell_i. \end{cases}$$

Damit gilt für das Minimalpolynom von A:

$$m_A(X) = (X - \lambda_1)^{\ell_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_m)^{\ell_m}.$$

Wir erhalten als Spezialfall: Zerfällt das Minimalpolynom von A in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist $\ell_i = 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ und damit gibt es nur Jordanblöcke der Größe 1. In diesem Fall ist A diagonalisierbar.

Wir erhalten als Spezialfall: Zerfällt das Minimalpolynom von A in paarweise verschiedene Linearfaktoren, so ist $\ell_i = 1$ für alle $1 \leqslant i \leqslant m$ und damit gibt es nur Jordanblöcke der Größe 1. In diesem Fall ist A diagonalisierbar.
Wir erhalten also:

Satz

Es sei $A \in M(n \times n, K)$. Dann ist A genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom $m_A(X)$ in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Bemerkung

Ist V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und es sei A die darstellende Matrix von $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist $P_f(X) = P_A(X)$.

Bemerkung

Ist V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und es sei A die darstellende Matrix von $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist $P_f(X) = P_A(X)$. Zerfällt $P_A(X)$ in Linearfaktoren, so ist A ähnlich zu

$$J := \begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung

Ist V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und es sei A die darstellende Matrix von $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so ist $P_f(X) = P_A(X)$. Zerfällt $P_A(X)$ in Linearfaktoren, so ist A ähnlich zu

$$J := \begin{pmatrix} J(\lambda_1; m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J(\lambda_r; m_r) \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben diese Matrix als Summe $J = D + N$.

Hierbei ist D eine Diagonalmatrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Hierbei ist D eine Diagonalmatrix der Form

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_r & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}$$

und N hat nur Einsen unterhalb der Diagonalen:

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N_m \end{pmatrix}$$

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.
Man kann also jedes solche f zerlegen als $f = f_D + f_N$, wobei f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent ist.

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.
Man kann also jedes solche f zerlegen als $f = f_D + f_N$, wobei f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent ist. Es gilt

$$f_N \circ f_D = f_D \circ f_N.$$

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.
Man kann also jedes solche f zerlegen als $f = f_D + f_N$, wobei f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent ist. Es gilt

$$f_N \circ f_D = f_D \circ f_N.$$

Dies liefert eine *multiplikative Version der Jordanschen Normalform*: Ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$, so setzen wir $f_U = \mathrm{id}_V + f_D^{-1} \circ f_N$.

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.
Man kann also jedes solche f zerlegen als $f = f_D + f_N$, wobei f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent ist. Es gilt

$$f_N \circ f_D = f_D \circ f_N.$$

Dies liefert eine *multiplikative Version der Jordanschen Normalform*: Ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$, so setzen wir $f_U = \mathrm{id}_V + f_D^{-1} \circ f_N$.
Damit erhalten wir

$$f_D \circ f_U = f_D \circ (\mathrm{id}_V + f_D^{-1} \circ f_N) = f_D + f_N = f.$$

Dabei sind die $N_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei wir wieder die Konvention benutzen, dass dort wo nichts steht, Nullen sind.
Man kann also jedes solche f zerlegen als $f = f_D + f_N$, wobei f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent ist. Es gilt

$$f_N \circ f_D = f_D \circ f_N.$$

Dies liefert eine *multiplikative Version der Jordanschen Normalform*: Ist $f \in \mathrm{Aut}_K(V)$, so setzen wir $f_U = \mathrm{id}_V + f_D^{-1} \circ f_N$. Damit erhalten wir

$$f_D \circ f_U = f_D \circ (\mathrm{id}_V + f_D^{-1} \circ f_N) = f_D + f_N = f.$$

Die Abbildung f_U heißt *unipotent*. Wir können also jeden solchen Automorphismus f multiplikativ zerlegen in einen Diagonalanteil f_D und einen unipotenten Anteil f_U.