Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 8 Abgabetermin: 15.12.2023, 16:00h

(1) (Abbildungsgrad) (2 + 1 + 1 + 2 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für stetige $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gilt

$$\mathrm{grad}(f \circ g) = \mathrm{grad}(f)\mathrm{grad}(g).$$

b) Berechnen Sie damit $\mathrm{grad}(-f)$ und $\mathrm{grad}(\bar{f})$. Hierbei ist $\bar{f}$ die Abbildung

$$\bar{f}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, \qquad \bar{f}(z) := \overline{f(z)}.$$

c) Zeigen Sie, dass Homöomorphismen f auf $\mathbb{S}^1$ Grad ± 1 haben. Gilt das auch für Homotopieäquivalenzen?

d) Beweisen Sie, dass ein $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit Grad ungleich 0 immer surjektiv ist. Gilt die Umkehrung?

(2) (Der Abbildungsgrad und die Scheibe) (2 Punkte)

Es sei $g\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig und f sei die Einschränkung von g auf $\mathbb{S}^1$. Zeigen Sie, dass der Abbildungsgrad von f trivial ist.

(3) (Konfigurationsräume) (2 + 2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Raum

$$\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) | x_i \in \mathbb{R}^n, x_i \neq x_j \text{ falls } i \neq j\}.$$

Dies ist der sogenannte Konfigurationsraum von k geordneten Punkten im $\mathbb{R}^n$. Topologisiert ist dieser Raum als Unterraum des Produktes $(\mathbb{R}^n)^k$.

a) Was sind geschlossene Wege in $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$? Können Sie die Fundamentalgruppe für $n = 2$ geometrisch beschreiben?

b) Wenn wir jetzt darauf verzichten, die k Punkte in einer bestimmten Reihenfolge zu betrachten, wenn wir also stattdessen

$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{\{x_1, \ldots, x_k\} \mid |\{x_1, \ldots, x_k\}| = k\}$$

betrachten, welche Fundamentalgruppe tritt dann auf? Was passiert für $k = n = 2$?

c) Sind die auftauchenden Gruppen abelsch oder nicht? Sind sie endlich oder unendlich?

(4) (Freie Produkte) (2 + 2 Punkte)

Betrachten Sie das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht endlich.

b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht abelsch.

Gelten a) und b) für beliebige freie Produkte $G_1 * G_2$ nichttrivialer Gruppen G_1 und G_2?