

Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 6

Abgabetermin: 01.12.2023, 16:00h

(1) (Lebesgue-Zahl) (2 Punkte)

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Metrik auf X beschränkt ist. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei $\text{diam}(S) := \sup\{d(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S\}$ der Durchmesser der Teilmenge S . Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\text{diam}(S) < \lambda$ in einem U_i liegt.

(2) (Ein-Punkt-Kompaktifizierung) (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

a) Es seien $a < b < c < d \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ein-Punkt-Kompaktifizierungen von $[a, b)$, (a, b) und $(a, b) \cup (c, d)$.

Es seien X und Y lokal-kompakt und hausdorffsch und X^+, Y^+ seien die Ein-Punkt-Kompaktifizierungen mit $\infty \in X^+$ und $\infty' \in Y^+$ als unendlich fernen Punkten.

b) Zeigen Sie, dass sich eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann durch $\tilde{f}(\infty) := \infty'$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}: X^+ \rightarrow Y^+$ fortsetzen lässt, wenn für jedes kompakte $K \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(K)$ kompakt ist.

c) Stellen Sie $X^+ \vee Y^+$ als Ein-Punkt-Kompaktifizierung eines Raumes dar, wenn wir als Grundpunkte in X^+ und Y^+ die unendlich fernen Punkte wählen.

d) Beweisen Sie, dass X dicht liegt in X^+ , falls X nicht schon kompakt ist.

(3) (Eigentliche Abbildungen) (2 Punkte)

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eigentlich, falls sie abgeschlossen ist und $f^{-1}(y) \subset X$ kompakt ist für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass für eigentliche Abbildungen $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes kompakte K .

(4) (Direkte und inverse Limites) (1 + 2 + 2 + 1 Punkte)

a) Was ist der inverse Limes des Systems $\dots \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ für eine Primzahl p ?

b) Zeigen Sie, dass die p -adischen ganzen Zahlen

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$$

für jede Primzahl p als topologischer Raum total unzusammenhängend sind. So bezeichnet man Räume, in denen nur die einelementigen Teilmengen und die leere Menge zusammenhängend sind. Hinweis: $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ ist total unzusammenhängend. Was ist dann mit dem Produkt total unzusammenhängender Räume und einem Unterraum?

c) Beweisen Sie, dass \mathbb{Z}_p kompakt ist.

d) Finden Sie ein Beispiel eines direkten Systems kompakter topologischer Räume, so dass der direkte Limes nicht kompakt ist.