

Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 4

Abgabetermin: Freitag, 17.11.2023, 16:00h

- (1) (Zusammenhang von Produkten) (2 Punkte)
Es sei $(X_i, i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Ist X genau dann (weg)zusammenhängend, wenn jedes X_i (weg)zusammenhängend ist? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung oder geben Sie ein Gegenbeispiel.
- (2) (Reell-projektive Ebene) (2 + 2 + 2 Punkte)
Beweisen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zum $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ sind:
 - a) \mathbb{D}^2/\sim , wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$.
 - b) $M/\partial M$; hierbei ist M das Möbiusband und ∂M sein Rand.
 - c) Es sei $X = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset X$ und $Y = \mathbb{S}^1$ und $f: A \rightarrow Y$ sei die Abbildung $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$.
Untersuchen Sie $X \cup_f Y$.
- (3) (Wichtige Matrizen Gruppen) (2 + 2 + 2 Punkte)
Für Matrizen Gruppen nehmen wir die Unterraumtopologie des umgebenden Matrizenrings, also $M_n(K) = K^{n^2}$.
 - a) Zeigen Sie die Homöomorphismen $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ und $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.
 - b) Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^3$ homöomorph zur $SO(3)$ ist. Konstruieren Sie dafür eine Abbildung $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$, die über $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/(x \sim -x)$ faktorisiert.
 - c) Weisen Sie nach, dass $O(n)$ für kein n zusammenhängend ist, während $SO(n)$, $U(n)$ und $SU(n)$ wegzusammenhängend sind.
- (4) (Sphären in disguise) (2 + 2 Punkte)
Beweisen Sie durch Angabe expliziter Abbildungen, dass die folgenden Räume homöomorph zu Sphären sind:
 - a) $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ und
 - b) $\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1$.
- (5) (* ABC) Die Aufgabe ist just for fun. Wir besprechen sie in den Übungen.
Betrachten Sie die serifenfreie Version der deutschen Großbuchstaben:
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.
Welche Buchstaben sind homöomorph zum J? Welche zum Y? Sind das alle Homöomorphieklassen?