

Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 3. November 2023, 16:00h

- (1) (Urysohnscher Einbettungssatz) (2 + 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum X mit abzählbarer Basis in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann. Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn sie stetig und injektiv ist, und wenn für jedes offene B in X $f(B)$ von der Form $O \cap f(X)$ ist für ein offenes O in Y .

b) Erinnern Sie sich daran, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{P_1, P_2, \dots\}$ besitzt und untersuchen Sie die Abbildung $f(x) := (\dots, 2^{-n}d(x, P_n), \dots)$.

- (2) (T_1 -Bedingung) (2 + 2 Punkte)

Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungaxiom T_1 , falls von je zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die koendliche Topologie die größte Topologie ist, für die X ein T_1 -Raum ist.

b) Beweisen Sie, dass X genau dann ein T_1 -Raum ist, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

- (3) (Trennungseigenschaften metrischer Räume) (1 + 2 + 3 Punkte)

Untersuchen Sie metrische Räume daraufhin, ob sie hausdorffsch, regulär und normal sind. Für die Normalität kann man die Definition des Abstands eines Punktes zu einer Teilmenge betrachten: Ist (X, d) metrischer Raum, $x \in X$ und $Y \subset X$, dann sei

$$d(x, Y) := \inf\{d(x, y), y \in Y\}.$$

- (4) (Torusknoten) (3 + 1 Punkte)

Als Torus bezeichnet man den topologischen Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

a) Zeigen Sie, dass T homöomorph ist zur Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, z) \mid (x - 2)^2 + z^2 = 1\}$ in der (x, z) -Ebene um die z -Achse rotieren lässt.

b) Es seien $p, q \geq 2$ ganze teilerfremde Zahlen. Betrachten Sie die Kurve $t \mapsto (\exp(2\pi i p t), \exp(2\pi i q t))$ auf T . Zeichnen Sie das Bild der Kurve für $p = 3, q = 2$ auf der Rotationsfläche.

- (5) (*) (Topologie auf Ringen)

Diese Aufgabe ist eine Zusatzaufgabe, für diejenigen, die sie interessiert. Sie geht nicht in die Wertung ein. Wir besprechen sie aber in den Übungen.

Die Zariski-Topologie eines kommutativen Ringes mit Eins R ist eine Topologie auf der Menge der echten Primideale $\text{Spec}(R)$. Wir setzen die Mengen $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subset \mathfrak{p}\}$ als abgeschlossene Mengen an. Hierbei ist I ein beliebiges Ideal in R . Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Topologie definiert (Hinweis: Betrachten Sie $V(I_1 \cdot I_2)$ und $V(\sum_j I_j)$). Was ist der Abschluss von (0) in $\text{Spec}(\mathbb{Z})$?