Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 11 Abgabetermin: 19.01.2024, 16:00h

(1) (Komplexe Polynome) (3 Punkte)
Betrachten Sie ein komplexes Polynom p vom Grad $n \geqslant 1$. Mit K bezeichnen wir die Menge der kritischen Werte von p, also $K = \{p(z), p'(z) = 0\}$. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von p auf $\mathbb{C} \setminus p^{-1}K$ eine n-blättrige Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus p^{-1}K$ auf $\mathbb{C} \setminus K$ ist.

(2) (Kompaktheit, T_2 und Konstruktionen) (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)
Es sei $p\colon \widetilde{X} \to X$ eine Überlagerung.

a) Ist X kompakt und p endlich-blättrig, so ist $\widetilde{X}$ ebenfalls kompakt.

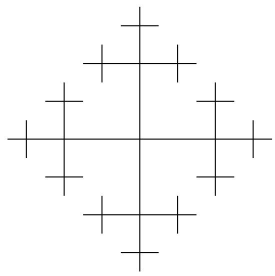
b) Ist X hausdorffsch, dann auch $\widetilde{X}$.

c) Sind $p_1\colon \widetilde{X} \to X$ und $p_2\colon \widetilde{Y} \to Y$ Überlagerungen, ist dann $(p_1, p_2)\colon \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung?

d) Sind $p\colon \widetilde{X} \to X$ und $q\colon \widetilde{\widetilde{X}} \to \widetilde{X}$ endlich-blättrige Überlagerungen, ist dann $p \circ q$ eine Überlagerung?

(3) (Eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$) (3 Punkte)
Es sei $\widetilde{X}$ ein Raum über $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, der als direkter Limes $\widetilde{X} = \varinjlim X_n$ konstruiert ist. Es sei x_0 ein Grundpunkt, X_1 sei der Raum, der entsteht, wenn wir an x_0 vier Kanten mit Länge eins ankleben, die Endpunkte der Kanten seien $x_1, \ldots, x_4$. Der Raum X_2 entstehe aus X_1 durch Ankleben von je drei Kanten der Länge $1/2$ an die Punkte $x_1, \ldots, x_4$. Die Endpunkte der Kanten an x_i heissen x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}. Im n-ten Schritt sei X_n konstruiert mit Endpunkten $x_{i_1 \ldots i_n}$ und wir kleben je drei Kanten der Länge $1/2^{n-1}$ an mit Endpunkten $x_{i_1 \ldots i_{n+1}}$.

Es sei $\widetilde{X}$ also der direkte Limes der X_n. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ eine triviale Fundamentalgruppe hat.

$X_3 =$ 

(4) (nicht hausdorffsch) (2 + 2 Punkte)
Betrachten Sie die Operation der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ auf der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, die durch

$$\varrho(t^n, (x, y)) = (2^n x, 1/2^n y)$$

gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Diese Operation macht die Projektion $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \to (\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ zu einer Überlagerung.

b) Der Quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch. Also gilt die Umkehrung von (2) b) nicht.