Übungsaufgaben zur Topologie

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2023/24

Blatt 1 Abgabetermin: Freitag, 27. Oktober 2023, 16:00h

(1) (Produkte) (3+1+2 Punkte)

a) Es seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} d'(x,y) &:= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2), \\ d''(x,y) &:= \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \quad \text{und} \\ d'''(x,y) &:= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} \end{aligned}$$

Metriken auf dem Produkt $X_1 \times X_2$ definieren. Hierbei sind $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ Elemente aus $X_1 \times X_2$.

Es sei nun eine Familie metrischer Räume, (X_n, d_n) für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gegeben.

b) Warum kann man die Definitionen aus Teil a) nicht einfach übertragen, um auf $X = \prod_{n \geqslant 0} X_n$ eine Metrik zu erhalten?

c) Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n \geqslant 0} X_n$ definiert.

(2) (Metriken in der Algebra) (2+1 Punkte)

Es sei p eine fest gewählte Primzahl. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir

$$d_{(p)}(x,y) := p^{-\nu(x-y)},$$

wobei $\nu(z) = \sup\{n, p^n \text{ teilt } z\}$. Wir benutzen die übliche Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $d_{(p)}$ eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ ergibt, welche die folgende starke Dreiecksungleichung erfüllt:

$$d_{(p)}(x,z) \leqslant \max\{d_{(p)}(x,y), d_{(p)}(y,z)\}.$$

b) Wie sehen ε-Bälle um die 0 aus für $p = 2$ und $\varepsilon = \frac{1}{8}$?

(3) (Funktionenräume) (2 Punkte)

Es sei $C([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen, reellen Funktionen des Einheitsintervalls. Betrachten Sie die beiden Metriken

$$d_\infty(f,g) := \sup_x |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_1(f,g) := \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx.$$

Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(1)$ stetig bzgl. d_∞ aber nicht stetig bzgl. d_1 ist; insbesondere sind diese beiden Metriken nicht äquivalent. (Sie dürfen benutzen, dass dies wirklich Metriken sind.)

(4) (Zum Warmwerden) (2+2+2 Punkte)

a) Es sei X eine Menge und

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, A, B\},$$

wobei A und B zwei nichtleere, echte, verschiedene Teilmengen von X sind. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit $\mathcal{T}$ eine Topologie ist?

b) Listen Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{1, 2, 3\}$ auf, die genau vier offene Mengen haben.

c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die nicht die diskrete Topologie ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch sind mit den offenen Mengen.