Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 9 Abgabetermin: Dienstag, 10.01.2017

Aufgabe 33 (Endlich erzeugte abelsche Gruppen)

Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen expliziten topologischen Raum X_A mit einem Grundpunkt x_0, so dass A isomorph ist zu $\pi_1(X_A, x_0)$. (Falls Sie den Struktursatz für diese Gruppen nicht kennen, dann schlagen Sie ihn nach.)

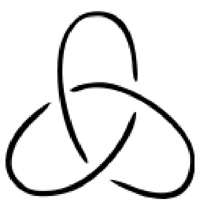
Aufgabe 34 (Verklebte Volltori)

Es sei $X = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup_f (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$, wobei $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c und d . Berechnen Sie $\pi_1(X, ((1,0),(1,0)))$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.

Aufgabe 35 (Knotengruppen)

(a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent ist. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1, 0) \cong \mathbb{Z}$.

(b) Ist die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge im $\mathbb{R}^3$ auch isomorph zu $\mathbb{Z}$?


[Quelle: wiki commons]

Aufgabe 36 (Kompakt-offene Topologie auf Abbildungsräumen)

Auf der Menge $C(X,Y)$ aller stetigen Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y ist die kompakt-offenen Topologie diejenige, die als Subbasis die Mengen $U(K,O)$ aller stetigen Abbildungen $f \in C(X,Y)$ hat, die eine kompakte Menge $K \subset X$ in eine offene Menge $O \subset Y$ abbilden:

$$U(K,O) = \{f \in C(X,Y); f(K) \subset O\}.$$

Nehmen Sie an, dass alle beteiligten Räume X, Y, Z hausdorffsch und lokal-kompakt sind.

(a) Der Raum $C(X,Y)$ ist dann ebenfalls hausdorffsch.

(b) Ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ stetig?

(c) Zeigen Sie, dass das Exponentialgesetz gilt:

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y,Z)).$$

*-Zusatzaufgabe Ist X zusätzlich kompakt und ist Y ein metrischer Raum mit einer Metrik d, dann ist $C(X,Y)$ mit der kompakt-offenen Topologie homöomorph zu $C(X,Y)$ mit der Topologie induziert durch die Supremumsmetrik $D(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)), x \in X\}$.