Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 8 Abgabetermin: Dienstag, 20.12.2016

Aufgabe 29 (Abbildungsgrad)

(a) Zeigen Sie, dass für stetige $f, g\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gilt
$$\mathrm{grad}(f \circ g) = \mathrm{grad}(f)\mathrm{grad}(g).$$
(b) Berechnen Sie damit $\mathrm{grad}(-f)$ und $\mathrm{grad}(\bar{f})$ in Abhängigkeit von $\mathrm{grad}(f)$. Hierbei ist $\bar{f}(z)$ das komplex Konjugierte von $f(z)$ für alle z auf der Kreislinie.

(c) Zeigen Sie, dass Homöomorphismen f auf $\mathbb{S}^1$ Grad ± 1 haben. Gilt das auch für Homotopieäquivalenzen?

(d) Beweisen Sie, dass ein $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit Grad ungleich 0 immer surjektiv ist. Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 30 (Abbildungsgrad und die Scheibe)

(a) Ist $g\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig und ist f die Einschränkung von g auf $\mathbb{S}^1$, so ist der Abbildungsgrad von f trivial.

(b) Ist $\varphi\colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung und ist f die Einschränkung von φ auf die Kreislinie, dann gilt für die Umlaufzahl um den Nullpunkt, $U(f, 0)$, dass $U(f, 0) = 0$, falls $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}^2$.

Aufgabe 31 (Konfigurationsräume)

Betrachten Sie den folgenden Raum
$$\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) | x_i \in \mathbb{R}^n, x_i \neq x_j \text{ falls } i \neq j\}.$$
Dies ist der sogenannte Konfigurationsraum von k geordneten Punkten im $\mathbb{R}^n$. Topologisiert ist dieser Raum als Unterraum des Produktes.

(a) Was sind geschlossene Wege in $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$? Können Sie die Fundamentalgruppe für $n = 2$ geometrisch beschreiben? Was passiert für $k = 2$?

(b) Wenn wir jetzt darauf verzichten, die k Punkte in einer bestimmten Reihenfolge zu betrachten, wenn wir also stattdessen
$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{\{x_1, \ldots, x_k\} \mid |\{x_1, \ldots, x_k\}| = k\}$$
betrachten, welche Fundamentalgruppe tritt dann auf?

(c) Sind die auftauchenden Gruppen abelsch oder nicht?

(d) Sind sie endlich oder unendlich?

Aufgabe 32 (induzierte Abbildungen)

Finden Sie Beispiele für stetige Abbildungen $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ für die folgenden Phänomene:

(a) Die Abbildung f ist eine Inklusion topologischer Räume, aber die induzierte Abbildung $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist nicht injektiv.

(b) Die Abbildung f ist eine Inklusion topologischer Räume, und die induzierte Abbildung $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist injektiv.

(c) Die Abbildung f ist auf den unterliegenden Mengen eine surjektive Abbildung, aber die induzierte Abbildung $\pi_1(f)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ist nicht surjektiv.