

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 7

Abgabetermin: Dienstag, 13.12.2016

Aufgabe 25 (Kompaktheit und Limites)

- (a) Ist die unendlich dimensionale Sphäre $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim (\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \dots \subset \mathbb{S}^n \subset \dots)$ kompakt?
- (b) Zeigen Sie, dass der Hawaiische Ohrring kompakt ist.

Aufgabe 26 (Kegel)

Es sei X ein beliebiger Raum. Der Kegel auf X , CX , sei definiert als $CX = X \times [0, 1]/X \times \{1\}$. Hat X einen Grundpunkt $x_0 \in X$ so betrachtet man den reduzierten Kegel $C'X = X \times [0, 1]/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1])$.

- (a) Zeigen Sie, dass CX und $C'X$ zusammenziehbar sind. Was ist der Kegel über \mathbb{S}^n ?
Der Raum X kann als Unterraum des Kegels aufgefasst werden, indem man X mit $X \times \{0\}$ identifiziert. Es sei $i: X \rightarrow CX$ die Inklusion.
- (b) Beweisen Sie, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich auf den Kegel CX fortsetzen lässt.
Der Abbildungskegel einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist definiert als $C_f := Y \cup_f CX$. Hierbei ist Y in kanonischer Weise ein Unterraum von C_f .
- (c) Sei $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ eine Verkettung von Abbildungen. Beweisen Sie, dass $g \circ f$ genau dann nullhomotop ist, falls man g über den Kegel von f faktorisieren kann:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z, \\ & & \downarrow i & \nearrow \bar{g} & \\ & & C_f & & \end{array}$$

d.h. es gibt ein \bar{g} mit $\bar{g} \circ i = g$.

Aufgabe 27 (Fundamentalgruppen topologischer Gruppen)

Es sei G eine topologische Gruppe. Ist X ein beliebiger topologischer Raum, so definieren wir auf $[X, G]$ und auf $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ eine Multiplikation durch $[f] \bullet [g] := [f \bullet g]$, wobei $(f \bullet g)(x) := f(x)g(x)$.

- (a) Zeigen Sie, dass $[X, x_0; G, 1]$ für $x_0 \in X$ dadurch eine Gruppe wird. Gilt das auch für $[X, G]$?
- (b) Beweisen Sie, dass für $(X, x_0) = (\mathbb{S}^1, 1)$ die beiden Multiplikationen $f * g$ und $f \bullet g$ übereinstimmen.
- (c) Auch für nichtabelsche Gruppen G ist $\pi_1(G, 1)$ abelsch.

Aufgabe 28 (Zur Homotopieäquivalenz)

Zu $f: X \rightarrow Y$ gebe es $h, k: Y \rightarrow X$ mit $h \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ k \simeq \text{id}_Y$. Beweisen Sie, dass dann X homotopieäquivalent ist zu Y .