

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 6.12.2016

Aufgabe 21 (Lebesgue-Zahl)

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Metrik auf X beschränkt ist. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei $\text{diam}(S) := \sup\{d(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S\}$ der Durchmesser der Teilmenge S . Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\text{diam}(S) < \lambda$ in einem U_i liegt.

Aufgabe 22 (Eigentliche Abbildungen)

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt eigentlich, falls sie abgeschlossen ist und falls $f^{-1}(y) \subset X$ kompakt ist für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass für eigentliche Abbildungen $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes kompakte K .

Aufgabe 23 (Ein-Punkt Kompaktifizierung)

Es seien X und Y lokal-kompakt und hausdorffsch.

- Beschreiben Sie $X^+ \vee Y^+$ und $X^+ \wedge Y^+$ über $X \sqcup Y$ und $X \times Y$, wobei Sie den unendlich fernen Punkt in X^+ und Y^+ als Grundpunkt wählen.
- Beweisen Sie, dass X dicht liegt in X^+ , falls X nicht schon kompakt ist.

Aufgabe 24 (Limites von Gruppen)

- Was ist der inverse Limes des Systems $\dots \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ für eine Primzahl p ?
- Beschreiben Sie den direkten Limes des Systems $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \dots$.
- Zur Erinnerung: Eine Gruppe G heißt topologische Gruppe, falls G ein topologischer Raum und eine Gruppe ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Zeigen Sie: Ist $G_n, n \in \mathbb{N}$ ein inverses System topologischer Gruppen, so ist der inverse Limes der G_n eine topologische Gruppe. (Die Aussage gilt auch allgemein für inverse Systeme topologischer Gruppen.)
- Es sei $G_i = \mathbb{S}^1, i \in \mathbb{N}$ und $f_{i,j}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ sei gegeben durch $z \mapsto z^{p^{j-i}}$ für $i \leq j$. Zeigen Sie, dass der inverse Limes der G_i eine hausdorffsche, kompakte topologische Gruppe ist.

Wie haben die Stone-Čech-Kompaktifizierung nur erwähnt. Wenn Sie diese Lücke in der mathematischen Allgemeinbildung schließen wollen, dann lesen Sie sich das entsprechende Kapitel im Querenburg durch oder schauen Sie zumindest auf https://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Čech_compactification nach.