# Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

**Blatt 4** Abgabetermin: Dienstag, 22.11.2016

**Aufgabe 13** (Reell-projektive Ebene)

Beweisen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zum $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ sind:

(1) $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$.
(2) $M/\partial M$; hierbei ist $M$ das Möbiusband und $\partial M$ sein Rand.
(3) Es sei $X = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset X$ und $Y = \mathbb{S}^1$ und $f : A \to Y$ sei die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$. Untersuchen Sie $X \cup_f Y$.

Zu Aufgabe 13, (2) gibt es eine hübsche Visualisierung: Wenn man eine Scheibe aus dem Inneren des $\mathbb{R}P^2$ entfernt, erhält man das Möbiusband. `https://www.youtube.com/watch?v=u0VkikpElMo`

**Aufgabe 14** (Quotienten von Gruppen nach Untergruppen)

Es sei $G$ eine Gruppe, die eine Topologie trägt. Dann heißt $G$ eine topologische Gruppe, falls die Gruppenverknüpfung $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ und die Inversenbildung $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sind. Wir betrachten eine Untergruppe $H < G$ und die Äquivalenzrelation auf $G$, bei der $g$ äquivalent ist zu $g'$, genau dann wenn es ein $h \in H$ gibt, so dass $hg = g'$.

Zeigen Sie:

(1) Der Quotientenraum $G/H$ ist hausdorffsch, genau dann wenn $H$ in $G$ abgeschlossen ist.
(2) Der Quotient $G/H$ is diskret, genau dann wenn $H$ in $G$ offen ist.

**Aufgabe 15** (Wichtige Matrizengruppen)

Für Matrizengruppen nehmen wir die Unterraumtopologie des umgebenden Matrizenrings, also $M_n(K) = K^{n^2}$.

(1) Beweisen Sie, dass $SO(1) \cong SU(1) \cong *$, wobei $*$ einen einpunktigen topologischen Raum bezeichnet, und zeigen Sie, dass $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ und $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.
(2) Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^3$ homöomorph zur $SO(3)$ ist. Konstruieren Sie dafür eine Abbildung $f\colon \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, die über $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/(x \sim -x)$ faktorisiert.
(3) Weisen Sie nach, dass $O(n)$ für kein $n$ zusammenhängend ist, während $SO(n)$, $U(n)$ und $SU(n)$ wegzusammenhängend sind.

**Aufgabe 16** (Sphären in disguise)

Beweisen Sie durch Angabe expliziter Abbildungen, dass die folgenden Räume homöomorph zu Sphären sind:

(1) $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ für $n \geqslant 1$ und
(2) $\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1$ für $n \geqslant 2$.