Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 12 Abgabetermin: 31.01.2017

Aufgabe 45 (Konfigurationsräume)

Betrachten Sie den geordneten Konfigurationsraum

$$\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^2, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$

und den ungeordneten Konfigurationsraum

$$C_n(\mathbb{R}^2) = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \mid x_i \in \mathbb{R}^2, |\{x_1, \ldots, x_n\}| = n\}$$

aller Konfigurationen von n Punkten des $\mathbb{R}^2$.

Fassen Sie $C_n(\mathbb{R}^2)$ als Quotienten von $\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2)$ auf und zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung ist.

Aufgabe 46 (Universelle Überlagerung)

Zeichnen Sie eine Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mit trivialer Fundamentalgruppe.

Aufgabe 47 (Zurückziehen von Überlagerungen)

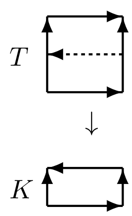
Es sei $p : X' \to X$ eine Überlagerung und $f \colon Y \to X$ eine stetige Abbildung.

(a) Betrachten Sie den pullback $Y' =: f^*(p)$ des inversen Systems

$$\begin{tikzcd} Y' = f^*(p) \arrow[r, dotted, "f'"] \arrow[d, dotted, "p'"'] & X' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

und zeigen Sie, dass p' wiederum eine Überlagerung ist mit derselben typischen Faser wie p.

(b) Betrachten Sie die 2-blättrige Überlagerung der Kleinschen Flasche, K, durch den Torus, T:



und skizzieren Sie ein geeignetes f, so dass der pullback gerade die 2-blättrige Überlagerung des Möbiusbandes durch den Zylinder ist.

Aufgabe 48 (Cayley Graphen)

Die Gruppe G sei präsentiert als $G = \langle x_i, i \in I \mid r_j, j \in J\rangle$. Konstruieren Sie den folgenden Graphen: Für jedes Element in der Gruppe G setzen Sie einen Punkt und Sie kleben eine Kante zwischen g und gx_i für jeden Erzeuger x_i. Der entstehende Graph heißt *Cayley Graph der Gruppe* G, C_G.

(a) Zeigen Sie, dass C_G zusammenhängend ist.

Klebt man jetzt für jede Relation eine 2-Scheibe ein, so erhält man einen Raum, $\widetilde{X}_G$. Lassen Sie G auf C_G operieren, indem Sie für ein $g \in G$ einen Punkt g' auf gg' abbilden, eine Kante zwischen g' und $g'x_i$ auf die Kante zwischen gg' und $gg'x_i$ schicken.

(b) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert auf $\widetilde{X}_G$ fortgesetzt werden kann.

(c) Beweisen Sie, dass diese Operation eine Überlagerung $\widetilde{X}_G \to \widetilde{X}_G/G$ ergibt.

(Im Fall einer endlichen Präsentierung von G entspricht der Raum $\widetilde{X}_G/G$ dem Raum X_G, den wir in der Vorlesung im Beweis von Satz 4.13 konstruiert haben.)