

Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag, 24.01.2017

Aufgabe 41 (Komplexe Polynome)

Betrachten Sie ein komplexes Polynom p vom Grad $n \geq 1$. Mit K bezeichnen wir die Menge der kritischen Werte von p . Beweisen Sie, dass die Einschränkung von p auf $\mathbb{C} \setminus p^{-1}K$ eine n -blättrige Überlagerung von $\mathbb{C} \setminus K$ auf $\mathbb{C} \setminus K$ ist.

Aufgabe 42 (Kompaktheit, T_2 und Konstruktionen)

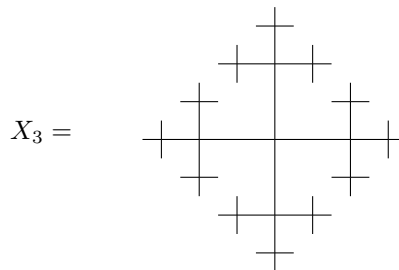
Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung.

- (a) Ist X kompakt und p endlich-blättrig, so ist \tilde{X} ebenfalls kompakt.
- (b) Ist X hausdorffsch, dann auch \tilde{X} .
- (c) Sind $p_1 : \tilde{X} \rightarrow X$ und $p_2 : \tilde{Y} \rightarrow Y$ Überlagerungen, ist dann $(p_1, p_2) : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ eine Überlagerung?
- (d) Sind $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $q : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ endlich-blättrige Überlagerungen, ist dann $p \circ q$ eine Überlagerung?

Aufgabe 43 (Universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$)

Es sei \tilde{X} ein Raum über $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, der als direkter Limes $\tilde{X} = \varinjlim X_n$ konstruiert ist. Es sei x_0 ein Grundpunkt, X_1 sei der Raum, der entsteht, wenn wir an x_0 vier Kanten mit Länge eins ankleben, die Endpunkte der Kanten seien x_1, \dots, x_4 . Der Raum X_2 entstehe aus X_1 durch Ankleben von je drei Kanten der Länge $1/2$ an die Punkte x_1, \dots, x_4 . Die Endpunkte der Kanten an x_i heißen x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} . Im n -ten Schritt sei X_n konstruiert mit Endpunkten $x_{i_1 \dots i_n}$ und wir kleben je drei Kanten der Länge $1/2^{n-1}$ an mit Endpunkten $x_{i_1 \dots i_{n+1}}$.

Es sei \tilde{X} der direkte Limes der X_n . Zeigen Sie, dass \tilde{X} eine triviale Fundamentalgruppe hat.



Aufgabe 44 (nicht hausdorffsch)

Betrachten Sie die Operation der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \langle t \rangle$ auf der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus 0$, die durch

$$\varrho(t^n, (x, y)) = (2^n x, 1/2^n y)$$

gegeben ist. Zeigen Sie

- (a) Diese Operation macht die Projektion $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ zu einer Überlagerung.
- (b) Der Quotient $(\mathbb{R}^2 \setminus 0)/\mathbb{Z}$ ist nicht hausdorffsch.