Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2016/17

Blatt 10 Abgabetermin: Dienstag, 17.01.2017

Aufgabe 37 ($SL_2(\mathbb{R})$)

(a) Wir hatten in der Vorlesung die Operation der $SL_2(\mathbb{R})$ auf der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ besprochen. Was ist der Stabilisator von $i \in \mathbb{C}$ unter $SL_2(\mathbb{R})$?

(b) Zeigen Sie, dass die Operation transitiv ist.

(c) Wie wirken Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (für $a \in \mathbb{R}$), $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ (für $0 \neq b \in \mathbb{R}$) und $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?

(d) Es sei $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ der Raum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Die Gruppe $O(n)$ operiert auf $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})$ durch

$$O(n) \times \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n;\mathbb{R}), \quad (A, B) \mapsto ABA^t.$$

Hierbei bezeichnet A^t die zu A transponierte Matrix. Benutzen Sie Lineare Algebra, um den Quotienten $\mathrm{Sym}(n;\mathbb{R})/O(n)$ zu beschreiben.

Aufgabe 38 (Fixpunkte)

Es sei X ein G-Raum. Für eine Untergruppe $H < G$ sei X^H der Unterraum der Fixpunkte der H-Operation, also $X^H = \{x \in X; hx = x \text{ für alle } h \in H\}$. Zeigen Sie:

(a) Ist X hausdorffsch, so ist X^H abgeschlossen für alle Untergruppen H von G.

(b) Sind H und K Untergruppen von G, so ist $X^H \cap X^K$ wiederum Fixpunktmenge einer geeigneten Untergruppe von G. Welcher?

Aufgabe 39 (Brieskorn Mannigfaltigkeiten)

Es sei $W_d^{2n-1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ für $d, n \geqslant 2$ der Unterraum, der definiert ist als Menge aller $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, die den beiden Gleichungen

$$z_0^d + z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 0 \text{ und } |z_0|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 2$$

genügen. Zeigen Sie, dass W_d^{2n-1} ein $O(n)$-Raum ist, wenn man $O(n)$ durch gewöhnliche Matrizenmultiplikation auf $(z_1, \ldots, z_n)$ operieren lässt.

Zur Allgemeinbildung: Brieskorn-Mannigfaltigkeiten sind Beispiele sogenannter *exotischer Sphären*. Für ungerade d und n ist W_d^{2n-1} homöomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$, aber nicht immer diffeomorph zu $\mathbb{S}^{2n-1}$.

Aufgabe 40 (Basics)

Es seien G und G' topologische Gruppen und $\varphi\colon G \to G'$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass φ genau dann stetig ist, falls es im neutralen Element, $1 = 1_G$, stetig ist.