Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

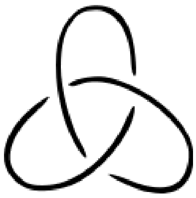
Wintersemester 2012/13

Blatt 9 Abgabetermin: Donnerstag, 20.12.2012

Aufgabe 33 (Endlich erzeugte abelsche Gruppen)
Konstruieren Sie zu jeder endlich erzeugten abelschen Gruppe A einen expliziten topologischen Raum X_A mit einem Grundpunkt x_0, so dass $\pi_1(X_A, x_0) \cong A$. (Falls Sie den Struktursatz für diese Gruppen nicht kennen, dann schlagen Sie ihn nach.)

Aufgabe 34 (Verklebte Volltori)
Es sei $X = (\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \cup_f (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)$, wobei $f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $f(z,w) = (z^a w^b, z^c w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c und d . Berechnen Sie $\pi_1(X, ((1,0),(1,0)))$ in Abhängigkeit von a, b, c, d.

Aufgabe 35 (Knotengruppen)
a) Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1$ zu $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ homotopieäquivalent ist. Insbesondere ist $\pi_1(\mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{S}^1, 0) \cong \mathbb{Z}$.
b) Ist die Fundamentalgruppe des Komplements der Kleeblattschlinge im $\mathbb{R}^3$ auch isomorph zu $\mathbb{Z}$?


[Quelle: wiki commons]

Aufgabe 36 (Kompakt-offene Topologie auf Abbildungsräumen)
Auf der Menge $C(X,Y)$ aller stetigen Abbildung eines Raumes X in einen Raum Y ist die kompakt-offenen Topologie diejenige, die als Subbasis die Mengen $U(K,O)$ aller stetigen Abbildungen $f \in C(X,Y)$ hat, die eine kompakte Menge $K \subset X$ in eine offene Menge $O \subset Y$ abbilden:

$$U(K,O) = \{f \in C(X,Y); f(K) \subset O\}.$$

a) Ist Y hausdorffsch, so auch $C(X,Y)$.
b) Ist die Auswertungsabbildung $\varepsilon : C(X,Y) \times X \longrightarrow Y$, $(f,x) \mapsto f(x)$ stetig, falls X lokal-kompakt und hausdorffsch ist?
c) Sind X, Y hausdorffsch und ist Y lokal-kompakt, so gilt das Exponentialgesetz:

$$C(X \times Y, Z) \cong C(X, C(Y,Z)).$$