Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 8 Abgabetermin: Donnerstag, 13.12.2012

Aufgabe 29 (Abbildungsgrad)

a) Zeigen Sie, dass für stetige $f, g \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ gilt

$$\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g).$$

b) Berechnen Sie damit $\deg(-f)$ und $\deg(\bar{f})$. Hierbei ist $\bar{f}(z)$ das komplex Konjugierte von $f(z)$ für alle z auf der Kreislinie.

c) Zeigen Sie, dass Homöomorphismen f auf $\mathbb{S}^1$ Grad ± 1 haben. Gilt das auch für Homotopieäquivalenzen?

d) Beweisen Sie, dass ein $f \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ mit Grad ungleich 0 immer surjektiv ist. Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 30 (Abbildungsgrad und die Scheibe)

a) Ist $g \colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig und ist f die Einschränkung von g auf $\mathbb{S}^1$, so ist der Abbildungsgrad von f trivial.

b) Ist $\varphi \colon \mathbb{D}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung und ist f die Einschränkung von φ auf die Kreislinie, dann gilt für die Umlaufzahl um den Nullpunkt, $U(f, 0)$, dass $U(f, 0) = 0$, falls $\varphi(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}^2$.

Aufgabe 31 (Konfigurationsräume)

Betrachten Sie den folgenden Raum

$$\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n) := \{(x_1, \ldots, x_k) | x_i \in \mathbb{R}^n, x_i \neq x_j \text{ falls } i \neq j\}.$$

Dies ist der sogenannte Konfigurationsraum von k geordneten Punkten im $\mathbb{R}^n$. Topologisiert ist dieser Raum als Unterraum des Produktes. Was sind geschlossene Wege in $\tilde{C}^k(\mathbb{R}^n)$? Können Sie die Fundamentalgruppe für $n = 2$ geometrisch beschreiben? Was passiert für $k = 2$?

Wenn wir jetzt darauf verzichten, die k Punkte in einer bestimmten Reihenfolge zu betrachten, wenn wir also stattdessen

$$C^k(\mathbb{R}^n) := \{\{x_1, \ldots, x_k\} \mid |\{x_1, \ldots, x_k\}| = k\}$$

betrachten, welche Fundamentalgruppe tritt dann auf?

Sind die auftauchenden Gruppen abelsch oder nicht? Sind sie endlich oder unendlich?

Aufgabe 32 (freie Produkte)

Betrachten Sie das freie Produkt $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und zeigen Sie:

a) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht endlich.

b) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist nicht abelsch.

Gelten a) und b) für beliebige freie Produkte $G_1 * G_2$ nichttrivialer Gruppen G_1 und G_2?