

# Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

## Blatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 6.12.2012

### Aufgabe 25 (Fundamentalgruppen topologischer Gruppen)

Es sei  $G$  eine topologische Gruppe, also eine Gruppe  $G$ , die ein topologischer Raum ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ist  $X$  ein beliebiger topologischer Raum, so definieren wir auf  $[X, G]$  und auf  $[X, x_0; G, 1]$  für  $x_0 \in X$  eine Multiplikation durch  $[f] \bullet [g] := [f \bullet g]$ , wobei  $(f \bullet g)(x) := f(x)g(x)$ .

- Zeigen Sie, dass  $[X, x_0; G, 1]$  für  $x_0 \in X$  dadurch eine Gruppe wird. Gilt das auch für  $[X, G]$ ?
- Beweisen Sie, dass für  $(X, x_0) = (\mathbb{S}^1, 1)$  die beiden Multiplikationen  $f * g$  und  $f \bullet g$  übereinstimmen.
- Auch für nichtabelsche Gruppen  $G$  ist  $\pi_1(G, 1)$  abelsch.

### Aufgabe 26 (Kegel)

Sei  $X$  ein beliebiger Raum. Der Kegel auf  $X$ ,  $CX$  sei definiert als  $CX = X \times [0, 1] / X \times \{1\}$ . Hat  $X$  einen Grundpunkt  $x_0 \in X$  so betrachtet man den reduzierten Kegel  $C'X = X \times [0, 1] / (X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times [0, 1])$ .

- Zeigen Sie, dass  $CX$  und  $C'X$  zusammenziehbar sind. Was ist der Kegel über  $\mathbb{S}^n$ ?

Der Raum  $X$  kann als Unterraum des Kegels aufgefasst werden, indem man  $X$  mit  $X \times \{0\}$  identifiziert. Es sei  $i : X \rightarrow CX$  die Inklusion.

- Beweisen Sie, dass eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  genau dann nullhomotop ist, wenn sie sich auf den Kegel  $CX$  fortsetzen lässt.

Der Abbildungskegel einer Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist definiert als  $C_f := Y \cup_f CX$ . Hierbei ist  $Y$  in kanonischer Weise Unterraum von  $C_f$ .

- Sei  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  eine Verkettung von Abbildungen. Beweisen Sie, dass  $g \circ f$  genau dann nullhomotop ist, falls man  $g$  über den Kegel von  $f$  faktorisieren kann:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z, \\ & & \downarrow i & \nearrow \bar{g} & \\ & & C_f & & \end{array}$$

d.h. es gibt ein  $\bar{g}$  mit  $\bar{g} \circ i = g$ .

### Aufgabe 27 (Kompaktheit und Limites)

- Ist die unendlich dimensionale Sphäre  $\mathbb{S}^\infty = \varinjlim (\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \dots \subset \mathbb{S}^n \subset \dots)$  kompakt?
- Zeigen Sie, dass der Hawaiische Ohrring kompakt ist.

### Aufgabe 28 (Zur Homotopieäquivalenz)

Zu  $f : X \rightarrow Y$  gebe es  $h, k : Y \rightarrow X$  mit  $h \circ f \simeq \text{id}_X$  und  $f \circ k \simeq \text{id}_Y$ . Beweisen Sie, dass dann  $X$  homotopieäquivalent ist zu  $Y$ .