Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 6 Abgabetermin: Donnerstag, 29.11.2012

Aufgabe 21 (Lebesgue-Zahl)
Sei X ein kompakter metrischer Raum. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass die Metrik auf X beschränkt ist. Für eine beliebige Teilmenge $S \subset X$ sei $\mathrm{diam}(S) := \sup\{d(x_1, x_2), x_1, x_2 \in S\}$ der Durchmesser der Teilmenge S. Zeigen Sie, dass es zu jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ eine reelle Zahl $\lambda > 0$ gibt, so dass jede Teilmenge $S \subset X$ mit $\mathrm{diam}(S) < \lambda$ in einem U_i liegt.

2 Punkte

Aufgabe 22 (Ein-Punkt Kompaktifizierung)
Es seien X und Y lokal-kompakt und hausdorffsch.

a) Beschreiben Sie $X^+ \vee Y^+$ und $X^+ \wedge Y^+$, wobei Sie den unendlich fernen Punkt als Grundpunkt wählen.

b) Beweisen Sie, dass X dicht liegt in X^+, falls X nicht schon kompakt ist.

2 Punkte

Aufgabe 23 (Eigentliche Abbildungen)
Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt eigentlich, falls sie abgeschlossen ist und $f^{-1}(y) \subset X$ kompakt ist für alle $y \in Y$. Zeigen Sie, dass für eigentliche Abbildungen $f^{-1}(K)$ kompakt ist für jedes kompakte K.

2 Punkte

Aufgabe 24 (Limites von Gruppen)

a) Was ist der inverse Limes des Systems $\ldots \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z}$ für eine Primzahl p?

b) Beschreiben Sie den direkten Limes des Systems $\mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \ldots$.

c) Eine Gruppe G heißt topologische Gruppe, falls G ein topologischer Raum und eine Gruppe ist, so dass die Verknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ist $G_i, i \in I$ ein inverses System topologischer Gruppen und ist I eine gerichtete Menge, d.h. I hat eine Ordnung ($\leqslant$) und für alle $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$ mit $i, j \leqslant k$, so ist der inverse Limes der G_i eine topologische Gruppe.

d) Es sei $G_i = \mathbb{S}^1, i \in \mathbb{N}$ und $f_{i,j} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ sei gegeben durch $z \mapsto z^{p^{j-i}}$ für $i \leqslant j$. Zeigen Sie, dass der inverse Limes der G_i eine hausdorffsche, kompakte topologische Gruppe ist.

1+2+2+2 Punkte

Wie haben die Stone-Čech-Kompaktifizierung nur erwähnt. Wenn Sie diese Lücke in der mathematischen Allgemeinbildung schließen wollen, dann lesen Sie sich das entsprechende Kapitel im Querenburg durch oder schauen Sie zumindest auf `http://en.wikipedia.org/wiki/Stone-Cech_compactification` nach.