Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 5 Abgabetermin: Donnerstag, 22.11.2012

Aufgabe 17 (Urbildfilter)

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und F sei ein Filter auf Y. Bilden die Urbilder der Mengen von F eine Filterbasis, so heißt der Filter zu dieser Basis das *Urbild von F*. Es bezeichne $f^{-1}(F)$ diesen Urbildfilter, sofern er existiert. Zeigen Sie:

a) Es sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf Y. Der Filter $F_{\mathcal{B}}$ hat bzgl. f genau dann ein Urbild, wenn keine Menge aus $\mathcal{B}$ ein leeres Urbild hat. Ist f surjektiv, so besitzt also jeder Filter F auf Y ein Urbild.

b) Ist F schon das Bild eines Filters F' auf X, so besitzt F ein Urbild.

c)
- Ist F' ein Filter auf X, so ist $f^{-1}(f(F'))$ gröber als F'.
- Es gilt $F' = f^{-1}(f(F'))$, wenn f injektiv ist.
- Ist F ein Filter auf Y und $f^{-1}(F)$ existiert, so ist $f(f^{-1}(F))$ feiner als F und stimmt mit F überein, falls f surjektiv ist.

(3 Punkte)

Aufgabe 18 (Endlicher Tychonov)

Beweisen Sie den Satz von Tychonov für endliche Produkte, d.h. beweisen Sie, dass $X \times Y$ genau dann kompakt ist, wenn X und Y kompakt sind. (Betrachten Sie dazu die Inklusion $i_y : X \to X \times Y$, $x \to (x, y)$ für ein festes y und wählen Sie zu einer offenen Überdeckung von $X \times Y$ eine endliche Teilüberdeckung von $i_y(X)$.)

(3 Punkte)

Aufgabe 19 (Ultrafilter sind wie Primideale)

Zeigen Sie, dass für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X für Teilmengen $A, B \subset X$ gilt, dass aus $A \cup B \in \mathcal{F}$ folgt, dass A oder B schon in $\mathcal{F}$ liegt.

(2 Punkte)

Aufgabe 20 (Filter und hausdorffsch)

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen topologischen Raum X:

a) X ist hausdorffsch.

b) Für jeden Punkt $x \in X$ ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich $\{x\}$.

c) Jeder konvergente Filter auf X besitzt genau einen Limespunkt.

(3 Punkte)

***-Aufgabe** (Cantors Diskontinuum)

Es sei C der Raum, der aus dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ entsteht, indem man zuerst das mittlere offene Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entfernt. Dann entfernt man aus den beiden verbliebenen Teilen $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ wiederum die offenen mittleren Drittel und so weiter.

Beschreiben Sie den Raum C als den Durchschnitt einer absteigenden Folge abgeschlossener Mengen $I = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ und zeigen Sie

a) C ist überabzählbar.

b) C ist homöomorph zum Produkt $\prod_{n \geqslant 1} X_n$, wobei $X_n = \{0, 2\}$ für alle n.

c) Wie sehen die Zusammenhangskomponenten von C aus?