Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 4 Abgabetermin: Donnerstag, 15.11.2012

Aufgabe 13 (Reell-projektive Ebene)

Beweisen Sie, dass die folgenden Räume homöomorph zum $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{S}^2/(x \sim -x)$ sind:

a) $\mathbb{D}^2/\sim$, wobei $x \sim -x$ für $x \in \mathbb{S}^1$.

b) $M/\partial M$; hierbei ist M das Möbiusband und ∂M sein Rand.

c) Es sei $X = \mathbb{D}^2$, $A = \mathbb{S}^1 \subset X$ und $Y = \mathbb{S}^1$ und $f : A \to Y$ sei die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $f(z) = z^2$. Untersuchen Sie $X \cup_f Y$.

Aufgabe 14 (Zusammenhang von Produkten)

Es sei $(X_i, i \in I)$ eine Familie topologischer Räume und $X = \prod_{i \in I} X_i$ sei ihr Produkt. Ist X genau dann (weg)zusammenhängend, wenn jedes X_i (weg)zusammenhängend ist? Beweisen Sie jeweils Ihre Behauptung oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 15 (Wichtige Matrizengruppen)

Für Matrizengruppen nehmen wir die Unterraumtopologie des umgebenden Matrizenrings, also $M_n(K) = K^{n^2}$.

a) Beweisen Sie, dass $SO(1) \cong SU(1) \cong *$, wobei $*$ einen einpunktigen topologischen Raum bezeichnet, und zeigen Sie, dass $SO(2) \cong U(1) \cong \mathbb{S}^1$ und $SU(2) \cong \mathbb{S}^3$.

b) Zeigen Sie, dass der reell-projektive Raum $\mathbb{R}P^3$ homöomorph zur $SO(3)$ ist. Konstruieren Sie dafür eine Abbildung $f : \mathbb{S}^3 \to SO(3)$, die über $\mathbb{R}P^3 = \mathbb{S}^3/(x \sim -x)$ faktorisiert.

c) Weisen Sie nach, dass $O(n)$ für kein n zusammenhängend ist, während $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ und $Sp(n)$ wegzusammenhängend sind.

Aufgabe 16 (Sphären in disguise)

Beweisen Sie durch Angabe expliziter Abbildungen, dass die folgenden Räume homöomorph zu Sphären sind:

a) $\mathbb{D}^n/\mathbb{S}^{n-1}$ und

b) $\mathbb{S}^{n-1} \wedge \mathbb{S}^1$.

***-Aufgabe** (ABC)

Teilen Sie die deutschen Großbuchstaben in Homöomorphieklassen auf. Benutzen Sie dabei serifenfreie Buchstaben, also A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P,Q,R,S,T,U,V,W,X,Y,Z.

Neil Stricklands Bilder zu Klebemodellen des Torus

`http://neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/algtop/pictures/torus/`

bzw des $\mathbb{R}P^2$

`http://neil-strickland.staff.shef.ac.uk/courses/algtop/pictures/RP2/`