Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 2 Abgabetermin: Donnerstag, 1. November 2012

Aufgabe 5 (Zum Warmwerden)

a) Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf einer Menge X der Form

$$\mathcal{T} = \{\varnothing, X, A, B\},$$

wobei A und B zwei nichtleere, echte, verschiedene Teilmengen von X sind. Welche Einschränkungen gibt es an A und B, damit $\mathcal{T}$ wirklich eine Topologie ist?

b) Listen Sie alle möglichen Topologien auf der Menge $X = \{a, b, c\}$ auf, die genau vier offene Mengen haben.

c) Geben Sie eine Menge X mit einer Topologie an, die nicht die diskrete Topologie ist, so dass die abgeschlossenen Mengen identisch sind mit den offenen Mengen.

Aufgabe 6 (Urysohnscher Einbettungssatz)

Zeigen Sie, dass jeder metrische Raum X mit abzählbarer Basis in den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{R})$ der quadratsummierbaren reellen Folgen eingebettet werden kann. Überlegen Sie sich dazu die folgenden Schritte:

a) Eine Funktion $f : X \to Y$ ist genau dann eine Einbettung, wenn sie stetig und injektiv ist, und wenn für jedes offene B in X $f(B)$ von der Form $O \cap f(X)$ ist für ein offenes O in Y.

b) Erinnern Sie sich daran, dass X eine abzählbare dichte Teilmenge $D = \{P_1, P_2, \ldots\}$ besitzt und untersuchen Sie die Abbildung $f(x) := (\ldots, 2^{-n}d(x, P_n), \ldots)$.

Aufgabe 7 (T_1-Bedingung)

Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungsaxiom T_1, falls von je zwei verschiedenen Punkten aus X jeder eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

a) Zeigen Sie, dass für eine Menge X die koendliche Topologie die gröbste Topologie ist, für die X ein T_1-Raum ist.

b) Beweisen Sie, dass X genau dann ein T_1-Raum ist, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 8 (Torusknoten)

Als Torus bezeichnet man den topologischen Raum $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

a) Zeigen Sie, dass T homöomorph ist zur Rotationsfläche, die entsteht, wenn man die Kreislinie $\{(x, z) \mid (x-2)^2 + z^2 = 1\}$ in der (x, z)-Ebene um die z-Achse rotieren lässt.

b) Es seien $p, q \geqslant 2$ ganze teilerfremde Zahlen. Betrachten Sie die Kurve $t \mapsto (\exp(2\pi i p t), \exp(2\pi i q t))$ auf T. Zeichnen Sie das Bild der Kurve für $p = 3, q = 2$ auf der Rotationsfläche.

***-Aufgabe** (Topologie auf Ringen)

Die Zariski-Topologie eines kommutativen Ringes mit Eins R ist eine Topologie auf der Menge der echten Primideale $\mathrm{Spec}(R)$. Wir setzen die Mengen $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | I \subset \mathfrak{p}\}$ als abgeschlossene Mengen an. Hierbei ist I ein beliebiges Ideal in R. Zeigen Sie, dass dies wirklich eine Topologie definiert (Hinweis: Betrachten Sie $V(I_1 \cdot I_2)$ und $V(\sum_j I_j)$). Was ist der Abschluss von (0) in $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$?