# Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

**Blatt 12** Abgabetermin: 24.01.2013

**Aufgabe 45** (Konfigurationsräume)

Betrachten Sie den geordneten Konfigurationsraum

$$\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}^2, x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}$$

und den ungeordneten Konfigurationsraum

$$C_n(\mathbb{R}^2) = \{\{x_1, \ldots, x_n\} \mid x_i \in \mathbb{R}^2, |\{x_1, \ldots, x_n\}| = n\}$$

aller Konfigurationen von $n$ Punkten des $\mathbb{R}^2$.

a) Fassen Sie $C_n(\mathbb{R}^2)$ als Quotienten von $\tilde{C}_n(\mathbb{R}^2)$ auf und zeigen Sie, dass die Projektionsabbildung eine Überlagerung definiert.

b) Was ist die Deckbewegungsgruppe?

**Aufgabe 46** (Universelle Überlagerung)

Was ist die universelle Überlagerung von $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$. Zeichnen Sie diese!

**Aufgabe 47** (Zurückziehen von Überlagerungen)

Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Betrachten Sie den pullback $\tilde{Y} =: f^*(p)$ des inversen Systems

$$\begin{tikzcd} \tilde{Y} = f^*(p) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"] \arrow[d, dotted, "\tilde{p}"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

und zeigen Sie, dass

a) $\tilde{p}$ wiederum eine Überlagerung ist mit derselben typischen Faser wie $p$ und dass

b) $\tilde{f}$ eine Abbildung von Überlagerungen ist.

**Aufgabe 48** (Cayley Graphen)

Die Gruppe $G$ sei präsentiert als $G = \langle x_i, i \in I \mid r_j, j \in J \rangle$. Konstruieren Sie den folgenden Graphen: Für jedes Element in der Gruppe $G$ setzen Sie einen Punkt und Sie kleben eine Kante zwischen $g$ und $gx_i$ für jeden Erzeuger $x_i$. Der entstehende Graph heißt *Cayley Graph der Gruppe* $G$, $C_G$.

a) Zeigen Sie, dass $C_G$ zusammenhängend ist.

Klebt man jetzt für jede Relation $r_j$ eine 2-Scheibe ein, so erhält man einen Raum, $\widetilde{X}_G$. Lassen Sie $G$ auf $\widetilde{X}_G$ operieren, indem Sie für ein $g \in G$ einen Punkt $g'$ auf $gg'$ abbilden, eine Kante zwischen $g'$ und $g'x_i$ auf die Kante zwischen $gg'$ und $gg'x_i$ schicken.

b) Zeigen Sie, dass diese Operation wohldefiniert auf $\widetilde{X}_G$ fortgesetzt werden kann.

c) Beweisen Sie, dass diese Operation eine Überlagerung $\widetilde{X}_G \to \widetilde{X}_G/G$ ergibt.

(Im Fall einer endlichen Präsentierung von $G$ entspricht der Raum $\widetilde{X}_G/G$ dem Raum $X_G$, den wir in der Vorlesung im Beweis von Satz 4.13 konstruiert haben.)