Übungsaufgaben zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. Birgit Richter

Wintersemester 2012/13

Blatt 1 Abgabetermin: Donnerstag, 25. Oktober 2012

Aufgabe 1 (Produkte)

a) Seien (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume. Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} d'(x,y) &:= d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2), \\ d''(x,y) &:= \sqrt{(d_1(x_1,y_1))^2 + (d_2(x_2,y_2))^2} \quad \text{und} \\ d'''(x,y) &:= \max\{d_1(x_1,y_1), d_2(x_2,y_2)\} \end{aligned}$$

Metriken auf dem Produkt $X_1 \times X_2$ definieren. Hierbei sind $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ Elemente aus $X_1 \times X_2$.

b) Es seien (X_n, d_n) für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ metrische Räume. Warum kann man die Definitionen aus Teil a) nicht einfach übertragen, um auf $X = \prod_{n \geqslant 0} X_n$ eine Metrik zu erhalten? Zeigen Sie, dass

$$d(x,y) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{d_n(x,y)}{1 + d_n(x,y)}$$

eine Metrik auf dem Produkt $\prod_{n \geqslant 0} X_n$ definiert.

Aufgabe 2 (Abstand zu Teilmengen)

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, dann gilt:

a) Für jedes $x_0 \in X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, x_0)$ stetig.

b) Für jede nichtleere Teilmenge $A \subset X$ ist die Abbildung $x \mapsto d(x, A) := \inf\{d(x,a) | a \in A\}$ stetig und das Urbild der Null ist $\bar{A}$.

c) Für je zwei nichtleere, disjunkte und abgeschlossene Teilmengen A und B von X gibt es eine stetige Abbildung $h \colon X \to \mathbb{R}$ mit $h^{-1}(0) = A$ und $h^{-1}(1) = B$.

Aufgabe 3 (Metriken in der Algebra)

Sei p eine Primzahl. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ definieren wir

$$d(x,y) := p^{-\nu(x-y)},$$

wobei $\nu(z) = \sup\{n : p^n \text{ teilt } z\}$. Wir benutzen die übliche Konvention, dass $p^{-\infty} = 0$. Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ ergibt, welche die folgende starke Dreiecksungleichung erfüllt:

$$d(x,z) \leqslant \max\{d(x,y), d(y,z)\}.$$

Wie sehen ε-Bälle um die 0 aus?

Aufgabe 4 (Funktionenräume)

Es sei $C([0,1], \mathbb{R})$ der Raum der stetigen, reellen Funktionen des Einheitsintervalls. Betrachten Sie die beiden Metriken

$$d_\infty(f,g) := \sup_x |f(x) - g(x)|$$

und

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Zeigen Sie, dass die Auswertungsabbildung $f \mapsto f(0)$ stetig bzgl. d_∞ aber nicht stetig bzgl. d_2 ist; insbesondere sind die beiden Metriken nicht äquivalent.