

Knoten und ihr Spiegelbild

Birgit Richter

Tag der Mathematik 2015

Was ist das Problem?

Beispiel Contergan:

Was ist das Problem?

Beispiel Contergan:

Aufdeckung: 1961 und 1962

Was ist das Problem?

Beispiel Contergan:

Aufdeckung: 1961 und 1962

Wirkstoff Thalidomid

Was ist das Problem?

Beispiel Contergan:

Aufdeckung: 1961 und 1962

Wirkstoff Thalidomid

Kann bei der Einnahme in der frühen Schwangerschaft

Schädigungen in der Wachstumsentwicklung der Föten hervorrufen.

Was ist das Problem?

Beispiel Contergan:

Aufdeckung: 1961 und 1962

Wirkstoff Thalidomid

Kann bei der Einnahme in der frühen Schwangerschaft
Schädigungen in der Wachstumsentwicklung der Föten hervorrufen.

Problem: Thalidomid hat zwei zueinander spiegelbildliche
Varianten; nur eine davon ist schädlich.

Was ist das Problem?

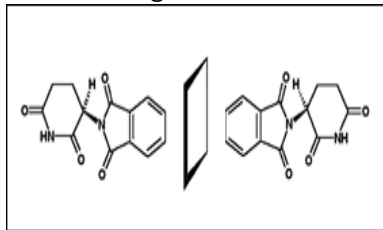
Beispiel Contergan:

Aufdeckung: 1961 und 1962

Wirkstoff Thalidomid

Kann bei der Einnahme in der frühen Schwangerschaft
Schädigungen in der Wachstumsentwicklung der Föten hervorrufen.

Problem: Thalidomid hat zwei zueinander spiegelbildliche
Varianten; nur eine davon ist schädlich. Die unschädliche wandelt
sich allerdings nach der Einnahme in die potentiell schädliche um.

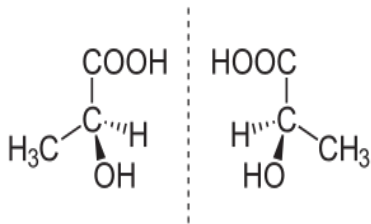


Quelle: k-faktor.com

Was sind Enantiomere?

Was sind Enantiomere?

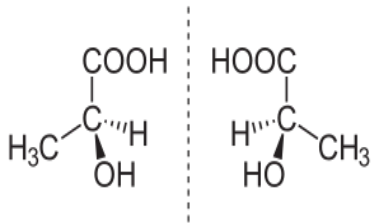
Beispiel Milchsäure:



Quelle: Wikipedia.

Was sind Enantiomere?

Beispiel Milchsäure:

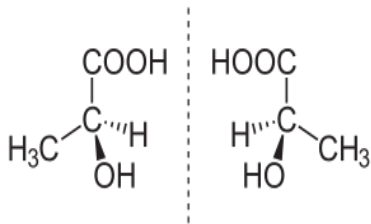


Quelle: Wikipedia.

rechtsdrehende versus linksdrehende Milchsäure

Was sind Enantiomere?

Beispiel Milchsäure:

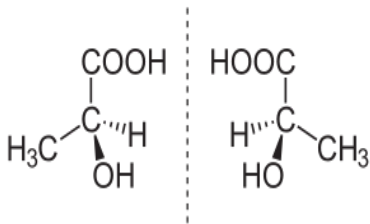


Quelle: Wikipedia.

rechtsdrehende versus linksdrehende Milchsäure
Allgemein: Spiegelbildisomere,

Was sind Enantiomere?

Beispiel Milchsäure:



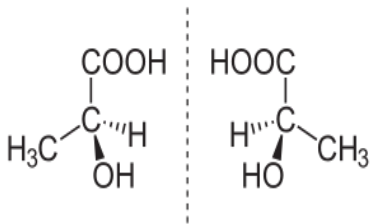
Quelle: Wikipedia.

rechtsdrehende versus linksdrehende Milchsäure

Allgemein: Spiegelbildisomere, chemische Verbindungen, die in ihrer Zusammensetzung übereinstimmen, die sich aber räumlich zu einem Gegenstück verhalten wie dessen (nicht-deckungsgleiches) Spiegelbild

Was sind Enantiomere?

Beispiel Milchsäure:



Quelle: Wikipedia.

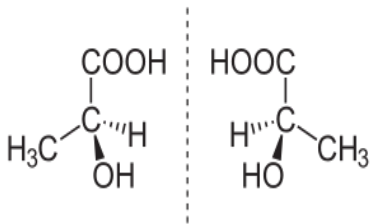
rechtsdrehende versus linksdrehende Milchsäure

Allgemein: Spiegelbildisomere, chemische Verbindungen, die in ihrer Zusammensetzung übereinstimmen, die sich aber räumlich zu einem Gegenstück verhalten wie dessen (nicht-deckungsgleiches) Spiegelbild

Beispiel Penicillamin: Behandlung bei Morbus Wilson.

Was sind Enantiomere?

Beispiel Milchsäure:



Quelle: Wikipedia.

rechtsdrehende versus linksdrehende Milchsäure

Allgemein: Spiegelbildisomere, chemische Verbindungen, die in ihrer Zusammensetzung übereinstimmen, die sich aber räumlich zu einem Gegenstück verhalten wie dessen (nicht-deckungsgleiches) Spiegelbild

Beispiel Penicillamin: Behandlung bei Morbus Wilson. Sein Spiegelbild ist hochgiftig.

Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild



Quelle: Wikipedia.

Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild



Quelle: Wikipedia.



Quelle: Wikipedia.

Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild



Quelle: Wikipedia.



Quelle: Wikipedia.

Die Kleeblattschlinge kommt in der Natur vor:

Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

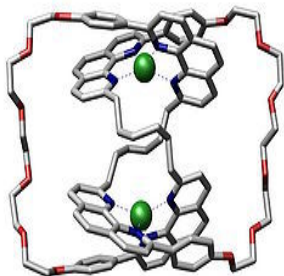


Quelle: Wikipedia.



Quelle: Wikipedia.

Die Kleeblattschlinge kommt in der Natur vor:



Quelle: Wikipedia.

Der Kleeblattknoten und sein Spiegelbild

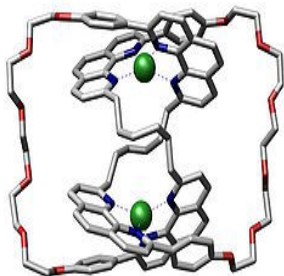


Quelle: Wikipedia.



Quelle: Wikipedia.

Die Kleeblattschlinge kommt in der Natur vor:



Quelle: Wikipedia.

Rechts oder links?

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Was kann die Mathematik tun?

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Was kann die Mathematik tun?

Gibt es eine Möglichkeit, einige verknotete Enantiomere mathematisch voneinander zu unterscheiden?

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Was kann die Mathematik tun?

Gibt es eine Möglichkeit, einige verknotete Enantiomere mathematisch voneinander zu unterscheiden?

Ja!

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Was kann die Mathematik tun?

Gibt es eine Möglichkeit, einige verknotete Enantiomere mathematisch voneinander zu unterscheiden?

Ja!

Es gibt sogenannte **Knoteninvarianten**.

Mathematische Unterscheidungsmöglichkeiten

Was kann die Mathematik tun?

Gibt es eine Möglichkeit, einige verknotete Enantiomere mathematisch voneinander zu unterscheiden?

Ja!

Es gibt sogenannte **Knoteninvarianten**.

Diese ordnen jedem Knoten eine algebraisches Objekt zu, und zwar so, dass der Wert sich nicht ändert, wenn man den Knoten im dreidimensionalen Raum stetig deformiert.

Beispiel: Das Jones-Polynom

Entdeckt: 1984 von Vaughan F. R. Jones

Beispiel: Das Jones-Polynom

Entdeckt: 1984 von Vaughan F. R. Jones

▶ $\text{Jones}(\bigcirc) = 1.$

Beispiel: Das Jones-Polynom

Entdeckt: 1984 von Vaughan F. R. Jones

▶ $\text{Jones}(\bigcirc) = 1.$

▶ $\text{Jones}(\text{Borromean Rings}) = -t^4 + t^3 + t$

Beispiel: Das Jones-Polynom

Entdeckt: 1984 von Vaughan F. R. Jones

▶ $\text{Jones}(\bigcirc) = 1.$

▶ $\text{Jones}(\text{Trefoil}) = -t^4 + t^3 + t$

▶ $\text{Jones}(\text{Mirror Trefoil}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}.$

Beispiel: Das Jones-Polynom

Entdeckt: 1984 von Vaughan F. R. Jones

▶ $\text{Jones}(\bigcirc) = 1.$

▶ $\text{Jones}(\text{Kleeblattknoten}) = -t^4 + t^3 + t$

▶ $\text{Jones}(\text{Kleeblattknoten}) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}.$

D. h. das Jones-Polynom kann die beiden Kleeblattknoten voneinander unterscheiden.

Knotentheorie

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.
- ▶ Knotentheorie ist ein Teilgebiet der sogenannten Topologie, die geometrische Gebilde bis auf stetige Deformationen untersucht.

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.
- ▶ Knotentheorie ist ein Teilgebiet der sogenannten Topologie, die geometrische Gebilde bis auf stetige Deformationen untersucht.
- ▶ Knotentheorie hat Anwendungen in der (hyperbolischen) Geometrie, in der topologischen Quantenfeldtheorie (Chern-Simons Theorie), Chemie, Molekularbiologie,...

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.
- ▶ Knotentheorie ist ein Teilgebiet der sogenannten Topologie, die geometrische Gebilde bis auf stetige Deformationen untersucht.
- ▶ Knotentheorie hat Anwendungen in der (hyperbolischen) Geometrie, in der topologische Quantenfeldtheorie (Chern-Simons Theorie), Chemie, Molekularbiologie,...
- ▶ Gibt es einen 'wirklich verknoteten' Knoten, der Jones-Polynom = 1 hat?

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.
- ▶ Knotentheorie ist ein Teilgebiet der sogenannten Topologie, die geometrische Gebilde bis auf stetige Deformationen untersucht.
- ▶ Knotentheorie hat Anwendungen in der (hyperbolischen) Geometrie, in der topologische Quantenfeldtheorie (Chern-Simons Theorie), Chemie, Molekularbiologie,...
- ▶ Gibt es einen 'wirklich verknoteten' Knoten, der Jones-Polynom = 1 hat? Wir wissen es noch nicht!

Knotentheorie

- ▶ Jones hat für diese Entdeckung 1990 die Fields-Medaille bekommen.
- ▶ Knotentheorie ist ein Teilgebiet der sogenannten Topologie, die geometrische Gebilde bis auf stetige Deformationen untersucht.
- ▶ Knotentheorie hat Anwendungen in der (hyperbolischen) Geometrie, in der topologische Quantenfeldtheorie (Chern-Simons Theorie), Chemie, Molekularbiologie,...
- ▶ Gibt es einen 'wirklich verknoteten' Knoten, der Jones-Polynom = 1 hat? Wir wissen es noch nicht! Lässt man mehrere Komponenten zu, d. h. untersucht man sogenannte Verschlingungen, so ist dies (leider) wahr: Morwen Thistlethwaite, *Links with trivial Jones polynomial*, J. Knot Theory Ramifications 10 (2001), no. 4, 641–643.