Symmetrien von Nullstellen

Birgit Richter

Absolvent:innenfeier Sommersemester 2025

Gleichungen zweiten Grades

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Immer?

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Immer?
Reelle Lösungen gibt es, falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist.

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Immer?
Reelle Lösungen gibt es, falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist.
Was ist zum Beispiel mit $x^2 + 1 = 0$?

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Immer?
Reelle Lösungen gibt es, falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist.
Was ist zum Beispiel mit $x^2 + 1 = 0$? Dafür müßte es ein x geben mit $x^2 = -1$.

Gleichungen zweiten Grades

Sind quadratische Gleichungen immer lösbar?
Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

hat die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

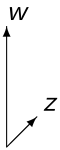
Immer?
Reelle Lösungen gibt es, falls $\frac{p^2}{4} - q \geq 0$ ist.
Was ist zum Beispiel mit $x^2 + 1 = 0$? Dafür müßte es ein x geben mit $x^2 = -1$.
Gibt es! Wir erweitern den Zahlbereich und rechnen mit der Zahlenebene, mit den sogenannten komplexen Zahlen.

Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:

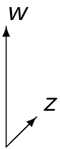
Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



Komplexe Zahlen

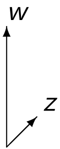
Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



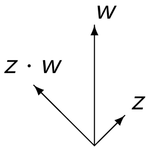
Wir multiplizieren z und w, indem wir die Winkel addieren und die Längen multiplizieren.

Komplexe Zahlen

Es seien z und w zwei Elemente in der Zahlenebene:



Wir multiplizieren z und w, indem wir die Winkel addieren und die Längen multiplizieren.



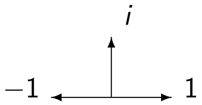
Die imaginäre Einheit

Die imaginäre Einheit

Wir setzen $i = (0, 1)$.

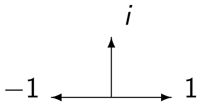
Die imaginäre Einheit

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Die imaginäre Einheit

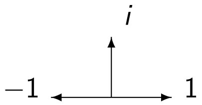
Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad.

Die imaginäre Einheit

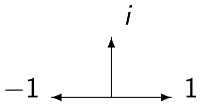
Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$.

Die imaginäre Einheit

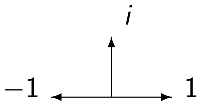
Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$. Durch das Hinzunehmen von i sind *alle* reellen quadratischen Gleichungen in den komplexen Zahlen lösbar.

Die imaginäre Einheit

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:

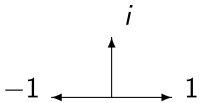


Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$. Durch das Hinzunehmen von i sind *alle* reellen quadratischen Gleichungen in den komplexen Zahlen lösbar. Die Lösungsformel für $x^2 + px + q$ ist wiederum

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die imaginäre Einheit

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$. Durch das Hinzunehmen von i sind *alle* reellen quadratischen Gleichungen in den komplexen Zahlen lösbar. Die Lösungsformel für $x^2 + px + q$ ist wiederum

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

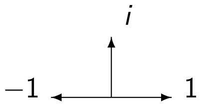
Damit finden wir sogar für *jede* Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

genau n Lösungen, falls die a_i reelle Zahlen sind.

Die imaginäre Einheit

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die Länge von i ist 1 und der Winkel entspricht 90 Grad:



Multiplizieren wir i mit sich selbst, so erhalten wir ein Element der Länge 1 und mit einem Winkel von 180 Grad. Damit ist $i^2 = -1$.
Durch das Hinzunehmen von i sind *alle* reellen quadratischen Gleichungen in den komplexen Zahlen lösbar. Die Lösungsformel für $x^2 + px + q$ ist wiederum

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Damit finden wir sogar für *jede* Gleichung

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

genau n Lösungen, falls die a_i reelle Zahlen sind.
Wie liegen die Nullstellen in der Ebene?

Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$.

Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$. Das ist $(x-2)^2$, hat also $x = 2$ als doppelte Nullstelle.

Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$. Das ist $(x-2)^2$, hat also $x = 2$ als doppelte Nullstelle.
Was passiert, wenn wir die Konstante größer machen, also z.B. die Gleichung $x^2 - 4x + 5$ betrachten?

Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$. Das ist $(x-2)^2$, hat also $x = 2$ als doppelte Nullstelle.
Was passiert, wenn wir die Konstante größer machen, also z.B. die Gleichung $x^2 - 4x + 5$ betrachten? Diese Gleichung hat keine reellen Lösung; der zugehörige Graph der Funktion, eine Parabel, schwebt über der reellen Achse.

Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$. Das ist $(x - 2)^2$, hat also $x = 2$ als doppelte Nullstelle.
Was passiert, wenn wir die Konstante größer machen, also z.B. die Gleichung $x^2 - 4x + 5$ betrachten? Diese Gleichung hat keine reellen Lösung; der zugehörige Graph der Funktion, eine Parabel, schwebt über der reellen Achse.
Es gibt aber komplexe Nullstellen $x = 2 \pm i$, weil

$$(x-(2+i))(x-(2-i)) = x^2-(2+i+2-i)x+(2+i)(2-i) = x^2-4x+5$$

ist.

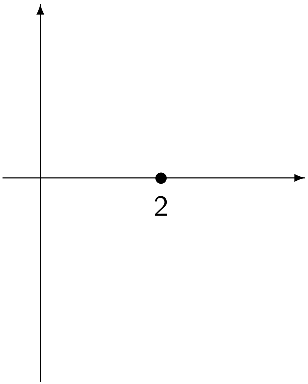
Als Beispiel betrachten wir $x^2 - 4x + 4$. Das ist $(x-2)^2$, hat also $x = 2$ als doppelte Nullstelle.
Was passiert, wenn wir die Konstante größer machen, also z.B. die Gleichung $x^2 - 4x + 5$ betrachten? Diese Gleichung hat keine reellen Lösung; der zugehörige Graph der Funktion, eine Parabel, schwebt über der reellen Achse.
Es gibt aber komplexe Nullstellen $x = 2 \pm i$, weil

$$(x-(2+i))(x-(2-i)) = x^2-(2+i+2-i)x+(2+i)(2-i) = x^2-4x+5$$

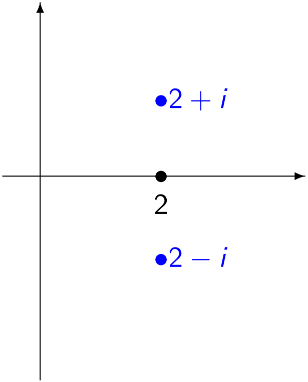
ist.
Machen wir jetzt die Konstante immer größer, so erhalten wir für $x^2 - 4x + n$ die Nullstellen

n	4	5	6	8
	2	$2 \pm i$	$2 \pm \sqrt{2}i$	$2 \pm 2i$

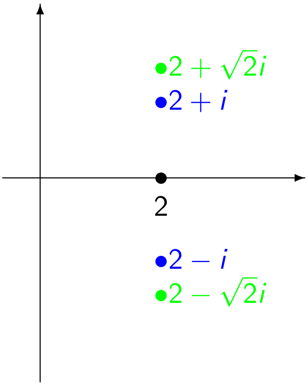
Die Nullstellen klettern also vertikal nach oben und unten



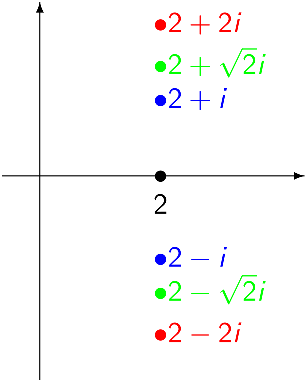
Die Nullstellen klettern also vertikal nach oben und unten



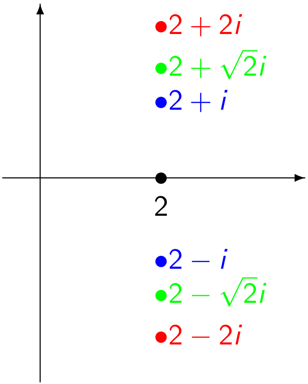
Die Nullstellen klettern also vertikal nach oben und unten



Die Nullstellen klettern also vertikal nach oben und unten



Die Nullstellen klettern also vertikal nach oben und unten



und sie liegen jeweils symmetrisch zur x-Achse.

Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$

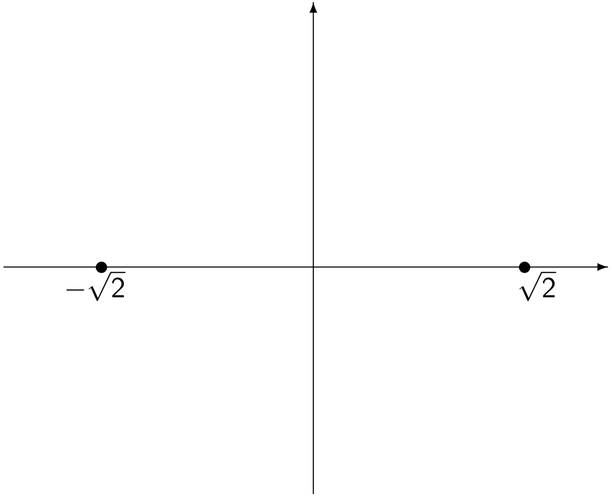
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$

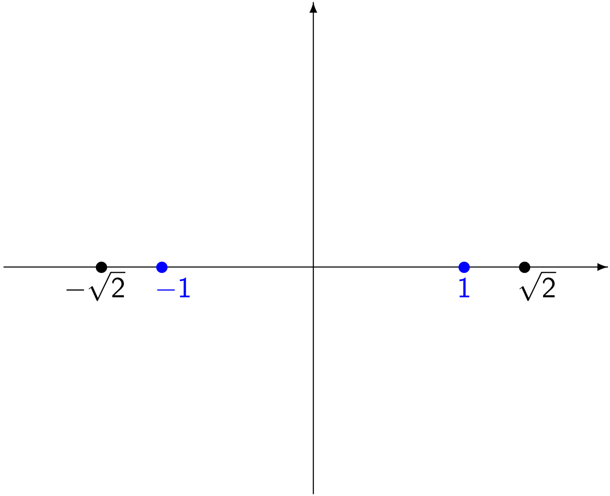
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



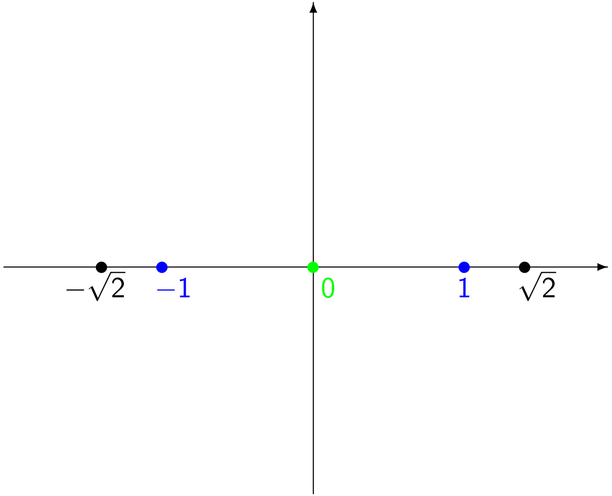
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



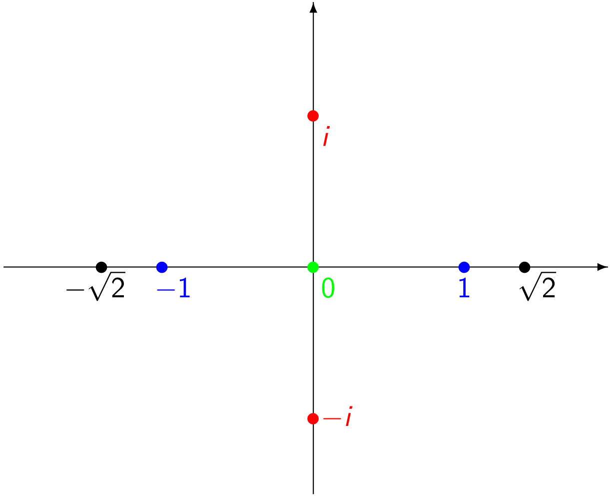
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



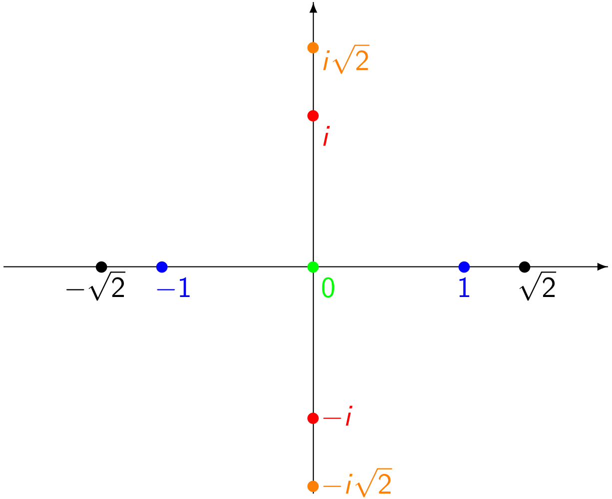
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



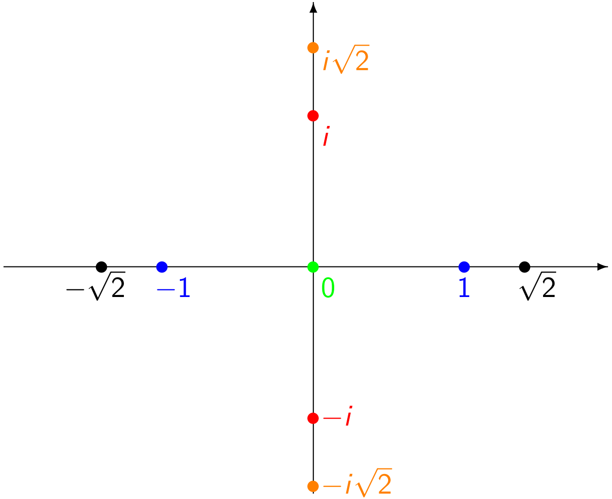
Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



Wiederholen wir die Prozedur für die quadratische Gleichung $x^2 - n = 0$, so haben wir für $n \geq 0$ die reellen Lösungen $\pm\sqrt{n}$ und für $n < 0$ die Lösungen $\pm i\sqrt{n}$:

n	2	1	0	-1	-2
	$\pm\sqrt{2}$	± 1	0	$\pm i$	$\pm i\sqrt{2}$



Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades?

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades? Bis Grad 4 können wir immer Wurzelausdrücke dazunehmen.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades? Bis Grad 4 können wir immer Wurzelausdrücke dazunehmen.
Grad 3: $x^3 + px + q = 0$.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades? Bis Grad 4 können wir immer Wurzelausdrücke dazunehmen.
Grad 3: $x^3 + px + q = 0$.

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ist eine Lösung.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades? Bis Grad 4 können wir immer Wurzelausdrücke dazunehmen.
Grad 3: $x^3 + px + q = 0$.

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ist eine Lösung. Hierbei muss man die dritten Wurzeln so wählen, dass das Produkt $-p/3$ ergibt.

Oft starten wir allerdings mit Gleichungen, die nur rationale Koeffizienten haben, und wir möchten nur so wenig wir nötig dazu nehmen.
Machen wir das mit $x^2 + 2 = 0$, so brauchen wir als neue Elemente $x_{1/2} = \pm\sqrt{2}i$. Weder i noch $\sqrt{2}$ sind rationale Zahlen. Wir nehmen aber nur ihr Produkt dazu.
Was passiert bei Gleichungen höheren Grades? Bis Grad 4 können wir immer Wurzelausdrücke dazunehmen.
Grad 3: $x^3 + px + q = 0$.

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ist eine Lösung. Hierbei muss man die dritten Wurzeln so wählen, dass das Produkt $-p/3$ ergibt.
Dies ist die Cardanosche Formel nach Girolamo Cardano (1501-1576).

Was passiert bei $x^5 + 4x^4 - 2 = 0$?

Was passiert bei $x^5 + 4x^4 - 2 = 0$?
Diese Gleichung hat ganzzahlige Koeffizienten und wir betrachten sie als Gleichung über den rationalen Zahlen.

Was passiert bei $x^5 + 4x^4 - 2 = 0$?
Diese Gleichung hat ganzzahlige Koeffizienten und wir betrachten sie als Gleichung über den rationalen Zahlen.
Wir konstruieren das kleinste algebraische Gebilde, welches die rationalen Zahlen enthält und die Nullstellen der Gleichung und welches unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.

Was passiert bei $x^5 + 4x^4 - 2 = 0$?
Diese Gleichung hat ganzzahlige Koeffizienten und wir betrachten sie als Gleichung über den rationalen Zahlen.
Wir konstruieren das kleinste algebraische Gebilde, welches die rationalen Zahlen enthält und die Nullstellen der Gleichung und welches unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.
Hier gibt es *keine* Lösungen durch (iterierte) Wurzelausdrücke!

Was passiert bei $x^5 + 4x^4 - 2 = 0$?
Diese Gleichung hat ganzzahlige Koeffizienten und wir betrachten sie als Gleichung über den rationalen Zahlen.
Wir konstruieren das kleinste algebraische Gebilde, welches die rationalen Zahlen enthält und die Nullstellen der Gleichung und welches unter $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist.
Hier gibt es *keine* Lösungen durch (iterierte) Wurzelausdrücke!
Die Symmetriegruppe dieses Gebildes entspricht der Symmetriegruppe des Ikosaeders und hat $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ Elemente!

Mathematischer Hintergrund

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?

Heute: Zweig der Galoistheorie

Évariste Galois (1811-1832), Bild: Wikipedia.

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?

Heute: Zweig der Galoistheorie

Évariste Galois (1811-1832), Bild: Wikipedia.

Dass hierbei nicht einfach immer nur Wurzelausdrücke vorkommen können, ist der Satz von Abel-Ruffini:

Mathematischer Hintergrund

Systematische Untersuchung: Wie konstruiere ich Lösungen?

Heute: Zweig der Galoistheorie

Évariste Galois (1811-1832), Bild: Wikipedia.

Dass hierbei nicht einfach immer nur Wurzelausdrücke vorkommen können, ist der Satz von Abel-Ruffini:

(Bilder: Wikipedia)

Niles Henrik Abel (1802-1829)

Paolo Ruffini (1765-1822).