Seminar zur Topologie (Bachelor) **Sommersemester 2024**

Prof. Dr. B. Richter

Dieses Seminar baut auf der Vorlesung Topologie (Bachelor) im Wintersemester 2023/24 auf. Wir beschäftigen uns mit höheren Homotopiegruppen und mit Faserungen. Überlagerungen sind Beispiele von Faserungen. Wir untersuchen Eigenschaften dieser Abbildungen und viele Beispiele.

Zu jedem Vortrag habe ich Literatur angegeben. Falls Sie mit der angegebenen Literatur nicht zurecht kommen, schauen Sie bitte in die anderen angegeben Quellen; ggf. kann ich Ihnen alternative Literatur angeben.

Konzipieren Sie einen 80-minütigen Vortrag und eine 10-minütige Übungsphase, in der Sie den vorgetragenen Stoff mit den TeilnehmerInnen anhand von Beispielen vertiefen. Bitte geben Sie mir zwei Wochen vor Ihrem Vortrag eine Ausarbeitung ab. Die kann notfalls handschriftlich sein, aber Sie könnten die Gelegenheit natürlich auch dazu nutzen, um LaTeX zu lernen.

Vorträge

(1) **Höhere Homotopiegruppen I** Definieren Sie die Gruppen $\pi_n(X, x_0)$. Warum sind diese Gruppen abelsch für $n \geq 2$? Zeigen Sie, dass jede Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ einen Isomorphismus auf höheren Homotopiegruppen induziert. Definieren Sie die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen [H, §4.1 bis inkl. Proposition 4.2]).

(2) **Höhere Homotopiegruppen II** Definieren Sie die höheren relativen Homotopiegruppen für ein $x_0 \in A \subset X$, $\pi_n(X, A, x_0)$. Definieren Sie, was eine lange exakte Sequenz von Gruppen ist und zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz gibt

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots$$

für jedes Paar (X, A) und jedes $x_0 \in A$ ([H, pp.343–346]).

(3) **Faserungen** Wiederholen Sie die Definition einer Faserung und behandeln Sie Beispiele für Faserungen. Zeigen Sie, dass man Faserungen mittels stetiger Abbildung zurückziehen kann [H, p. 375], [M, Kapitel 7 §1]. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Serre Faserung und einer Hurewicz Faserung und zeigen Sie, dass die Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE) für Scheiben $\mathbb{D}^n$ äquivalent ist zu der HHE für $(\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n)$ [H, p. 376].

(4) **Schleifenräume** Definieren Sie, was der Schleifenraum ΩX eines Raumes X mit gewähltem Grundpunkt $x_0 \in X$ ist. Wiederholen Sie dazu die kompakt-offene Topologie ([H, p. 395], evtl. [H, Appendix, pp. 529 ff.] für die kompakt-offene Topolgie).

Was ist die Schleifen-Wege-Faserung? [H, p. 407]. Was können Sie über die Homotopiegruppen von ΩX sagen ([H, p. 395])? Wiederholen Sie dazu das Exponentialgesetz für Abbildungsräume und wenden Sie dieses auf $C((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) = C((\mathbb{S}^1 \wedge X, x_0), (Y, y_0))$ an. Was sind konkret die Homotopiegruppen von $\Omega\mathbb{C}P^\infty$ und $\Omega\mathbb{S}^1$?

(5) **Assoziierte Faserung** Sie können jede stetige Abbildung in eine Faserung umwandeln. Stellen Sie uns diese Konstruktion vor und zeigen Sie, dass sich nicht viel ändert, wenn die Ausgangsabbildung schon eine Faserung war ([H, 4.64–4.66 und evtl. einiges an Hintergrund und Beispielen], [M, Kapitel 7, §3]).

(6) **Die lange exakte Homotopie-Sequenz einer Faserung** Zeigen Sie, dass jede Faserung $p\colon E \to B$ (für einen wegzusammenhängenden Raum B) eine lange exakte Sequenz auf Homotopiegruppen ergibt ([H, 4.41]):

$$\ldots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots$$

(7) **Die Hopf-Faserungen** Stellen Sie uns die Hopf-Faserungen vor. Im Fall der ersten Hopf-Faserung $S^1 \to S^3 \to S^2$ veranschaulichen Sie bitte die Abbildung und die Fasern ([H, Beispiele 4.45, 4.46,4.47]). Wiederholen Sie dazu den Schiefkörper der Quaternionen und die Cayleyzahlen (Oktonionen) aus [E].

(8) **H-Räume** Topologische Räume mit einer Verknüpfung haben spezielle Eigenschaften, die die Struktur zum Beispiel der Homotopiegruppen vereinfacht. Definieren Sie, was H-Räume sind [B, VII.3] und zeigen Sie damit, dass die Fundamentalgruppe von H-Räumen abelsch ist und stellen Sie uns Beispiele vor: Schleifenräume, topologische Gruppen, $\mathbb{C}P^\infty$, S^0, S^1, S^3 und S^7 [H, Anfang von 3.C].

(9) **Beispiele** Stellen Sie uns weitere Beispiele für die Berechnung von Homotopiegruppen vor für projektive Räume, für die Einheits-Tangentialbündel von Sphären und für spezielle orthogonale Gruppen vor ([SZ, 17.3])

(10) **Konfigurationsräume** Wir hatten Konfigurationsräume schon in den Übungen kennengelernt. Stellen Sie uns berühmte Faserungen für Konfigurationsräume vor, mit denen sich einiges über die Homotopiegruppen dieser und verwandter Räume aussagen lässt [KT, §1.4 bis Lemma 1.28]. (Es reicht, wenn Sie den Fall betrachten, bei dem M ein euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ ist.)

(11) **Simpliziale Objekte** Simpliziale Mengen erlauben es, kombinatorische Modelle topologischer Räume anzugeben. Erklären Sie uns kurz, was Kategorien und Funktoren sind [R, Teile aus 1.1,1.4]. Beschreiben Sie die Kategorie Δ der endlichen geordneten Mengen $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ für $n \geq 0$ und ordnungserhaltenden Abbildungen. Die Morphismen in dieser Kategorie lassen sich durch Bausteine explizit beschreiben. Erklären Sie uns, was simpliziale Objekte in einer Kategorie sind und definieren Sie die geometrische Realisierung einer simplizialen Menge bzw. eines simplizialen topologischen Raumes [R, 10.1,10.2,10.6].

(12) **Klassifizierende Räume und Eilenberg-MacLane Räume** Für eine beliebige topologische Gruppe G kann man mit Hilfe simplizialer Methoden einen topologischen Raum BG konstruieren, so dass $\pi_n BG \cong \pi_{n-1} G$ gilt für $n \geq 1$. Dies ist der klassifizierende Raum der Gruppe. Ist G eine diskrete Gruppe, so erhalten wir einen Raum BG mit $\pi_1(BG) \cong G$ und $\pi_n BG \cong 0$ für $n \neq 1$. Ist G abelsch, so ist BG eine abelsche topologische Gruppe und man kann die Konstruktion iterieren und erhält einen Raum $K(G, n)$ mit

$$\pi_i K(G, n) \cong \begin{cases} G, & i = n, \\ 0, & i \neq n. \end{cases}$$

Dies ist ein Eilenberg-MacLane Raum vom Typ (G, n). Stellen Sie uns die Konstruktion dieser Räume vor und leiten Sie diese Eigenschaften her [M, Kapitel 16, §5].

Literatur

[B] Glen E. Bredon, *Topology and Geometry*, Grad. Texts in Math., 139, Springer-Verlag, New York, 1997, xiv+557 pp.

[E] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert *Zahlen*, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1983. xii+291 pp.

[H] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002), xii+544 pp.
Erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[KT] Christian Kassel, Vladimir Turaev, *Braid groups*, Graduate Texts in Mathematics, 247, Springer, New York, 2008. xii+340 pp.

[M] J. Peter May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL (1999), x+243 pp.

[R] Birgit Richter, *From categories to homotopy theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., 188 Cambridge University Press, Cambridge, 2020, x+390 pp.
Erhältlich auf `https://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/catbook.html`

[SZ] Ralph Stöcker, Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, Eine Einführung, Zweite Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, xii+485 pp.