Seminar zur Topologie (Bachelor) **Sommersemester 2019**

Prof. Dr. B. Richter

Dieses Seminar baut auf der Vorlesung Topologie (Bachelor) im Wintersemester 2018/19 auf. Wir beschäftigen uns mit der wichtigen Klasse von Abbildungen, die Faserungen genannt werden. Überlagerungen sind Beispiele von Faserungen. Wir untersuchen Eigenschaften dieser Abbildungen und viele Beispiele.

Falls Sie mit der angegebenen Literatur nicht zurecht kommen, schauen Sie bitte in die anderen angegeben Quellen; ggf. kann ich Ihnen alternative Literatur angeben.

Konzipieren Sie einen 80-minütigen Vortrag und eine 10-minütige Übungsphase, in der Sie den vorgetragenen Stoff mit den TeilnehmerInnen anhand von Beispielen vertiefen. Bitte geben Sie mir zwei Wochen vor Ihrem Vortrag eine Ausarbeitung ab.

Vorträge

(1) **Klassifikationssatz für Überlagerungen** Sie kennen den Satz aus der Vorlesung. Wiederholen Sie ihn bitte mit Beweis und stellen Sie uns Beispiele vor ([SZ, §6.6] mit Hintergrund aus [SZ, §6.5]).

(2) **Endlich-blättrige Überlagerungen** Überlagerungen mit endlicher Faser lassen sich sehr konkret beschreiben. Stellen Sie uns das Klassifikationsresultat vor und behandeln Sie (mindestens) die Beispiele der 2-blättrigen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ [SZ, §6.7].

(3) **Zopfgruppen** Sie kennen die symmetrischen Gruppen. Stellen Sie uns die Zopfgruppen vor, zum einen in der geometrischen Beschreibung und dann mittels Erzeugern und Relationen. Behandeln Sie die Beziehung zu den symmetrischen Gruppen und definieren Sie die sogenannten reinen Zopfgruppen. Machen Sie explizit, was Zopfgruppen auf 1, 2 und 3 Strängen sind ([KT, Kapitel 1 bis inkl. 1.2.1 und 1.3.1]).

(4) **Konfigurationsräume** Definieren Sie, was der geordnete ($F_n(X)$) und der ungeordnete Konfigurationsraum ($C_n(X)$) von n Punkten in einem topologischen Raum X ist und identifizieren Sie die Fundamentalgruppe mit der reinen bzw der allgemeinen Zopfgruppe auf n Strängen. Erklären Sie uns, was $C_n(\mathbb{R}^2)$ mit Polyomen zu tun hat (Auszüge aus [KT, §1.4]).

(5) **Höhere Homotopiegruppen I** Definieren Sie die Gruppen $\pi_n(X, x_0)$. Warum sind diese Gruppen abelsch für $n \geq 2$? Zeigen Sie, dass jede Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ einen Isomorphismus auf höheren Homotopiegruppen induziert. Definieren Sie die Operation der Fundamentalgruppe auf den höheren Homotopiegruppen [H, §4.1 bis inkl. Proposition 4.2]).

(6) **Höhere Homotopiegruppen II** Definieren Sie die höheren relativen Homotopiegruppen für ein $x_0 \in A \subset X$, $\pi_n(X, A, x_0)$. Definieren Sie, was eine lange exakte Sequenz von Gruppen ist und zeigen Sie, dass es eine lange exakte Sequenz gibt

$$\ldots \to \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0) \to \ldots$$

für jedes Paar (X, A) und jedes $x_0 \in A$ ([H, pp.343–346]).

(7,8) **Faserungen I und II** Wiederholen Sie die Definition einer Faserung. Zeigen Sie, dass man Faserungen mittels einer stetigen Abbildung "zurückziehen" kann. Erklären Sie den Unterschied zwischen einer Serre Faserung und einer Hurewicz Faserung.

Zeigen Sie, dass die Homotopiehochhebungseigenschaft (HHE) für Scheiben $\mathbb{D}^n$ äquivalent is zu der HHE für $(\mathbb{D}^n, \partial\mathbb{D}^n)$.

Definieren Sie, was der Schleifenraum ΩX eines Raumes X mit gewähltem Grundpunkt $x_0 \in X$. Wiederholen Sie dazu die kompakt-offene Topologie.

Was ist die Schleifen-Wege-Faserung? Was können Sie über die Homotopiegruppen von ΩX sagen? Wiederholen Sie dazu das "Exponentialgesetz" für Abbildungsräume und wenden Sie dieses auf $C((\Sigma X, x_0), (Y, y_0)) = C((\mathbb{S}^1 \wedge X, x_0), (Y, y_0))$ an ([H, pp. 375,395,], [M, Chapter 7 §1, §2]; evtl [H, Appendix, pp. 529 ff.] für die kompakt-offene Topolgie).

(9) **Die lange exakte Homotopie-Sequenz einer Faserung** Zeigen Sie, dass jede Faserung $p\colon E \to B$ (für einen wegzusammenhängenden Raum B) eine lange exakte Sequenz auf Homotopiegruppen ergibt:

$$\ldots \to \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0) \to \ldots$$

(10) **Beispiele** Stellen Sie uns weitere Beispiele für die Berechnung von Homotopiegruppen vor für projektive Räume, für die Einheits-Tangentialbündel von Sphären und für spezielle orthogonale Gruppen vor ([SZ, 17.3])

(11) **Assoziierte Faserung** Sie können jede stetige Abbildung in eine Faserung umwandeln. Stellen Sie uns diese Konstruktion vor und zeigen Sie, dass sie nicht viel ändert, wenn die Ausgangsabbildung schon eine Faserung war ([H, 4.64–4.66 und evtl. einiges an Hintergrund und Beispielen], [M, Chapter 7, §3]).

(12) **Die Hopf-Faserungen** Stellen Sie uns die Hopf-Faserungen vor. Im Fall der ersten Hopf-Faserung $S^1 \to S^3 \to S^2$ veranschaulichen Sie bitte die Abbildung und die Fasern ([H, Beispiele 4.45, 4.46,4.47]). Wiederholen Sie dazu den Schiefkörper der Quaternionen und die Cayleyzahlen (Oktonionen) aus [E].

Literatur

[E] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, R. Remmert *Zahlen*, Grundwissen Mathematik, Springer-Verlag, Berlin, 1983. xii+291 pp.

[H] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press (2002), xii, 544 p.
Erhältlich auf `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[KT] Christian Kassel, Vladimir Turaev, *Braid groups*, Graduate Texts in Mathematics, 247, Springer, New York, 2008. xii+340 pp.

[M] J. Peter May, *A concise course in Algebraic Topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL (1999), x+243 pp.

[SZ] Ralph Stöcker, Heiner Zieschang, *Algebraische Topologie*, Eine Einführung, Zweite Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1994, xii+485 pp.