Wintersemester 05/06

Seminar zur Topologie

Formale Gruppengesetze

Prof. Dr. Birgit Richter

(1) **Einführung in formale Gruppengesetze.** Zunächst werden einige elementare Fakten über Potenzreihenringe wiederholt [Fr, I §1, Einleitung und Theorem 2]. Die Definition eines eindimensionalen kommutativen formalen Gruppengesetzes wird vorgestellt und elementare Beispiele wie das additive und multiplikative Gruppengesetz behandelt. Die Existenz eines Inversen wird bewiesen, d.h. einer Potenzreihe $i(x)$ zu F mit $F(x, i(x)) = 0$. Um formale Gruppengesetze vergleichen zu können, wird der Begriff eines Morphismus eingeführt. [Fr, I,§3, S. 22,23], [Ra, pp.339,340]

(2) **Logarithmen.** Dieser Vortrag soll das Studium von Morphismen formaler Gruppengesetze vertiefen. Stellen Sie die Pozenzreihe $[n]_F(x)$ vor und die etwas verallgemeinerte Form [Ra, A2.1.19, A2.1.20].

Im weiteren hat der Vortrag formale Gruppengesetze zum Thema, deren Grundring eine $\mathbb{Q}$-Algebra ist. Es soll die Existenz von sogenannten Logarithmen gezeigt werden; dies sind Isomorphismen eines formalen Gruppengesetzes zum additiven formalen Gruppengesetz.

(3) **Elliptische Kurven I.** Dieser Vortrag liefert eine allgemeine Einführung in das Gebiet. Als Einführung kann man Teile aus [Hu, Introduction] lesen (insbesondere §4 und §5). Der eigentliche Inhalt des Vortrags sollte [Si, III §1, bis p.52 Mitte] umfassen. Da Silvermans Buch etwas kurz gehalten ist, empfiehlt es sich parallel in Knapps Buch die Abschnitte [Kn, pp.19/20, 25-27, 42, 56-58, 63] anzuschauen.

Zunächst sollten kurz einige Fakten aus der projektive Geometrie zusammengestellt werden. Die Definition einer elliptischen Kurve über die Weierstrassform sollte aus Knapp [Kn, p.42] übernommen werden. Das Kriterium für die Nichtsingularität einer elliptischen Kurve [Kn, Theorem 3.2] soll hergeleitet werden.

(4) **Elliptische Kurven II.** Für Definitionen und die Beschreibung der Gruppenstruktur bieten sich [Kn, III §3] und [Si, III §2-4] an. Beweisen Sie *nicht* das Assoziativgesetz der Verknüpfung. Der benötigte Hintergrund aus der Schnitttheorie findet sich in [Kn, II, Proposition 2.15].

(5) **Formale Gruppengesetze elliptischer Kurven.** Leiten Sie das formale Gruppengesetz einer elliptischen Kurve her [Si, IV, §1]. Dazu parametrisiert man die Weierstrass Gleichung um und setzt rekursiv die definierende Gleichung der Kurve ein. Technischer Hintergrund ist das Henselsche Lemma.

(6) **Verallgemeinerte Homologietheorien.** Definieren Sie, was eine verallgemeinerte Homologietheorie bzw. Kohomologietheorie, d.h. stellen Sie uns

die Eilenberg-Steenrod-Axiome einer solchen Theorie vor [Ha, §2.3, p.160-162]. Behandeln Sie als Beispiele singuläre Homologie und K-Theorie [May, pp.199-201].

(7) **Komplexer Kobordismus.** Erklären Sie zunächst das allgemeine Konzept von Kobordismen. [May, p.215]. Erläutern Sie, was stabil-komplexe Mannigfaltigkeiten sind und definieren Sie die (Ko)Homologietheorie des komplexen Kobordismus [Ra2, pp. 25,26].[Sw, pp.218-227]. Erläutern Sie uns, was MU_* ist.

(8) **Lazards Theorem.** Es ist einfach zu beweisen, dass es ein universelles formales Gruppengesetz gibt, d.h. einen Ring L und ein formales Gruppengesetz F_u über L, so dass jedes andere formale Gruppengesetz über einem Ring R durch einen Ringhomomorphismus $\theta : L \to R$ induziert ist [Ra, A2.1.8]. Schwieriger ist es, den Ring L explizit zu identifizieren: Das ist genau der Inhalt von Lazards Theorem [Ra, pp.342,343, 350,351]. Führen Sie den Beweis, indem Sie [Ra, A2.1.12] zumindest im torsionsfreien Fall beweisen.

(9) a),b) **Höhen formaler Gruppengesetze.** Definieren Sie die Höhe eines formalen Gruppengesetzes über einem Körper der Charakteristik p und behandeln Sie die Inhalte aus [Ra, pp.354,355]. Berichten Sie insbesondere über [Si, Corollary 7.5], das besagt, dass für formale Gruppengesetze, die von elliptischen Kurven stammen, nur die Höhen 1 oder 2 vorkommen. Skizzieren Sie einen Beweis für Lazards Theorem über formale Gruppengesetz über separabel abgeschlossene Körpern endlicher Charakteristik. Dazu brauchen Sie Hintergrundwissen über sogenannte p-typische formale Gruppengesetze, das Sie in [Ra, A2.1] finden.

Diesen Vortrag können wir zu einem Doppelvortrag ausbauen, indem man das Thema der p-typischen formalen Gruppengesetze im ersten Teil ausführlich behandelt und im zweiten Vortrag darauf aufbaut. Wenn Zeit ist könnte uns dann der zweite Vortragende einen knappen Überblick über Isogenien geben und einen Beweis von [Si, Corollary 7.5] skizzieren. Das Material dafür finden Sie in [Si, §7].

(10) **Landwebers Theorem.** Für einen Ringhomomorphismus $\varphi : MU_* \to E_*$ kann man sich fragen, wann die Abbildung, die einem Raum X den Wert $E_* \otimes_{MU_*} MU_*(X)$ zuweist, wieder eine Homologietheorie ergibt. Erläutern Sie, an welcher Stelle Probleme auftreten können [Ra2, pp.172–174], beweisen Sie die für $E_* \otimes_{MU_*} MU_*(X)$ unproblematischen Axiome für eine Homologietheorie, formulieren und erläutern Sie Landwebers Theorem [La].

(11) a), b) **Elliptische Kohomologie.** Wir hatten gesehen, dass elliptische Kurven in natürlicher Weise zu formalen Gruppengesetzen führen. Die sogenannten Eulerschen formalen Gruppengesetzen zu Parametern δ, ε gehören zu Jacobi-Quartiken. Sie liefern eine Familie von Homologietheorien, die elliptischen Homologietheorien. Referieren Sie über Jens Frankes Nachweis des Landweber Kriteriums für diese Fälle [Fra, §2].

Diesen Vortrag könnten wir zu einem Doppelvortrag ausweiten, wenn in einem ersten Teil hergeleitet wird, dass die Potenzreihe zu den Jacobi-Quartiken den Axiomen eines formalen Gruppengesetzes genügt.

Literatur

[Fra] J. Franke, On the Construction of Elliptic Cohomology, Mathematische Nachrichten 158, 1992, pp.43–65

[Fr] A. Fröhlich, Formal Groups, Lecture Notes in Mathematics Vol. 74, 1968

[Ha] Allen Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge University Press 2002. Eine online-Version ist auf http://www.math.cornell.edu/ hatcher/AT/ATpage.html zu finden.

[Hu] Dale Husemoller, Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 111, Springer, 2nd ed., 2004

[Kn] Anthony W. Knapp, Elliptic Curves, Princeton University Press, 1992

[La] P. S. Landweber, Homological properties of comodules over MU_*MU and BP_*BP, American Journal of Mathematics 98, 1976, pp.591–610

[May] J. P. May, A concise course in algebraic topology, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1999

[Ra] Douglas C. Ravenel, Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres, AMS-Chelsea, 2004. Eine online Version ist auf `http://www.math.rochester.edu/people/faculty/drav/mu.html#repub` erhältlich.

[Ra2] Douglas C. Ravenel, Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory, Annals of Mathematics Studies 128, Princeton University Press, 1992

[Si] Joseph H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 106, Springer, 1986

[Sw] Robert M. Switzer, Algebraic Topology – Homology and Homotopy, Classics in Mathematics, Springer 2002