

Vorlesungsnotizen Mathematik 2
für den Lehramtsstudiengang Sekundarstufe,
Sommersemester 2022

Birgit Richter, Version vom 13. September 2023

FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT HAMBURG, BUNDESSTRASSE 55, 20146 HAMBURG

Inhaltsverzeichnis

Kapitel IV. Reelle und komplexe Zahlen	5
IV.1. Komplexe Zahlen (Wiederholung)	5
IV.2. Endliche Summen und Produkte	8
IV.3. Grundlegende Kombinatorik	11
Kapitel V. Grenzwerte und Konvergenz bei Folgen und Reihen, Grundfunktionen	19
V.1. Grenzwerte von Folgen	19
V.2. Allgemeine Wurzeln, Potenzen und Logarithmen	27
V.3. Kreiszahl und Kreisfunktionen	33
V.4. Häufungspunkte und Teilfolgen	41
V.5. Konvergenz von Reihen	43
V.6. Funktionenfolgen und Potenzreihen	52
Kapitel VI. Vektorräume und lineare Abbildungen	61
VI.1. Vektorräume und Untervektorräume	61
VI.2. Basen von Vektorräumen und der Dimensionsbegriff	67
VI.3. Matrizen und lineare Abbildungen	75
VI.4. Determinanten	85
VI.5. Lineare Gleichungssysteme und Elementaroperationen	92
Literaturverzeichnis	99

Reelle und komplexe Zahlen

Wir hatten schon am Ende der Vorlesung Mathematik 1 einige Grundlagen zu komplexen Zahlen behandelt. Bitte sehen Sie sich den entsprechenden Abschnitt noch einmal an. Wir wiederholen die Grundlagen und setzen diesen Abschnitt jetzt fort:

IV.1. Komplexe Zahlen (Wiederholung)

Wir hatten den *Zahlbereich der komplexen Zahlen* mit grundlegender Menge

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$$

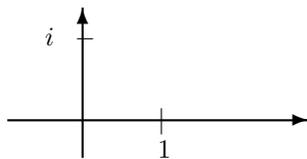
der geordneten Paare reeller Zahlen definiert. Eine komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ wird als

$$z = x + yi$$

notiert, wobei x als ihr *Realteil* $\operatorname{Re}(z)$ und y als ihr *Imaginärteil* $\operatorname{Im}(z)$ bezeichnet wird. Man identifiziert $x \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $x + 0i$ mit Imaginärteil 0 und fasst so

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

auf. Schließlich bezeichnet man $i := 0 + 1i$ als die *imaginäre Einheit* und komplexe Zahlen $yi := 0 + yi$ mit Realteil 0 als *rein imaginär*.



Für komplexe Zahlen $z = x + yi \in \mathbb{C}$ und $w = u + vi \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ ist die *Addition* durch

$$z + w := (x + u) + (y + v)i \in \mathbb{C},$$

die komponentenweise Addition und die *Multiplikation* durch

$$zw := (xu - yv) + (xv + yu)i \in \mathbb{C}$$

definiert.

Wir hatten uns überlegt, dass $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper ist, dessen Addition und Multiplikation auf dem Teilkörper \mathbb{R} mit der reellen Addition und Multiplikation übereinstimmen.

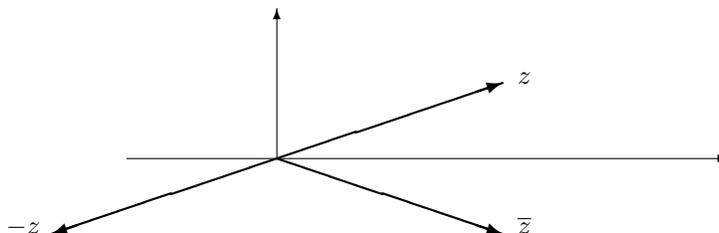
Die Gleichung $z^2 = -1$ hat in \mathbb{C} genau die Lösungen $z = i$ und $z = -i$.

Wir hatten uns weiterhin damit überlegt, wie man allgemeine quadratische Gleichungen in \mathbb{C} lösen kann.

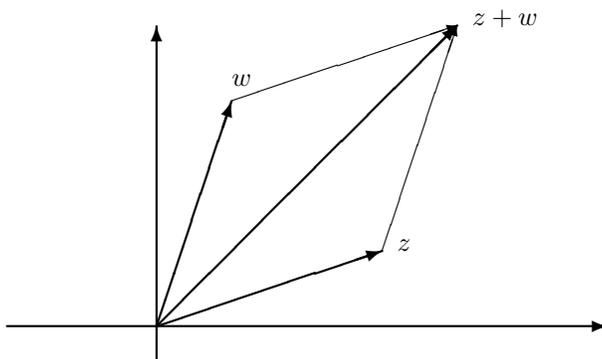
Ein Preis, den man für die Einführung der imaginären Einheit i mit $i^2 \in \mathbb{R}_{<0}$ bezahlt, ist allerdings, dass sich komplexe Zahlen nicht wie reelle Zahlen anordnen lassen, dass es also auf \mathbb{C} keine mit den Rechenoperationen verträgliche (strikte) Ordnungsrelation (also keine Standard-Versionen von $<$, $>$, \leq , \geq) gibt.

Die Formeln für die komplexe Addition und Multiplikation muss man sich nicht unbedingt merken, denn sie ergeben sich automatisch aus den Rechengesetzen in Körpern und $i^2 = -1$.

- (1) Anders als natürliche, ganze, rationale und reelle Zahlen lassen sich komplexe Zahlen *nicht* mehr auf der Zahlengerade veranschaulichen, sondern entsprechen definitionsgemäß Koordinatenpunkten in der Ebene \mathbb{R}^2 . Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Gaußschen Zahlenebene* und trägt üblicherweise die reellen Zahlen aus \mathbb{R} auf der horizontalen Achse, die rein imaginären Zahlen aus $i\mathbb{R}$ auf der vertikalen Achse auf.
- (2) Das Rechnen mit komplexen Zahlen lässt sich in der Gaußschen Zahlenebene wie folgt veranschaulichen: Das Negative, also das additiv Inverse, $-z \in \mathbb{C}$ einer komplexen Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C}$ ergibt sich durch Punktspiegelung am Ursprung und die komplex konjugierte Zahl $\bar{z} = x - yi \in \mathbb{C}$ zu z durch Spiegelung an der reellen Achse.



Die Summe $z + w = (x + u) + (y + v)i \in \mathbb{C}$ erhält man durch Vektoraddition der Ortsvektoren.



Das Produkt $zw = (xu - yv) + (xv + yu)i \in \mathbb{C}$ lässt sich in der sogenannten Polardarstellung, bei der eine komplexe Zahl durch ihren Abstand vom Ursprung und durch den Polarwinkel zwischen ihrem Ortsvektor und dem positiven Teil der reellen Achse beschrieben wird, veranschaulichen und kommt dann durch Multiplikation der Abstände und Addition der Polarwinkel zustande. Die an dieser Stelle nur ganz kurz angerissene Thematik der Polardarstellung werden wir später behandeln.

Wir hatten weiterhin den Betrag komplexer Zahlen eingeführt:

Definition IV.1.1. Die komplexe *Betragsfunktion* ist definiert als

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad |z| := \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

und es gilt: $\operatorname{Bild}(|\cdot|) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Bemerkung IV.1.2.

- Die in der Definition auftretende Quadratwurzel wird erst später präzise eingeführt, hier im Vorgriff darauf aber schon benutzt. Da $\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt, kann diese Wurzel stets in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gezogen werden.
- Für $x \in \mathbb{R}$ ergibt $\sqrt{\operatorname{Re}(x)^2 + \operatorname{Im}(x)^2} = \sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$ den früher eingeführten reellen Betrag. Daher sind die Definitionen und Notationen für reelle Zahlen konsistent.
- Ähnlich wie bei reellen Zahlen kann man auch für $z, w \in \mathbb{C}$ den Betrag $|z|$ als den Abstand von z von 0 in der Gaußschen Zahlenebene und $|z - w|$ als den Abstand von z und w in der Gaußschen Zahlenebene interpretieren. Dies ergibt sich aus dem elementargeometrischen Satz des Pythagoras.

- Für beliebige komplexe Zahlen $z, w, \zeta, z_j \in \mathbb{C}$ gelten die Positivität des Betrags

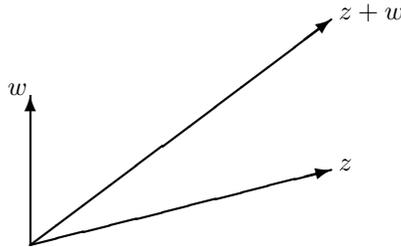
$$|z| \geq 0 \quad (\text{mit „=“ nur für } z = 0),$$

die Multiplikativität des Betrags

$$|zw| = |z||w|.$$

Insbesondere ist $|-z| = |z|$ und für $z \neq 0$ auch $|1/z| = 1/|z|$. Es gelten die Dreiecksungleichungen (mit beliebiger endlicher Indexmenge J).

$$|z \pm w| \leq |z| + |w|, \quad |z - w| \leq |z - \zeta| + |\zeta - w|, \quad \left| \sum_{j \in J} z_j \right| \leq \sum_{j \in J} |z_j|$$



und die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$||z| - |w|| \leq |z \pm w|.$$

Die Multiplikativität erhält man dabei durch direktes Nachrechnen oder als Folgerung aus der Multiplikativität der komplexen Konjugation; vergleiche mit den folgenden Bemerkungen (IV.1.1) und (IV.1.3). Beweise der Ungleichungen werden in den Übungen behandelt.

Bemerkung IV.1.3. Es seien $z, w \in \mathbb{C}$.

- Die komplexe Konjugation ist ein involutorischer, Betrag-erhaltender Körperautomorphismus:

$$(IV.1.1) \quad \bar{\bar{z}} = z, \quad |\bar{z}| = |z|, \quad \overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{1/z} = 1/\bar{z},$$

wobei die letzte Gleichung $z \neq 0$ voraussetzt. Dies rechnet man problemlos mit den Definitionen nach.

- Mit der komplexen Konjugation ergibt sich eine Charakterisierung reeller und rein imaginärer Zahlen sowie von Real- und Imaginärteil durch

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z, \quad z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Auch dies rechnet man mit den Definitionen nach.

- Die komplexe Konjugation hängt mit der komplexen Betragsfunktion durch

$$z\bar{z} = (\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)i)(\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)i) = \operatorname{Re}(z)^2 - \operatorname{Im}(z)^2 i^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2$$

zusammen. Hieraus folgt die nützliche Reziprokenformel, wobei wir $0 \neq z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ schreiben:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i,$$

die den Ansatz für das multiplikativ Inverse im vorigen Beweis erklärt und die direkte Berechnung von Reziproken und Quotienten erlaubt. Weiterhin entnimmt man aus der Reziprokenformel, dass das Reziproke $\frac{1}{z}$ einer komplexen Zahl z sich durch Spiegelung an der reellen Achse und anschließende „Inversion“ gemäß $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ an der Einheitskreislinie $\{q \in \mathbb{C} \mid |q| = 1\}$ ergibt.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei hervorgehoben, dass der entscheidende Gewinn beim Übergang von \mathbb{R} zu \mathbb{C} in der allgemeinen Lösbarkeit polynomialer Gleichungen über \mathbb{C} besteht. Genauer besagt der sogenannte *Fundamentalsatz der Algebra*, dass *jedes* Polynom vom Grad ≥ 1 in \mathbb{C} mindestens eine Nullstelle besitzt, oder mit anderen Worten, dass *jede* Gleichung

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$ mindestens eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ hat. Eng damit verbunden ist, dass für *jedes* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ in \mathbb{C} genau n verschiedene n -te Wurzeln (also Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$) existieren. Beweisen können wir diese Sachverhalte allerdings noch nicht und werden darauf erst bei der Behandlung von Stetigkeit an späterer Stelle zurückkommen.

IV.2. Endliche Summen und Produkte

Auch in den Zahlbereichen \mathbb{R} und \mathbb{C} können endliche Summen und Produkte mit Hilfe des Summenzeichens \sum beziehungsweise des Produktzeichens \prod notiert werden, und es kann mit diesen Zeichen weiterhin wie gewohnt gerechnet werden. Tatsächlich hatten wir im Abschnitt über Ringe und Körper schon bemerkt, dass Summen- und Produktzeichen sogar in jedem kommutativen Ring sinnvoll sind.

Beispiele IV.2.1. Es seien $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $k \leq \ell$, sei $n \in \mathbb{N}_0$, und \mathbb{K} sei ein Körper, beispielsweise \mathbb{R} oder \mathbb{C} .

- (1) *Teleskopsummen* sind Summen des Typs

$$\sum_{i=k}^{\ell} (a_{i+1} - a_i) = a_{\ell+1} - a_k \text{ für } a_k, a_{k+1}, \dots, a_{\ell}, a_{\ell+1} \in \mathbb{K},$$

und *Teleskopprodukte* sind Produkte des Typs

$$\prod_{i=k}^{\ell} \frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{a_{\ell+1}}{a_k} \text{ für } a_k, a_{k+1}, \dots, a_{\ell}, a_{\ell+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}.$$

Die Gültigkeit der Summenformel (und den Grund für die Benennung) erkennt man durch Ausschreiben $\sum_{i=k}^{\ell} (a_{i+1} - a_i) = a_{k+1} - a_k + a_{k+2} - a_{k+1} + a_{k+3} - a_{k+2} + \dots + a_{\ell} - a_{\ell-1} + a_{\ell+1} - a_{\ell}$ und Wegstreichen der sich aufhebenden Summanden.

- Mit einer Indexverschiebung lässt sich diese Rechnung in der Form $\sum_{i=k}^{\ell} (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=k+1}^{\ell+1} a_i - \sum_{i=k}^{\ell} a_i = \sum_{i=k+1}^{\ell+1} a_i - \sum_{i=k+1}^{\ell} a_i - a_k + a_{\ell+1} = a_{\ell+1} - a_k$ schreiben. Die Produktformel folgt analog.
- (2) Gelegentlich können Summen oder Produkte erst nach Umformung mit Hilfe eines Teleskop-Tricks berechnet werden. Ein typisches einfaches Beispiel hierfür ist

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j+1}{j(j+1)} - \frac{j}{j(j+1)} \right) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

- (3) Die *arithmetische Summenformel* und die als Spezialfall enthaltene *Gaußsche Summenformel*

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

kamen schon in der Übungen zur Mathematik 1 vor. Wir können die Gaußsche Summenformel als Alternative zu früheren Beweisen per Teleskop-Summation durch

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^n ((j+1)^2 - j^2) - \sum_{j=1}^n 1 \right] = \frac{1}{2} [(n+1)^2 - 1 - n] = \frac{n(n+1)}{2}$$

neu herleiten. Mit analogem, in den Übungen genauer besprochenem Vorgehen gewinnt man die Formeln für die Summe der ersten n Quadrat- beziehungsweise Kubikzahlen

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \text{ und } \sum_{j=1}^n j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Eine Verallgemeinerung auf beliebige Ordnung ist möglich und wird in Kürze angerissen.

- (4) Die *geometrische Summenformel* kam ebenfalls bereits in den Übungen zur Mathematik 1 vor und enthält als wichtigsten Fall die Formel

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ für } q \in \mathbb{K} \setminus \{1\} \text{ (mit der Konvention } q^0 := 1).$$

Es folgt eine wichtige Definition mit einem endlichen Produkt, die prinzipiell über jedem Körper der Charakteristik 0 getroffen werden kann, aber meist für Zahlbereiche gebraucht wird:

Definition IV.2.2. Es sei \mathbb{K} ein Körper der Charakteristik 0, beispielsweise \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Für $z \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ wird der *Binomialkoeffizient* $\binom{z}{k}$ („ z über k “) als

$$\binom{z}{k} := \prod_{j=0}^{k-1} \frac{z-j}{k-j} = \frac{z(z-1)(z-2)\cdots(z-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 2 \cdot 1} \in \mathbb{K}$$

definiert. Für $z \in \mathbb{K}$ und $k \in -\mathbb{N}$ vereinbart man $\binom{z}{k} := 0$.

Bemerkungen IV.2.3. Im Fall $z = n \in \mathbb{N}_0$ können Binomialkoeffizienten durch die Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2, \dots, n-1, n\} \end{cases}$$

auf Fakultäten zurückgeführt werden. Außerdem lassen sich diese natürlichen Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ im sogenannten *Pascalschen Dreieck* anordnen:

$$\begin{array}{cccccccc} n = 0: & & & & & & & 1 \\ n = 1: & & & & & & 1 & 1 \\ n = 2: & & & & & 1 & 2 & 1 \\ n = 3: & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ n = 4: & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ n = 5: & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

Dabei stehen die Koeffizienten zu gleichem n in der gleichen Zeile, die zu gleichem k auf der gleichen von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonale, und alle freien Plätze links und rechts entsprechen Nullen. In diesem Dreieck erweist sich jeder Koeffizient als Summe der beiden schräg über ihm stehenden. Dies ist Ausdruck der tatsächlich für alle $z \in \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gültigen und leicht nachzurechnenden Summationsregel

$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1}.$$

Insbesondere ergibt sich mit der Anordnung im Pascalschen Dreieck beziehungsweise der Summationsregel auch, dass für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{Z}$ stets $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$ gilt.

In einem beliebigen Körper kann man den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ in \mathbb{N}_0 bilden und dann mittels der Zuordnung $n \mapsto n_{\mathbb{K}}$ als Element von \mathbb{K} auffassen. Hat \mathbb{K} Charakteristik 0, so liegt \mathbb{Q} als Primkörper in \mathbb{K} und dies ist nichts anderes als die direkte Bildung des Binomialkoeffizienten in \mathbb{K} . Hat \mathbb{K} aber Charakteristik $p \in \mathbb{P}$, so scheitert eine direkte Bildung als $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ in \mathbb{K} eventuell an Null-Faktoren im Nenner. Allerdings ist $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$, so dass diese Zahl modulo p Sinn macht.

Binomialkoeffizienten erhalten ihren Namen aus dem folgenden Resultat:

Satz IV.2.4 (Allgemeine binomische Formel). *Es sei \mathbb{K} ein Körper, beispielsweise \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $a, b \in \mathbb{K}$ gilt (mit der Konvention $0^0 := 1$)*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{\substack{k, \ell \in \mathbb{N}_0 \\ k+\ell=n}} \frac{n!}{k!\ell!} a^k b^\ell.$$

Bemerkung IV.2.5. Konkret kann man die in der binomischen Formel für festes n auftretenden Binomialkoeffizienten in einer Zeile des Pascalschen Dreiecks ablesen. Beispielsweise ergibt sich aus der $n = 4$ entsprechenden Zeile die Formel

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

BEWEIS DER ALLGEMEINEN BINOMISCHEN FORMEL. In den Lernwerkstätten behandeln wir die Beziehung

$$(IV.2.1) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Wir benutzen diese iterative Formel für Binomialkoeffizienten, um die allgemeine binomische Formel per Induktion zu zeigen. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen, weil $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ und $a^0 = 1 = b^0$.

Für den Induktionsschluß nehmen wir an, dass die Behauptung für ein n gilt. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\ &= (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{nach Induktionsannahme} \\ &= a \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n+1-(k+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \quad (\text{Indexverschiebung}) \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} \quad (IV.2.1) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

□

Für endlich viele Summanden erhält man:

Satz IV.2.6 (Multinomialsatz). Sei \mathbb{K} ein Körper, beispielsweise \mathbb{R} oder \mathbb{C} . Für $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ und $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{K}$ gilt (mit der Konvention $0^0 := 1$)

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}.$$

Auch der Multinomialsatz lässt sich per Induktion beweisen, was wir hier jedoch nicht detailliert ausführen. Erwähnt sei nur, dass der *Multinomialkoeffizient* $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \in \mathbb{N}$ die Zahl der Möglichkeiten angibt, die Menge der insgesamt n Indizes in m disjunkte Teilmengen von Indizes zu zerlegen, wobei die erste Teilmenge aus k_1 Indizes besteht, die zweite aus k_2 Indizes und schließlich die m -te aus k_m Indizes.

Eine gelegentlich nützliche Konsequenz der Sätze ist:

Korollar IV.2.7. Für die Binomialkoeffizienten in der zu $n \in \mathbb{N}_0$ zugehörigen Zeile des Pascalschen Dreiecks gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$$

und für die Multinomialkoeffizienten zu $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_m = n}} \frac{n!}{k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_m!} = m^n.$$

BEWEIS. Dies ergibt sich unmittelbar durch Anwendung des Binomialsatz mit $a = b = 1$ und des Multinomialsatzes mit $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$. \square

Abschließend kommen wir auf die schon erwähnte Problematik allgemeiner Potenzsummen zurück und halten (ohne Ausführung der Details) fest:

Bemerkung IV.2.8. Die Bernoulli-Zahlen¹ $b_k \in \mathbb{Q}$ zu $k \in \mathbb{N}_0$, sind rekursiv durch $b_0 := 1$ und $\sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} b_j = 0$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ definiert. Die Folge dieser Zahlen beginnt mit $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_3 = 0$, $b_4 = -\frac{1}{30}$, $b_5 = 0$, $b_6 = \frac{1}{42}$, $b_7 = 0$, $b_8 = -\frac{1}{30}$, $b_9 = 0$, $b_{10} = \frac{5}{66}$ und ist so gewählt, dass sich für die durch $B_k(x) := (b_\bullet + x)^k := \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} b_j x^{k-j}$ definierten Bernoulli-Polynome B_k gerade $B_k(x+1) - B_k(x) = kx^{k-1}$ nachrechnen lässt. Dies kann man nutzen und erhält analog zu den zuvor diskutierten Fällen bis Ordnung 3 durch Teleskop-Summation auch die Potenzsummen-Formel beliebiger Ordnung

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^{k-1} = \frac{1}{k} [B_k(n) - b_k] = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} b_j n^{k-j} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

IV.3. Grundlegende Kombinatorik

In der (abzählenden) Kombinatorik geht es darum, die Anzahl der möglichen Konfigurationen, Anordnungen oder Auswahlen zu einer gegebenen Problemstellung zu bestimmen. Es geht dabei normalerweise um endlich viele Möglichkeiten, also letztlich um die Bestimmung von (eventuell sehr großen) natürlichen Zahlen.

Kombinatorik kann dabei als Grundlage für die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten dienen, und tatsächlich geht die Kombinatorik teils fließend in den Beginn der Wahrscheinlichkeitstheorie, die wiederum in das größere mathematische Gebiet der Stochastik fällt, über. Genauer ergibt sich, falls eine sogenannte Gleichverteilung vorliegt, bei der alle Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind, die Wahrscheinlichkeit (als Zahl aus $[0, 1]$) für ein Ereignis als der Quotient

$$\frac{\text{„Zahl der günstigen Möglichkeiten“}}{\text{„Zahl aller Möglichkeiten“}},$$

wobei die günstigen Möglichkeiten eben die sind, für die das Ereignis eintritt. Ist das Ereignis zum Beispiel, mit einem handelsüblichen sechsseitigen Würfel bei zwei aufeinander folgenden Würfeln mindestens einmal (eventuell auch zweimal) Vier zu würfeln, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür $\frac{11}{36}$, denn die 11 Würfelergebnisse Eins-Vier, Vier-Eins, Zwei-Vier, Vier-Zwei, Drei-Vier, Vier-Drei, Vier-Vier, Fünf-Vier, Vier-Fünf, Sechs-Vier, Vier-Sechs sind 11 günstige unter insgesamt 36 Möglichkeiten.

Trifft man auf Problemstellungen, bei denen nicht mehr alle Möglichkeiten als gleich wahrscheinlich angesehen werden können, so stößt dieses Vorgehen allerdings an seine Grenzen. Tendenziell nützen rein kombinatorische Überlegungen zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten daher häufig nur bei grundlegenden und seltener bei fortgeschrittenen Fragestellungen. In diesem Abschnitt beschränken wir uns nun tatsächlich auf das reine Abzählen und haben höchstens den obigen Quotienten und Anwendungen im Stil des vorausgehenden Beispiels im Auge, während Sie Weitergehendes zu Wahrscheinlichkeiten in Ihrem Studium erst nach Abschluss der Mathematik 1 bis 4 lernen.

¹Tatsächlich unterscheidet man die obigen Bernoulli-Zahlen *erster Art* b_k und die Bernoulli-Zahlen *zweiter Art* $b_k^* := (-1)^k b_k$. Man kann allerdings $b_k = 0$ für alle ungeraden $k \geq 3$ beweisen, so dass tatsächlich $b_k^* = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ gilt und einzig bei $b_1 = -\frac{1}{2}$ und $b_1^* = \frac{1}{2}$ ein Unterschied beim Vorzeichen besteht.

Zuerst beschäftigen wir uns hier mit der kombinatorischen Zählung sogenannter Variationen:

Definition IV.3.1. Für $k \in \mathbb{N}$ erklären wir eine k -gliedrige Variation aus einer Grundmenge \mathcal{X} als ein k -Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{X}^k$. Sind x_1, x_2, \dots, x_k alle verschieden, gilt also für $i \neq j$ in $\{1, 2, \dots, k\}$ stets $x_i \neq x_j$, so sprechen wir von einer Variation *ohne Wiederholung*. Im Fall $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ heißt die Variation *vollständig*.

Bemerkungen IV.3.2. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und \mathcal{X} eine Menge.

- Entscheidend ist bei Variationen die (in der Definition von Tupeln begründete) Berücksichtigung der Reihenfolge der Einträge, dass also etwa die beiden 4-gliedrigen Tupel $(2, 5, 5, 7)$ und $(5, 5, 2, 7)$ aus $\{2, 3, 5, 7, 11\}^4$ tatsächlich verschieden sind.
- Eine Variation $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{X}^k$ kann auch als Abbildung $\{1, 2, \dots, k\} \rightarrow \mathcal{X}$, $i \mapsto x_i$ betrachtet werden. Eine Variation ohne Wiederholung entspricht dabei einer injektiven, eine vollständige Variation einer surjektiven Abbildung.
- Offensichtlich gibt es² k -gliedrige Variationen ohne Wiederholung aus \mathcal{X} nur im Fall $|\mathcal{X}| \geq k$ und vollständige k -gliedrige Variationen aus \mathcal{X} nur im Fall $|\mathcal{X}| \leq k$.
- Ein sinnvolles kombinatorisches Zählen ist (normalerweise) nur für eine endliche Zahl $n = |\mathcal{X}|$ von Elementen möglich. Es werden also meist nur endliche Grundmengen \mathcal{X} betrachtet. Da es nur um die Anzahl der Elemente und Möglichkeiten geht, kann man sich tatsächlich auf $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$ zurückziehen, wenn man das möchte.
- Anstelle der Indizes $1, 2, \dots, k$ in der Definition ließe sich auch eine beliebige Indexmenge I mit $|I| = k$ Elementen verwenden. Variationen entsprächen dann Abbildungen $I \rightarrow \mathcal{X}$.

Zwei typische anschauliche Modelle für Variationen folgen:

- (1) Beim *Urnenmodell* entspricht \mathcal{X} einer Menge von unterscheidbaren Kugeln, die aus einer Urne (so hier die traditionelle Benennung) gezogen werden. Zieht man k -mal nacheinander und notiert die gezogenen Kugeln in Reihenfolge der Ziehungen, so erhält man eine k -gliedrige Variation von \mathcal{X} . Allgemeine Variationen entsprechen hierbei einem *Ziehen mit Zurücklegen* der gezogenen Kugeln. Variationen ohne Wiederholung entsprechen einem *Ziehen ohne Zurücklegen*.
- (2) Beim *Würfelmodell* wirft man einen Würfel mit einer Menge \mathcal{X} von unterscheidbaren Seiten k -mal nacheinander. Notiert man die gefallenen Seiten (oder deren Augenzahlen) in Reihenfolge der Würfe, so erhält man eine k -gliedrige Variation von \mathcal{X} . (Speziell Variationen ohne Wiederholung kann man mit Würfeln weniger natürlich veranschaulichen. Dafür müsste man die Wiederholung der gleichen Seite vermeiden oder verwerfen.)

Als Hauptergebnis zu Variationen, das wir im Folgenden erklären, aber nicht völlig formal mit Mengen und Mächtigkeiten beweisen werden, halten wir fest:

Satz IV.3.3. *Es seien $k, n \in \mathbb{N}$.*

- (I) *Die Zahl der k -gliedrigen Variationen aus einer n -elementigen Menge (und damit die Zahl der Abbildungen von einer k -elementigen in eine n -elementige Menge) ist*

$$n^k.$$

- (II) *Die Zahl der k -gliedrigen Variationen ohne Wiederholung aus einer n -elementigen Menge (und damit die Zahl der injektiven Abbildungen von einer k -elementigen in eine n -elementige Menge) ist*

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = k! \binom{n}{k},$$

was für $k > n$ gleich Null ist.

BEWEIS. Betrachtet man allgemeine k -gliedrige Variationen einer n -elementigen Menge, so gibt es für jeden der k Einträge des Tupels, jeden der k Züge aus der Urne bzw. jeden der k Würfelwürfe jeweils n Möglichkeiten. Die einzelnen Möglichkeiten können über die k Einträge (oder Züge oder Würfe) beliebig

²Das ziemlich offensichtliche Prinzip, dass es k -gliedrige Variationen ohne Wiederholung aus \mathcal{X} nur im Fall $|\mathcal{X}| \geq k$ geben kann, ist auch als Schubfach-Prinzip bekannt: Um k Gegenstände ohne Doppelbelegung auf n Schubfächer verteilen zu können, muss $n \geq k$ sein.

kombiniert werden. Die Gesamtzahl aller möglichen Variationen ergibt sich daher als Produkt von k Faktoren n und ist n^k .

Betrachtet man nur k -gliedrige Variationen ohne Wiederholung einer n -elementigen Menge, so gibt es beim ersten Eintrag des Tupels, beim ersten Zug aus der Urne bzw. beim ersten Würfelwurf weiterhin n Möglichkeiten, beim zweiten aber nur $(n - 1)$ Möglichkeiten, beim dritten nur noch $(n - 2)$, da ein beziehungsweise zwei Ergebnisse durch das Vorgeschehen bereits ausgeschlossen sind. Dies setzt sich entsprechend bis zu $n - k + 1$ Möglichkeiten beim k -ten Eintrag (oder Zug oder Wurf) fort. Die Gesamtzahl der möglichen Variationen ohne Wiederholung ergibt sich als das angegebene Produkt der k Faktoren. \square

Korollar IV.3.4.

- Die Zahl der Elemente der Potenzmenge einer k -elementigen Menge I ist 2^k . Es gilt also, wie schon vorher behauptet, $|\mathcal{P}(I)| = 2^{|I|}$. Dies folgt, indem wir jede Teilmenge A von $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ per Eins-zu-Eins-Korrespondenz mit der k -gliedrigen Variation $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ aus der 2-elementigen Menge $\{0, 1\}$ identifizieren, bei der $x_{i_j} = 1$ für $i_j \in A$ und $x_{i_j} = 0$ für $i_j \notin A$ ist. Mit anderen Worten entspricht A über seine Indikatorfunktion $1_A: I \rightarrow \{0, 1\}$ einer k -gliedrigen Variation von $\{0, 1\}$.
- Die Zahl der Zerlegungen von $\ell \in \mathbb{N}$ in endlich viele Summanden $\in \mathbb{N}$ (unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Summanden) ist $2^{\ell-1}$. Dies ergibt sich, indem man eine Zerlegung in $m \in \mathbb{N}$ Summanden wie für $\ell = 8$ und $m = 4$ zum Beispiel $8 = 2 + 1 + 1 + 4$ durch eine Folge von ℓ Einsen, die durch $m - 1$ Striche entsprechend gruppiert werden, im Beispiel $11|1|1|1111$, repräsentiert. Die Zerlegung entspricht dann für jede der $\ell - 1$ Zwischenstellen zwischen benachbarten Einsen einer Wahl zwischen 2 Möglichkeiten, nämlich, ob dort ein Strich steht oder nicht. Mit $k = \ell - 1$ und $n = 2$ bestehen somit insgesamt $2^{\ell-1}$ Auswahl-Möglichkeiten.
- Die Zahl der Permutationen einer n -elementigen Menge ist $n!$. Es gilt also, wie schon vorher gesehen haben, dass $|\Sigma_n| = n!$ ist. Dies ergibt sich als Spezialfall aus dem Satz, denn Variationen ohne Wiederholung sind für $k = n$ automatisch vollständig (oder mit anderen Worten, injektive Abbildungen zwischen endlichen Mengen gleicher Elementzahl sind automatisch bijektiv).

Bemerkungen IV.3.5. Von Interesse sind auch Variationen aus $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$ mit gegebenen Vielfachheiten $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$, bei denen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ als Eintrag der Variation bzw. Zug- oder Würfelergebnis jeweils genau k_i -mal vorkommen soll. Offensichtlich ist dies für eine k -gliedrige Variation genau im Fall $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ möglich.

Um solche Variationen zu zählen, kann man sich im Urnenmodell zunächst vorstellen, dass für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ genau k_i unterscheidbare Kugeln in die Urne gegeben und dann k Ziehungen ohne Zurücklegen aus den insgesamt k Kugeln erfolgen, bis die Urne am Ende leer ist. Hierbei gibt es $k!$ mögliche Ergebnisse. Tatsächlich ändert sich die Variation aber nicht, wenn zwei *gleiche* Einträge i vertauscht werden, wir müssen uns also *tatsächlich* vorstellen, dass für jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ eine Gruppe von k_i *ununterscheidbaren* Kugeln in die Urne gegeben und nach den Ziehungen nur die Gruppennummer i notiert wird. Dies reduziert die Zahl der Ergebnisse, die notiert werden können, weil Vertauschungen der Reihenfolge *innerhalb der Gruppen* nun nichts mehr ändern. Genauer sind ausgehend von jedem möglichen Ergebnis innerhalb der Gruppe mit Nummer i stets $k_i!$ Permutationen³ der Reihenfolge möglich und insgesamt dann $k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ Permutationen, bei denen jede Kugel in ihrer Gruppe bleibt und sich die Variation nicht ändert. Wir haben somit beim vorläufigen Ergebnis $k!$ jede Variation $k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ -mal gezählt. Die tatsächliche Zahl der k -gliedrigen Variationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit gegebenen Vielfachheiten $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ gibt daher der Multinomialkoeffizient

$$\frac{k!}{k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

an. (Da die Zahl der betreffenden Variationen eine ganze Zahl ist, kommt bei diesem (zugegeben) nicht ganz formalen Argument übrigens mit heraus, dass die Multinomialkoeffizienten, wie in Abschnitt IV.2 behauptet, stets Elemente aus \mathbb{N}_0 sind.)

³Dabei zählt die Identität, die nichts ändert, natürlich als eine Permutation. Insbesondere erhält man also auch für $k_i \in \{0, 1\}$ mit $k_i! = 1$ das richtige Ergebnis.

Da zu jeder Variation eindeutige Vielfachheiten gehören, muss die Summe über alle möglichen Vielfachheiten

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0 \\ k_1 + k_2 + \dots + k_n = k}} \frac{k!}{k_1! k_2! \cdot \dots \cdot k_n!} = n^k$$

die Gesamtzahl n^k ergeben, was auch die Summenformel für die Multinomialkoeffizienten aus Abschnitt IV.2 bestätigt. Beschränkt man sich bei der Summation nur auf Vielfachheiten $k_i \in \{0, 1\}$ beziehungsweise $k_i \in \mathbb{N}$, so erhält man die Zahl der Variationen ohne Wiederholung beziehungsweise der vollständigen Variationen. Im ersteren Fall verschwinden dabei wegen $0! = 1! = 1$ alle Nenner und die Summe erweist sich als Summe von $\binom{n}{k}$ gleichen Faktoren $k!$, wobei die Zahl $\binom{n}{k}$ der Summanden mit dem Ergebnis zusammenpasst und demnächst bei der Zählung von Kombinationen noch bestätigt wird.

Für die Zahl der *vollständigen* k -gliedrigen Variationen aus einer n -elementigen Menge (und die entsprechende Zahl *surjektiver* Abbildungen) wünscht man sich ebenfalls eine besser handhabbare Formel als die über die Summation von Multinomialkoeffizienten.

Die Herleitung einer solchen Formel ist deutlich schwieriger, gelingt aber mit dem Siebverfahren von Sylvester und Poincaré und gibt die Zahl der *vollständigen* k -gliedrigen Variationen aus einer n -elementigen Menge als $\sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^\ell \binom{n}{\ell} (n-\ell)^k$ an. Die wesentliche Idee der Herleitung ist, zunächst alle Variationen zu zählen und dies dann nach und nach um (Mehrfach-)Zählungen solcher Variationen zu korrigieren, bei denen zunächst ein, dann zwei, dann drei, usw. Elemente nicht auftreten. Weitere Details gehen deutlich über das Ziel dieses Abschnitts hinaus und werden hier nicht besprochen.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts kommen wir zur Zählung sogenannter Kombinationen:

Definition IV.3.6. Für $k \in \mathbb{N}$ und eine Menge \mathcal{X} erklären wir eine Äquivalenzrelation \sim auf \mathcal{X}^k durch

$$y \sim x: \Leftrightarrow \exists \pi \in \Sigma_k: y_1 = x_{\pi(1)}, \quad y_2 = x_{\pi(2)}, \dots, y_k = x_{\pi(k)} \text{ für } x, y \in \mathcal{X}^k.$$

Als eine k -gliedrige *Kombination* aus der Menge \mathcal{X} bezeichnen wir eine Äquivalenzklasse $[(x_1, x_2, \dots, x_k)]_{\sim} \in \mathcal{X}^k / \sim$ bezüglich dieser Relation. Sind x_1, x_2, \dots, x_k alle verschieden, gilt also für $i \neq j$ in $\{1, 2, \dots, k\}$ stets $x_i \neq x_j$, so sprechen wir von einer Kombination *ohne Wiederholung*. Im Fall $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ heißt die Kombination *vollständig*.

Bemerkungen IV.3.7. Es seien $k \in \mathbb{N}$ und \mathcal{X} eine Menge.

- In den Äquivalenzklassen bezüglich \sim werden jeweils diejenigen Tupel zusammengefasst, die dieselben Einträge in unterschiedlicher Reihenfolge enthalten, in $\{2, 3, 5, 7, 11\}^4 / \sim$ gilt zum Beispiel $[(2, 5, 5, 7)]_{\sim} = [(5, 5, 2, 7)]_{\sim}$. Die Definition von Kombinationen als solche Äquivalenzklassen bedeutet, dass die Reihenfolge der Einträge bei Kombinationen *nicht* berücksichtigt wird.
- Man kann sich auf Standard-Repräsentanten der Äquivalenzklassen einigen und für $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ nutzen, dass jede Äquivalenzklasse in $\{1, 2, \dots, n\}^k / \sim$ einen eindeutigen Repräsentanten $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{X}^k$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k$ besitzt (im Fall ohne Wiederholung sogar mit „ \ll “).

Tatsächlich wird eine Kombination in der Literatur zu allermeist als ein Tupel mit dieser Zusatzeigenschaft definiert, da man so die Begriffe Äquivalenzrelation und -klasse umgehen kann. Sind einem diese Begriffe vertraut, so ist die obige Definition aber konzeptionell klarer (und macht auch direkt deutlich, dass der Begriff der Kombination keinesfalls von einer Ordnung auf \mathcal{X} abhängt).

- Eine k -gliedrige Kombination $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathcal{X}^k / \sim$ ohne Wiederholung kann auch als k -elementige Teilmenge $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ von \mathcal{X} betrachtet werden. Eine allgemeine k -gliedrige Kombination wird auch durch die Vielfachheiten $k_x \in \mathbb{N}_0$, mit der die Einträge $x \in \mathcal{X}$ jeweils auftreten, beschrieben, wobei⁴ $\sum_{x \in \mathcal{X}} k_x = k$ gilt.
- Genau wie bei Variationen gibt es k -gliedrige Kombinationen ohne Wiederholung aus \mathcal{X} nur im Fall $|\mathcal{X}| \geq k$ und vollständige k -gliedrige Kombinationen aus \mathcal{X} nur im Fall $|\mathcal{X}| \leq k$, von Interesse ist nur der Fall $n = |\mathcal{X}| < \infty$, und man könnte einerseits nur $\mathcal{X} = \{1, 2, \dots, n\}$, andererseits statt $1, 2, \dots, k$ Indizes aus einer beliebigen Menge I mit $|I| = k$ betrachten.

⁴Im Fall $|\mathcal{X}| = \infty$, der hier formal zugelassen, aber nicht von Interesse ist, lässt man $k_x \neq 0$ nur für endliche viele $x \in \mathcal{X}$ zu, so dass $\sum_{x \in \mathcal{X}} k_x := \sum_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ k_x \neq 0}} k_x$ sinnvoll bleibt.

Mit dem *Urnenmodell* (mit oder ohne Zurücklegen) und dem *Würfelmodell* lassen sich neben Variationen auch Kombinationen veranschaulichen, wenn bei den Ergebnissen die Reihenfolge der Ziehungen beziehungsweise Würfe *nicht* berücksichtigt wird. Somit sind im Hinblick auf Kombinationen $(2, 5, 5, 7)$ und $(5, 5, 2, 7)$ als gleiche Ergebnisse zu betrachten, oder es wird gleich in beiden Fällen $(2, 5, 5, 7)$ notiert. Eine konkrete Instanz des Urnenmodells ohne Zurücklegen ist die *Lotto-Ziehung* von 6 aus 49 nummerierten Kugeln, bei der es im Ergebnis auf die Reihenfolge der Ziehungen nicht ankommt. Somit geht es beim 6-aus-49-Lotto um 6-gliedrige Kombinationen aus $\{1, 2, 3, \dots, 47, 48, 49\}$.

Tatsächlich kann man sich beim Urnenmodell ohne Zurücklegen (für Kombinationen ohne Wiederholung) und beim Würfelmodell (für alle Kombinationen) den Ablauf auch so vorstellen, dass eine Gesamtziehung von k Kugeln aus einer Urne beziehungsweise ein simultaner Wurf mit k Würfeln erfolgt. Bei dieser Vorstellung ist die Vernachlässigung der Reihenfolge dann fest eingebaut, da gar nicht mehr einzeln und in Reihenfolge gezogen beziehungsweise gewürfelt wird.

Als Hauptergebnis zu Kombinationen bekommen wir:

Satz IV.3.8. *Es seien $k, n \in \mathbb{N}$.*

(I) *Die Zahl der k -gliedrigen Kombinationen aus einer n -elementigen Menge ist*

$$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}.$$

(II) *Die Zahl der k -gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung aus einer n -elementigen Menge (und damit die Zahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge) ist*

$$\binom{n}{k},$$

was für $k > n$ gleich Null ist.

(III) *Die Zahl der k -gliedrigen vollständigen Kombinationen aus einer n -elementigen Menge ist*

$$\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n},$$

was für $k < n$ gleich Null ist.

Bemerkung IV.3.9. Eine k -elementige Teilmenge von \mathcal{X} mit $|\mathcal{X}| = n$ lässt sich beschreiben, indem man entweder ihre k Elemente aus \mathcal{X} auswählt oder für jedes der n in Frage kommenden Elemente eine $\{0, 1\}$ -Auswahl trifft, ob es zur Teilmenge gehört (dies k -mal) oder nicht (dies $(n-k)$ -mal). Daher entsprechen die k -elementigen Teilmengen von \mathcal{X} sowohl k -gliedrigen Kombinationen aus \mathcal{X} , als auch n -gliedrigen *Variationen* aus $\{0, 1\}$ mit gegebenen Vielfachheiten $n_1 = k$ und $n_0 = n - k$, was sich als der Spezialfall einer 2-elementigen Grundmenge in der Ergänzung zu Variationen mit gegebenen Vielfachheiten erweist. Wir können das Ergebnis also aus dem Vorausgehenden schon ablesen, geben jetzt aber trotzdem ein separates und leichter zugängliches Argument an.

BEWEIS VON SATZ IV.3.8. Wir behandeln ohne Einschränkung die Grundmenge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Einfacher gestaltet sich zunächst die Begründung für (II) zur Zahl der k -gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{1, 2, \dots, n\}$: Sind nämlich $x_1, x_2, \dots, x_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ alle verschieden, so ergibt sich für jede der $k!$ Permutationen $\pi \in \Sigma_k$ ein anderes Tupel $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(k)})$, und die Äquivalenzklasse $[(x_1, x_2, \dots, x_k)]_{\sim}$ besteht aus genau $k!$ so entstehenden *Variationen* ohne Wiederholung. Es werden also bei der Bildung von $\{1, 2, \dots, n\}^k / \sim$ jeweils $k!$ Variationen ohne Wiederholung zu einer Kombination ohne Wiederholung zusammengefasst, weshalb die Zahl $k! \binom{n}{k}$ der Variationen ohne Wiederholung lediglich durch $k!$ zu teilen ist, um die Zahl $\binom{n}{k}$ der Kombinationen ohne Wiederholung zu erhalten.

Zur Begründung des Prinzips (I) beschreiben wir eine allgemeine k -gliedrige Kombination aus $\{1, 2, \dots, n\}$ durch ihre Vielfachheiten $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ mit $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ und diese ähnlich wie schon früher durch Einfügen von $n - 1$ Strichen zwischen k Einsen, wobei beispielsweise die 6-gliedrige Kombination $[(4, 1, 2, 4, 1, 1)]_{\sim}$ aus $\{1, 2, 3, 4\}$ mit Vielfachheiten $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 2$ der Folge 111|1||11 entspricht. Hierbei sind allgemein aus insgesamt $k+n-1$ Positionen die der k Einsen beziehungsweise äquivalent der $n-1$ Striche auszuwählen. Eine allgemeine k -gliedrige Kombination aus $\{1, 2, \dots, n\}$ entspricht also der

Auswahl einer k -elementigen beziehungsweise $(n-1)$ -elementigen Teilmenge aus einer $(n+k-1)$ -elementigen Menge. Hierfür gibt es nach dem schon begründeten Prinzip (II) genau $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$ Möglichkeiten.

Alternativ kann man das Prinzip (I) herleiten, indem man eine Bijektion zwischen den allgemeinen k -gliedrigen Kombinationen aus $\{1, 2, \dots, n\}$ und den k -gliedrigen Kombinationen ohne Wiederholung aus $\{1, 2, \dots, k+n-1\}$ herstellt. Dazu bildet man tatsächlich eine k -gliedrige Kombination

$$[(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k-1}, x_k)]_{\sim}$$

aus $\{1, 2, \dots, n\}$, die mit dem Standard-Repräsentant angegeben wird, also $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k$ erfüllt, auf die k -gliedrige Kombination ohne Wiederholung $[(x_1, x_2+1, x_3+2, \dots, x_{k-1}+k-2, x_k+k-1)]_{\sim}$ aus $\{1, 2, \dots, k+n-1\}$ ab (die dann $x_1 < x_2+1 < x_3+2 < \dots < x_{k-1}+k-2 \leq x_k+k-1$ erfüllt).

Zur Herleitung des Prinzips (III) beschreiben wir eine vollständige k -gliedrige Kombination aus $\{1, 2, \dots, n\}$ wieder durch die Vielfachheiten $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}$, wobei die Null nun ausgeschlossen ist, mit $k_1+k_2+\dots+k_n = k$ und diese wie zuvor durch das Einfügen von $n-1$ Strichen zwischen k Einsen. Dabei dürfen zwischen benachbarten Einsen aber nicht wie bei allgemeinen Kombinationen mehrere Striche auftreten, sondern es steht dort entweder ein Strich oder kein Strich. Es sind also jetzt aus den $k-1$ Zwischenstellen zwischen benachbarten Einsen die $n-1$ mit Strich beziehungsweise äquivalent die $k-n$ ohne Strich auszuwählen. Eine vollständige k -gliedrige Kombination aus $\{1, 2, \dots, n\}$ entspricht somit der Auswahl einer $(n-1)$ -elementigen beziehungsweise $(k-n)$ -elementigen Teilmenge aus einer $(k-1)$ -elementigen Menge. Hierfür gibt es nach dem Prinzip (II) genau $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$ Möglichkeiten. \square

Korollar IV.3.10.

- Die Zahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge beträgt gemäß dem Prinzip (II) gerade $\binom{n}{k}$.
- Die Zahl der Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \{1, 2, \dots, n\}^k$ mit $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k$ ist $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$, und unter diesen sind $\binom{n}{k}$ mit $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{k-1} < x_k$. Dies folgt direkt aus den Prinzipien (I) und (II), denn zur jeder Kombination gehört genau ein solches Tupel (das, wie schon erwähnt, als Standard-Repräsentant genutzt werden kann).
- Die Zahl der Zerlegungen von $k \in \mathbb{N}$ in $n \in \mathbb{N}$ Summanden $\in \mathbb{N}_0$ (unter Berücksichtigung der Reihenfolge der Summanden) ist $\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$, und die Zahl der Zerlegungen von $k \in \mathbb{N}$ in $n \in \mathbb{N}$ Summanden $\in \mathbb{N}$ (ebenfalls unter Berücksichtigung der Reihenfolge) ist $\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$. Dies ergibt sich mit den Begründungen der Prinzipien (I) und (III).
- Beim 6-aus-49-Lotto (ohne Berücksichtigung von Zusatz-/Superzahlen) gibt es genau $\binom{49}{6} = 13.983.816$ Kombinations-Möglichkeiten. Darunter sind für $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jeweils $\binom{6}{r} \binom{43}{6-r}$ günstige Möglichkeiten, dass bei einer festen 6-aus-49-Ziehung von 6 abgegebenen Zahlentipps r richtige gezogen und $6-r$ falsche nicht gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit für „ r Richtige“ ist somit $\frac{\binom{6}{r} \binom{43}{6-r}}{\binom{49}{6}} \in (0, 1)$ und beträgt für $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ circa 43,6%, 41,3%, 13,2%, 1,8%, $9,7 \cdot 10^{-4}$, $1,8 \cdot 10^{-5}$, $7,1 \cdot 10^{-8}$.
- Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit $s \in \mathbb{N}$ schwarzen Kugeln und $w \in \mathbb{N}$ weißen Kugeln in $i+j$ Zügen genau $i \in \{0, 1, 2, \dots, s-1, s\}$ schwarze und $j \in \{0, 1, 2, \dots, w-1, w\}$ weiße Kugeln zu ziehen, beträgt gemäß dem Prinzip (II) genau $\frac{\binom{s}{i} \binom{w}{j}}{\binom{s+w}{i+j}} \in (0, 1]$. Um dies detaillierter zu begründen, stellt man sich die $s+w$ schwarzen und weißen Kugeln zunächst einzeln unterscheidbar (z.B. zusätzlich durchnummeriert) vor und hat dann bei $i+j$ Zügen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge⁵ insgesamt $\binom{s+w}{i+j}$ mögliche und gleich wahrscheinliche (!) Zugergebnisse. Nun gibt es $\binom{s}{i}$ Möglichkeiten, sich i aus den s schwarzen, und $\binom{w}{j}$ Möglichkeiten, sich j aus den w weißen Kugeln auszusuchen. Damit sind unter den Zugergebnissen als günstige Möglichkeiten $\binom{s}{i} \binom{w}{j}$ mit genau i schwarzen und j weißen Kugeln, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich in der Tat als der behauptete Quotient mit Zähler $\binom{s}{i} \binom{w}{j}$ und Nenner $\binom{s+w}{i+j}$.

Zusammenfassend lassen sich die Hauptergebnisse wie folgt festhalten:

⁵Mit Berücksichtigung der Reihenfolge gibt es $(i+j)! \binom{s+w}{i+j}$ Ergebnisse, die ebenfalls alle gleich wahrscheinlich sind. Aber, wenn man es so angeht, dann ließen sich die günstigen Fälle nicht so einfach zählen.

Anzahl	k -gliedrige Variationen aus n -elementiger Menge	k -gliedrige Kombinationen aus n -elementiger Menge
alle	n^k	$\binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$
ohne Wiederholung	$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
vollständige	komplizierter	$\binom{k-1}{n-1} = \binom{k-1}{k-n}$
vollständige ohne Wiederholung	$\begin{cases} n! & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$\begin{cases} 1 & \text{für } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Grenzwerte und Konvergenz bei Folgen und Reihen, Grundfunktionen

Das präzise Konzept des Grenzwerts zählt zu den wichtigsten Grundlagen der Mathematik und kann als *der* zentrale Grundpfeiler der Analysis angesehen werden. Unter den verschiedenen Grenzwertbegriffen behandeln wir zunächst Grenzwerte von Folgen reeller oder komplexer Zahlen, wobei die meisten wichtigen Eigenschaften bereits auftreten werden.

V.1. Grenzwerte von Folgen

Wir präzisieren zunächst, dass eine Folge eine Abbildung mit Definitionsbereich \mathbb{N} ist:

Definition V.1.1. Eine *Folge* von Elementen in einer Menge \mathcal{X} ist eine Abbildung $a \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} = \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathcal{X})$ von der Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen nach \mathcal{X} . Die einzelnen Funktionswerte $a(n) \in \mathcal{X}$ zu $n \in \mathbb{N}$ heißen die *Folgliedern*. Meist notiert man a_n für einzelne Folgenglieder $a(n)$ sowie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, a_3, \dots) für die ganze Folge a .

Bemerkung V.1.2. Auch bei Definitionsbereichen wie \mathbb{N}_0 oder $\mathbb{N}_{\geq k}$ spricht man manchmal von Folgen, im Fall des Definitionsbereichs \mathbb{Z} gelegentlich auch von Bifolgen, und nutzt die Terminologie analog.

Für allgemeine Definitionsbereiche dagegen verwendet man dagegen eher den Begriff der Familie (den wir hier aber nur am Rande festhalten):

Definition V.1.3. Eine *Familie* von Elementen aus einer Menge \mathcal{X} ist eine Abbildung $a \in \mathcal{X}^I = \text{Abb}(I, \mathcal{X})$ von einer beliebigen Indexmenge I nach \mathcal{X} . Man notiert a_i für einzelne Elemente $a(i)$ der Familie und $(a_i)_{i \in I}$ für die ganze Familie a .

Nach diesen ersten begrifflichen Klärungen kommen wir jetzt zum entscheidenden Punkt:

Uns interessieren Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller oder komplexer Zahlen, bei denen die Glieder a_n für immer größere n einer festen Zahl beliebig nahe kommen. Natürlich zeigt nicht jede Zahlenfolge ein solches Verhalten, aber, wenn dieses Phänomen auftritt, dann möchten wir es beschreiben.

Konkrete Beispiele, die abgedeckt werden sollen, sind etwa die Folgen mit den Gliedern $\frac{1}{n}$ und $(-\frac{1}{2})^n$, die 0 beliebig nahe kommen, sowie die mit den Gliedern $\frac{n-1}{n}$ und $\frac{n}{n+1}$, die 1 beliebig nahe kommen. Ein weiterer Modellfall ist die Folge mit Gliedern $(1 + \frac{1}{n})^n$, die sich — wie wir noch sehen werden — einer als Eulersche Zahl e bekannten Zahl annähern.

Die präzise Beschreibung solcher Annäherungsprozesse erfordert ein ausgefeiltes Konzept, das sich tatsächlich erst im Zug einer langen historischen Entwicklung herauskristallisiert hat:

Definition V.1.4. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{K} und $a \in \mathbb{K}$. Dann heißt a *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *bei* $n \rightarrow \infty$ *gegen* a *konvergent*, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. Man notiert hierfür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \text{ oder gleichbedeutend } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a.$$

Besitzt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert in einer Teilmenge von \mathbb{K} , so heißt die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in dieser Teilmenge von \mathbb{K} *konvergent* und andernfalls *divergent*.

Bemerkungen V.1.5.

- In einer Formulierung mit Quantoren liest sich die Definition wie folgt: Dass a Grenzwert von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, bedeutet

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einer Teilmenge \mathcal{X} von \mathbb{K} konvergent ist, bedeutet

$$\exists a \in \mathcal{X}: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n - a| < \varepsilon.$$

Der Typ und die genaue Reihenfolge der Quantoren sind hierbei essentiell!

- Ein Grenzwert existiert nicht immer! Die Folge $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ zum Beispiel besitzt keinen Grenzwert, ist also divergent. Wenn ein Grenzwert existiert, so ist er aber stets eindeutig. Zur Einführung in die Arbeit mit dem Grenzwertbegriff, wird der einfache Beweis der Eindeutigkeit nun (fast schon zu) detailliert erörtert:

Es seien $a, \tilde{a} \in \mathbb{K}$ zwei Grenzwerte einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} . Ist dann $\tilde{a} \neq a$, so liefert die Definition, angewandt mit $\varepsilon = \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| > 0$, zwei Zahlen $n_0, \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} \text{ und } |a_n - \tilde{a}| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| \text{ für } n \in \mathbb{N}_{\geq \tilde{n}_0}$$

gelten. Für die Zahl $n_* := \max\{n_0, \tilde{n}_0\} \in \mathbb{N}$ sind beide diese Ungleichungen anwendbar, und mit der Dreiecksungleichung aus Abschnitt IV.1 folgt

$$|\tilde{a} - a| \leq |a_{n_*} - \tilde{a}| + |a_{n_*} - a| < \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| + \frac{1}{2}|\tilde{a} - a| = |\tilde{a} - a|.$$

Als Resultat erhalten wir den Widerspruch $|\tilde{a} - a| < |\tilde{a} - a|$, also kann $\tilde{a} \neq a$ nicht auftreten, und es muss $\tilde{a} = a$ gelten.

- Die in Bemerkung (V.1.5) auftretende Quantoren-Abfolge $\exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ bedeutet, dass die folgende Aussage für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Verbreitete Umschreibungen für genau diesen Sachverhalt sind, dass die Aussage für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$, für *ausreichend große* $n \in \mathbb{N}$ oder für *(alle) $n \gg 1$* (lies: n wesentlich größer als 1) gilt.
- (1) Mit anderen Worten verlangt die Grenzwertdefinition, dass für alle (noch so kleinen) $\varepsilon > 0$ die Folgenglieder a_n mit ausreichend großem n für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alle im Kreis in der Gaußschen Zahlenebene mit Radius ε und Mittelpunkt a liegen und für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alle im Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Dabei ist entscheidend, dass der Kreis bzw. das Intervall wirklich *alle* Folgenglieder ab einem (tendenziell) großen Index n_0 beinhalten. Dass sie stattdessen „nur“ unendlich viele Folgenglieder enthalten, ist noch keine gleichermaßen starke Forderung; dies erkennt man wieder am Beispiel der divergenten Folge $(0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$.
 - (2) Abänderung endlich vieler Folgenglieder ändert nichts am Grenzwert und auch nicht seine Existenz oder Nicht-Existenz: Ist $a_n = b_n$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Vor diesem Hintergrund betrachtet man Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ auch dann, wenn a_n nur für *fast alle*, aber eventuell nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist.
 - (3) Konvergente Folgen sind stets beschränkt, wobei Beschränktheit einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bedeutet, dass die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, also $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$ gilt:
Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{K}$ konvergent, so liefert die Definition ein (zu $\varepsilon = 1$ gehöriges) $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Damit ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a|\} < \infty.$$

- (4) Als *Nullfolge* bezeichnet man eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Aus der Definition folgt, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ der Beträge eine Nullfolge ist. Außerdem gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ genau dann, wenn $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Beispiele V.1.6.

- Konstante Folgen $(a)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Wert a konvergieren auch gegen a , es gilt also $\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.
- Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Nullfolge. Um dies einzusehen, wählt man zu $\varepsilon > 0$ einfach $n_0 := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ und bemerkt $|\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$.

Hiermit lassen sich auch andere einfach Limites schon berechnen, mit Bemerkung (4) folgt beispielsweise $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2$.

- Für jede Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} mit Kern $c \in \mathbb{R}$ existieren die Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$:

Nach Definition der Intervallschachtelung in der Mathematik 1 existiert zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Wegen $c \in [a_n, b_n] \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ auch $|a_n - c| = c - a_n \leq c - a_{n_0} \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$ und $|b_n - c| = b_n - c \leq b_{n_0} - c \leq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$. Dies bedeutet per Definition $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$.

Für Folgen von *reellen* Zahlen kann das Konzept des Grenzwerts auf die sogenannten uneigentlichen Grenzwerte ∞ und $-\infty$ erweitert werden:

Definition V.1.7. Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: a_n > \frac{1}{\varepsilon},$$

so bezeichnet man $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als *gegen ∞ konvergent* und notiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ oder gleichbedeutend } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

Analog heißt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen $-\infty$ konvergent*, so $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$ gilt, und man notiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \text{ oder gleichbedeutend } a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -\infty.$$

Man nennt $\pm\infty$ in diesem Zusammenhang *uneigentliche Grenzwerte* und bezeichnet die gegen $\pm\infty$ konvergierenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als *uneigentlich konvergent* oder gleichbedeutend als *bestimmt divergent*.

Bemerkung V.1.8. Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ heißen *Unendlichfolgen*. Unendlichfolgen in \mathbb{R} entsprechen durch Negation genau den Folgen in \mathbb{R} mit Grenzwert $-\infty$, und Unendlichfolgen in $\mathbb{R}_{>0}$ entsprechen durch Reziprokenbildung genau den Nullfolgen in $\mathbb{R}_{>0}$.

Als Nächstes beschäftigen wir uns kurz mit dem Vergleich verschiedener Null- und Unendlichfolgen und werden danach sehen, dass dies auch für die Berechnung allgemeiner Grenzwerte durchaus nützen kann.

Definition V.1.9. Für zwei Unendlichfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sagt man, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *schneller als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ∞ geht (oder strebt oder wächst)*, wenn $(\frac{b_n}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls Unendlichfolge ist. Für Nullfolgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n \neq 0$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ sagt man, dass $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *schneller als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 geht*, wenn $(\frac{b_n}{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls Nullfolge ist.

Beispiele V.1.10.

- Wichtige Unendlichfolgen mit reellen Parametern $0 < r$ und $1 < q$ sind

$$\log(\log n), \quad (\log n)^r, \quad n^r, \quad n^r \log n, \quad q^n, \quad n!, \quad n^n,$$

wobei wir den natürlichen Logarithmus \log und Potenzen mit reellen Exponenten erst demnächst präzise einführen, diese aber im Vorgriff darauf schon erwähnen. Die Folgen wurden dabei so geordnet, dass weiter rechts stehende Folgen stets schneller gegen ∞ gehen als weiter links stehende Folgen.

- Wichtige Nullfolgen sind die Reziproken der genannten Unendlichfolgen, mit reellen Parametern $0 < r$ (*unverändert*) und $0 < q < 1$ (*geänderte Reihenfolge!*) sind

$$\frac{1}{\log(\log n)}, \quad \frac{1}{(\log n)^r}, \quad \frac{1}{n^r}, \quad \frac{1}{n^r \log n}, \quad q^n, \quad \frac{1}{n!}, \quad \frac{1}{n^n}.$$

Auch hierbei streben die weiter rechts stehende Folgen schneller gegen Null als die weiter links stehenden Folgen.

Bemerkung V.1.11. Das Wachstum zweier Unendlich- oder Nullfolgen kann auch unvergleichbar sein. Zum Beispiel bei den Unendlichfolgen $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, \dots$ und $1, 2^3, 3, 4^3, 5, 6^3, 7, 8^3, \dots$ wächst weder die eine schneller als die andere noch die andere schneller als die eine.

Manches über (eventuell uneigentliche) Grenzwerte lässt sich mit Abschätzungen herausfinden. Grundprinzipien für solche Betrachtungen sind:

Satz V.1.12.

- (1) Majorantenkriterium für Nullfolgen: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} oder \mathbb{C} mit $|a_n| \leq Cb_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer Konstante $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und einer Nullfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst eine Nullfolge.
- (2) Minorantenkriterium für Unendlichfolgen: Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} mit $a_n \geq cb_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}_{> 0}$ und einer Unendlichfolge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst eine Unendlichfolge.
- (3) Monotonie: Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R} mit $a_n \leq b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ und existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (4) Einschachtelungsprinzip: Ist eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} durch $a_n \leq x_n \leq b_n$ für (fast) alle $n \in \mathbb{N}$ zwischen Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} eingeschachtelt und existieren $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: c$ mit gleichem Wert c , so existiert auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Bemerkungen V.1.13.

- Die Kriterien (1) und (2) werden oft für Produkte $a_n = c_n b_n$ angewandt und besagen dann: Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zumindest beschränkt, so ist auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge. Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Unendlichfolge und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zumindest positiv und gilt $\inf_{n \in \mathbb{N}} c_n > 0$, so ist auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Unendlichfolge.
- Das in Teil (3) des Satzes formulierte Prinzip der Erhaltung *schwacher* Ungleichungen bei Grenzübergängen überträgt sich übrigens nicht auf *strikte* Ungleichungen: Mit anderen Worten folgt aus einer strikten Ungleichung $a_n < b_n$ für die Folgenglieder *keinesfalls* die strikte Ungleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ für die Limites. Dies erkennt man an einfachen Beispielen wie $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n}$.

BEWEIS DES SATZES. Alle vier Teile des Satzes lassen sich problemlos mit Grenzwertdefinition beweisen. Wir führen dies nur für die Teile (1) und (4) exemplarisch aus:

Es seien a_n, b_n wie in (1) mit $|a_n| \leq Cb_n$ für $n \gg 1$. Im Fall $C = 0$ folgt direkt $a_n = 0$ für $n \gg 1$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Im Fall $C > 0$ gibt für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ die Definition von $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ (angewandt auf $\frac{\varepsilon}{C}$ statt ε), dass $b_n = |b_n| < \frac{\varepsilon}{C}$ für $n \gg 1$ gilt. Es folgt $|a_n| \leq Cb_n < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$ für $n \gg 1$, also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ anhand der Grenzwertdefinition gezeigt.

Es seien a_n, b_n wie in (4) mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für $n \gg 1$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ bedeutet die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$, dass $|a_n - c| < \varepsilon$ und $|b_n - c| < \varepsilon$ für $n \gg 1$ gelten. Daraus folgt einerseits $x_n - c \leq b_n - c \leq |b_n - c| < \varepsilon$, andererseits $c - x_n \leq c - a_n \leq |a_n - c| < \varepsilon$ für $n \gg 1$, zusammengenommen also $|x_n - c| = \max\{x_n - c, c - x_n\} < \varepsilon$ für $n \gg 1$. Wir erhalten wie behauptet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. \square

Berechnungen konkreter Grenzwerte gelingen manchmal mit dem Einschachtelungsprinzip. Häufiger und schematischer werden aber die folgenden Rechenregeln eingesetzt.

Satz V.1.14. *Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, für die $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{K}$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{K}$ existieren. Dann existieren auch*

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) &= a + b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) &= a - b, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) &= ab.\end{aligned}$$

Ist $b \neq 0$, so folgt $b_n \neq 0$ für $n \gg 1$, und es existiert auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

BEWEIS. Wir beweisen die Regeln für Summe und Differenz: Ist ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ gegeben, so erhalten wir erst $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \gg 1$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die zeigt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Die Regeln für Produkt und Quotient werden in den Übungen behandelt. \square

Bei Folgen *reeller* Zahlen gelten weitere Regeln, die sich erst später nach Einführung allgemeiner Potenzen und Logarithmen herleiten lassen, die wir aber schon einmal festhalten:

Proposition V.1.15. Es seien $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathbb{R} , für die $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \in \mathbb{R}$ und $r := \lim_{n \rightarrow \infty} r_n \in \mathbb{R}$ existieren. Ist $b > 0$, so folgt $b_n > 0$ für $n \gg 1$, und es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = b^r.$$

Weiterhin bleibt diese Regel auch für $b = 0 < r$ richtig, sofern $b_n \geq 0$ für $n \gg 1$ gilt. Gelten schließlich $1 \neq b > 0$ und $r > 0$, so folgen $1 \neq b_n > 0$ und $r_n > 0$ für $n \gg 1$, und es existiert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{b_n} r_n = \log_b r.$$

Ganz entscheidend für die Berechnung konkreter Grenzwerte ist weiterhin auch der richtige Umgang mit Situationen, in denen diese Regeln nicht (ohne Weiteres) greifen:

Bemerkungen V.1.16. • Auch für das Rechnen mit uneigentlichen Grenzwerten und manchen in \mathbb{R} oder \mathbb{C} nicht sinnvollen Ausdrücken gibt es Regeln. Man drückt diese manchmal durch symbolische Regeln wie

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad -3 + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad \frac{1}{0+} = \infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty, \quad 2^\infty = \infty, \quad \infty^1 = \infty,$$

ohne dass man mit solchen Termen allerdings vollständig wie mit Zahlen rechnen darf. Tatsächlich soll die erste Regel nur besagen, dass aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$ folgt, die zweite, dass sich aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ stets $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ ergibt. Ähnlich sind die anderen Regeln zu verstehen, wobei $0+$ und $0-$ als Platzhalter für Nullfolgen mit (fast) nur positiven und (fast) nur negativen Gliedern dienen.

- Es lässt sich aber keineswegs für alle auftretenden Situationen eine solche Regel aufstellen. Vielmehr gibt es auch unbestimmte Ausdrücke wie

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0+, \quad \infty^{0+}, \quad 1^\infty, \quad 0^0.$$

Die Unbestimmtheit von $\infty - \infty$ bedeutet dabei, dass man aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ nichts über $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ schließen kann, denn tatsächlich kann $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ in dieser Situation jeden beliebigen Wert in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ annehmen oder auch gar nicht existieren. Ähnlich verhält sich dies bei den anderen unbestimmten Ausdrücken.

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir Beispiele für die Berechnung von Grenzwerten:

Beispiele V.1.17.

- Beim Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 4n - 2}{-2n^3 + n^2 + 1}$ lassen sich die Rechenregeln zunächst nicht anwenden (denn man käme auf den unbestimmten Typ $\frac{\infty}{\infty}$). Nach „Kürzen“ von n^3 geht dies aber doch, und man kann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 4n - 2}{-2n^3 + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 + \frac{4}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{-2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{7 + 0 - 0}{-2 + 0 + 0} = -\frac{7}{2}$$

bestimmen. Auf ähnliche Weise lassen sich tatsächlich Grenzwerte beliebiger gebrochen-rationaler Terme (also von Quotienten zweier Polynomen) bestimmen.

- Bei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ führt schon der Teilausdruck $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ auf $\infty - \infty$, und, auch wenn man diesen als Nullfolge erkennt, kommt man immer noch auf $\infty \cdot 0+$. Nach geschicktem Erweitern mit $(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$ und Ausnutzung der dritten binomischen Formel erhält man jedoch

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wobei sich die benötigte Grenzwertregel für Quadratwurzeln aus dem Zusatz mit $b_n = b = \frac{1}{2}$ oder auch elementarer ergibt.

- Bei $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ führt die naheliegende Umformung $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$ auf den unbestimmten Typ ∞^{0+} . Formt man weiter um und nutzt aus, dass $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ schneller wachsende Unendlichefolge ist als $(\log_2 n)_{n \in \mathbb{N}}$, so erhält man mit den Grenzwertregeln für Potenzen und Logarithmen aber tatsächlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n} \log_2 n} = 2^0 = 1.$$

(Sobald wir etwas später die Eulersche Zahl e und den natürlichen Logarithmus $\log = \log_e$ eingeführt haben, machen wir derartige Rechnungen übrigens bevorzugt bezüglich der Basis e , schreiben also dann $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \log n}$ um.)

Für weitere Beispiele zur Grenzwertberechnung sei auf die Übungen verwiesen.

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit zwei grundlegenden Kriterien für Konvergenz, dem Monotoniekriterium für Folgenkonvergenz in \mathbb{R} und dem Cauchy-Kriterium für Folgenkonvergenz in \mathbb{R} und \mathbb{C} . Wie in der Mathematik 1 bereits angedeutet charakterisieren diese Kriterien die Vollständigkeit von \mathbb{R} (und \mathbb{C}).

Das Monotoniekriterium können wir nach Einführung geeigneter Begriffe wie folgt angeben:

Definition V.1.18. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und *streng monoton wachsend*, wenn sogar $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog heißt die Folge *monoton fallend* beziehungsweise *streng monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ beziehungsweise $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz V.1.19. Jede beschränkte monotone Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} konvergiert in \mathbb{R} . Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wächst, ist dabei der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$. Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fällt, ist er $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

BEWEIS. Wir behandeln ohne Einschränkung nur eine beschränkte wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und bilden auf Grundlage der Ordnungs-Vollständigkeit $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $a - \varepsilon$ keine obere Schranke für $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Mit der Monotonie und der Schranken-Eigenschaft von a erhalten wir für $n \geq n_0$ dann $a - \varepsilon < a_n \leq a$ und somit $|a_n - a| < \varepsilon$. Dies zeigt die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

Bemerkung V.1.20. Ähnlich begründet man: Unbeschränkte monotone Folgen in \mathbb{R} konvergieren uneigentlich gegen ∞ (falls wachsend) oder $-\infty$ (falls fallend). Insgesamt kann man daher sagen, dass jede monotone Folge in \mathbb{R} eigentlich oder uneigentlich konvergiert.

Auch für das Cauchy-Kriterium brauchen wir zunächst noch einen Begriff:

Definition V.1.21. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} besitzt die *Cauchy-Eigenschaft*, wenn es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gibt. Man bezeichnet Folgen mit dieser Eigenschaft kurz als *Cauchy-Folgen*.

Bemerkungen V.1.22. Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- Die Gültigkeit der Cauchy-Eigenschaft wird manchmal durch eine Notation wie

$$\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} |a_n - a_m| = 0 \text{ oder } |a_n - a_m| \xrightarrow{n \geq m \rightarrow \infty} 0$$

zum Ausdruck gebracht.

- In Quantoren-Schreibweise verlangt die Definition der Cauchy-Folge

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

- Die Cauchy-Eigenschaft ist stärker als nur die Forderung $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Zum Beispiel die Folge $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$, ist aber *keine* Cauchy-Folge.
- Jede in \mathbb{K} konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge:

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} gegen den Grenzwert a konvergent, und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Definition der Konvergenz ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Per Dreiecksungleichung folgt $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge.

- Cauchy-Folgen sind stets beschränkt:

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Ähnlich wie beim entsprechenden Beweis für konvergente Folgen existiert dann ein (zu $\varepsilon = 1$ gehöriges) $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}|$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$, und damit ist

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{n_0-1}|, 1 + |a_{n_0}|\} < \infty.$$

Das Cauchy-Kriterium besagt nun, dass tatsächlich auch die Umkehrung gilt, dass also die Cauchy-Folgen in \mathbb{K} genau die in \mathbb{K} konvergenten Folgen sind:

Satz V.1.23. *Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jede Cauchy-Folge in \mathbb{K} konvergiert in \mathbb{K} .*

BEWEIS. Wir betrachten zunächst im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} . Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$a_m := \inf_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}} x_n \leq x_m \leq \sup_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}} x_n =: b_m,$$

wobei $(a_m)_{m \in \mathbb{N}}$ wachsend und $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fallend ist, so dass $a := \lim_{m \rightarrow \infty} a_m$ und $b := \lim_{m \rightarrow \infty} b_m$ nach dem letzten Satz in \mathbb{R} existieren. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es wegen der Cauchy-Eigenschaft von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass zunächst $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und dann auch $0 \leq b_m - a_m \leq \varepsilon$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gilt. Dies bedeutet für die Grenzwerte $b = a$, und nach dem Einschachtelungsprinzip konvergiert dann auch $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ gegen $a = b$.

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ lässt sich mit der einfachen Abschätzung

$$\max\{|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

darauf zurückführen: Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} , so sind zunächst wegen der linken Ungleichung $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folgen in \mathbb{R} . Nach dem für den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Bewiesenen existieren dann $x := \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) \in \mathbb{R}$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) \in \mathbb{R}$, und mit der rechten Ungleichung folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = x + yi \in \mathbb{C}$. \square

Bemerkung V.1.24. Auf Cauchy-Folgen basiert eine elegante Konstruktion von \mathbb{R} aus \mathbb{Q} , die eine Alternative zu den in der Mathematik 1 erwähnten Dedekindschen Schnitten darstellt. Man führt \mathbb{R} dabei als Faktoring des Rings der Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} modulo des Ideals der Nullfolgen in \mathbb{Q} ein. Dann identifiziert man $q \in \mathbb{Q}$ mit der Restklasse, die die konstante Folge $(q)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält, und erhält so $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Auch bei dieser Konstruktion sind etliche Details zu prüfen, auf die hier nicht eingegangen wird. Als wesentlicher Vorteil sei aber hervorgehoben, dass die Vorgehensweise auch in viel allgemeineren Kontexten, zum Beispiel für sogenannte metrische Räume, einsetzbar ist.

Anwendung V.1.25. Es seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{K}$ und $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ eine Selbstabbildung von \mathcal{X} . Für jeden Startwert $x_0 \in \mathcal{X}$ definiert dann die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} := f(x_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

eine *Iterationsfolge* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in \mathcal{X} . Falls Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen einen Limes $x_* \in \mathcal{X}$ sichergestellt werden kann. Wir nehmen an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$ gilt, wobei diese Gleichheit allgemein eine Eigenschaft von f , bekannt als *Stetigkeit*, erfordert. Dann ergibt sich

$$f(x_*) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_*.$$

Damit löst x_* die *Fixpunktgleichung* $f(x) = x$ und ist ein sogenannter *Fixpunkt* von f .

Das Vorausgehende kann auf zwei Arten nützen: Kann man die Fixpunktgleichung für f leicht (explizit und vielleicht sogar eindeutig) lösen, so lassen sich auf diese Weise der Grenzwert oder mögliche Grenzwerte der Iterationsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bestimmen. Ist die Lösung der Fixpunktgleichung dagegen schwierig, so kann mit Hilfe der konvergenten Iterationsfolge eventuell die Existenz eines Fixpunkts beweisen und ggf. Näherungswerte für diesen ausrechnen.

In jedem Fall muss man die oben angenommene *Konvergenz* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ tatsächlich sicherstellen und kann hierfür oft die zuvor behandelten Konvergenzkriterien einsetzen: Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, beschränktes \mathcal{X} und monoton wachsendes f (im Sinn, dass $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{X}$ gilt) erweist sich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als

beschränkt und monoton, und man kann das Monotonie-Kriterium nutzen. Für abgeschlossenes \mathcal{X} und eine strikte Kontraktion f — dies wird im Folgenden noch genauer erklärt — kann man die Cauchy-Eigenschaft für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nachweisen und das Cauchy-Kriterium einsetzen.

Beispiele V.1.26.

- Im Fall der monoton wachsenden Funktion $f: \mathbb{R}_{\geq -1} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq -1}$ mit $f(x) := \sqrt{1+x}$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ die Iterationsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ von f . Dies kann man als Präzisierung der unendlichen Wurzelkette $\sqrt{\dots \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x_0}}}}}$ = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ auffassen.

- Im Fall der strikten Kontraktion $f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x) := \frac{1}{2+x}$ für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Iterationsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen den einzigen Fixpunkt $\sqrt{2} - 1$ von f . Die

kann als Präzisierung des unendlichen Kettenbruchs $\cdot \cdot \cdot \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+x_0}}} = \sqrt{2} - 1$ verstanden werden.

Als Nächstes wenden wir uns kurz dem oben erwähnten Begriff der Kontraktion zu und zeigen, wie durch diesen die Cauchy-Eigenschaft der Iterationsfolge gesichert wird:

Definition V.1.27. Eine Abbildung $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ zwischen Teilmengen \mathcal{X} und \mathcal{Y} von \mathbb{R} oder \mathbb{C} heißt *Kontraktion*, wenn $|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq |\tilde{x} - x|$ für alle $x, \tilde{x} \in \mathcal{X}$ gilt. Sie heißt *strikte Kontraktion*, wenn sogar $|f(\tilde{x}) - f(x)| \leq \kappa |\tilde{x} - x|$ für alle $x, \tilde{x} \in \mathcal{X}$ mit einer festen Konstante $\kappa \in [0, 1)$ gilt.

Bemerkung V.1.28. Entscheidend für eine *strikte* Kontraktion ist, dass κ *echt* kleiner als 1 ist.

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Kontraktionen beschreibt der nächste Satz.

Satz V.1.29 (Kontraktionssatz). Sei \mathcal{X} nicht-leeres abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} (also vom Typ $[a, b]$ mit $a \leq b$ in \mathbb{R}) oder $\mathcal{X} = \mathcal{X}_r + i\mathcal{X}_i \subset \mathbb{C}$ mit nicht-leeren abgeschlossenen Intervallen $\mathcal{X}_r, \mathcal{X}_i \subset \mathbb{R}$. Dann besitzt jede strikte Kontraktion $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ genau einen Fixpunkt $x_* \in \mathcal{X}$, und für beliebiges $x_0 \in \mathcal{X}$ konvergiert die durch $x_{n+1} := f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ rekursiv definierte Iterationsfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen x_* .

BEWEIS. Es bezeichne $\kappa \in [0, 1)$ die Kontraktionskonstante von f .

Die Eindeutigkeit des Fixpunkts sieht man schnell: Gibt es zwei Fixpunkte $x, \tilde{x} \in \mathcal{X}$ von f mit $\tilde{x} \neq x$, so bekäme man mit $|\tilde{x} - x| = |f(\tilde{x}) - f(x)| \leq \kappa |\tilde{x} - x| < |\tilde{x} - x|$ einen Widerspruch.

Im Hauptteil des Beweises zeigen wir nun die Existenz eines Fixpunkts und die Konvergenz der Iterationsfolge. Zunächst folgt aus der rekursiven Definition von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der Kontraktionseigenschaft

$$|x_{i+1} - x_i| = |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \kappa |x_i - x_{i-1}| \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Mit Induktion erhalten wir daraus

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \kappa^i |x_1 - x_0| \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_0.$$

Für $n \geq m$ in \mathbb{N}_0 schreiben wir nun per Teleskopsumme $x_n - x_m = \sum_{i=m}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)$ und rechnen mit der Dreiecksungleichung, der vorigen Abschätzung und der geometrischen Summenformel

$$|x_n - x_m| \leq \sum_{i=m}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \leq \sum_{i=m}^{n-1} \kappa^i |x_1 - x_0| = \frac{\kappa^m - \kappa^n}{1 - \kappa} |x_1 - x_0| \leq \frac{\kappa^m}{1 - \kappa} |x_1 - x_0|.$$

Wegen $\kappa < 1$ wird die rechte Seite der Ungleichungskette für $n \geq m \gg 1$ kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Also hat $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Cauchy-Eigenschaft, und gemäß dem Cauchy-Kriterium existiert $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in \mathbb{R} bzw. \mathbb{C} . Da im Fall $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ aus $a \leq x_n \leq b$ schon $a \leq x \leq b$ folgt (und im Fall $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}$ Entsprechendes für Real- und Imaginärteile gilt), liegt auch x_* im abgeschlossenen Intervall/Bereich \mathcal{X} . Wegen $|f(x_n) - f(x_*)| \leq \kappa |x_n - x_*|$ sichert das Majorantenkriterium, dass $(f(x_n) - f(x_*))_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge ist, und mit $f(x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_*$ folgt, dass x_* ein Fixpunkt von f ist. Damit sind alle Behauptungen verifiziert. \square

Bemerkung V.1.30. In der Situation des Kontraktionssatzes lassen sich *Iterationsfolgen* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit beliebigen Startwert $x_0 \in \mathcal{X}$ gut zur näherungsweise Berechnung des Fixpunktes x_* einsetzen. Ähnliche Rechnungen wie im Beweis geben dabei Abschätzungen für den Näherungsfehler $|x_n - x_*|$, der nach Berechnung von x_n mit $n \in \mathbb{N}$ verbleibt:

$$|x_n - x_*| \leq \frac{\kappa}{1 - \kappa} |x_n - x_{n-1}| \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} |f(x_0) - x_0|.$$

Bei der Abschätzung durch $\frac{\kappa^n}{1 - \kappa} |f(x_0) - x_0|$ handelt es sich um eine a-priori Fehlerabschätzung, bei der die Schranke bestimmt werden kann, bevor man mehrere x_n berechnet. Bei der schärferen Abschätzung durch $\frac{\kappa}{1 - \kappa} |x_n - x_{n-1}|$ handelt es sich um eine a-posteriori Fehlerabschätzung, die erst nach Berechnung der Folgenglieder bis hin zu x_{n-1} und x_n nützt.

V.2. Allgemeine Wurzeln, Potenzen und Logarithmen

In diesem Abschnitt werden wir den Grenzwertbegriff und die Vollständigkeit von \mathbb{R} nutzen, um allgemeine Wurzeln, Potenzen und Logarithmen einzuführen. Wir beginnen mit Wurzeln.

Satz V.2.1. *Zu $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $b^k = x$. Diese Zahl b bezeichnet man als die k -te Wurzel aus x und notiert für sie $\sqrt[k]{x}$. Für $k = 2$ spricht man von Quadratwurzeln und setzt $\sqrt{x} := \sqrt[2]{x}$*

BEWEIS. Die Eindeutigkeit von b ist klar, weil für $a < b$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stets $a^k < b^k$ gilt.

Wir zeigen nun die Existenz von b mit Hilfe der Menge $A_x := \{a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid a^k \leq x\}$. Diese ist nicht-leer und von oben beschränkt (denn es ist $0 \in A_x$ und wegen $a \leq a^k \leq x$ für $1 \leq a \in A_x$ ist $\max\{1, x\}$ eine obere Schranke für A_x). Gemäß der Ordnungs-Vollständigkeit existiert also $b := \sup A_x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Einerseits ist nun $b + \frac{1}{n} \notin A_x$, also $(b + \frac{1}{n})^k > x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Produktregel¹ und Vergleichsprinzip für Grenzwerte folgt $b^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (b + \frac{1}{n})^k \geq x$. Andererseits gibt es Zahlen $a_n \in A_x$ mit dementsprechend $a_n^k \leq x$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$. Erneut mit der Produktregel und Vergleichsprinzip folgt $b^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k \leq x$. \square

Bemerkung V.2.2. Sei $x \in \mathbb{R}_{> 0}$. Für *gerades* $k \in 2\mathbb{N}$ ist neben $\sqrt[k]{x}$ auch $-\sqrt[k]{x} \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ eine k -te Wurzel aus x , erfüllt also auch $(-\sqrt[k]{x})^k = x$. Für *ungerades* $k \in 2\mathbb{N} - 1$ ist $-\sqrt[k]{x}$ eine k -te Wurzel aus der negativen Zahl $-x$, erfüllt also $(-\sqrt[k]{x})^k = -x$. Wir erlauben in unserer Notation dennoch *keine negativen Zahlen unter dem Wurzelzeichen*, weil für solche Wurzeln nicht alle üblichen Rechenregeln gelten und es beim Umgang damit leicht zu Fehlern und absurden Ergebnissen wie $-1 = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[6]{1} = 1$ kommen kann.

Rechenregeln für Wurzeln werden sich als Spezialfälle allgemeinerer Regeln für Potenzen ergeben und werden daher nicht separat behandelt. Zu Wurzeln aus komplexen Zahlen kommen wir später noch einmal. Wir halten hier aber noch fest, dass wir mit Wurzeln auch grundlegende Beispiele irrationaler Zahlen erhalten. Dazu benötigen wir die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung.

Bemerkung V.2.3. Tatsächlich wurde die Existenz der Primfaktorzerlegung in der Mathematik 1 per Induktion gezeigt. Ein Beweis für die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung wurde bisher nicht gegeben, kann aber gemäß einer Idee von E. Zermelo so erfolgen: Angenommen, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit nicht eindeutiger Primfaktorzerlegung. Dann gibt es auch ein kleinstes solches $n \in \mathbb{N}$ mit $n = p_1 p_2 \dots p_\ell = q_1 q_2 \dots q_m$ für $\ell, m \in \mathbb{N}$ und Primzahlen $p_i, q_j \in \mathbb{P}$, wobei sich die q_j nicht durch Umm Nummerierung der p_i ergeben. Es folgt $p_i \neq q_j$ für alle $(i, j) \in \{1, 2, \dots, \ell\} \times \{1, 2, \dots, m\}$, denn sonst erhielten wir durch Division von n durch $p_i = q_j$ eine kleinere Zahl mit nicht eindeutiger Primfaktorzerlegung. Wir betrachten nun den Fall $p_1 < q_1$. Dann ist p_1 als Teiler von n und von $p_1 q_2 q_3 \dots q_m$ auch Teiler von $\lambda := n - p_1 q_2 q_3 \dots q_m = (q_1 - p_1) q_2 q_3 \dots q_m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten eine Primfaktorzerlegung von λ einerseits durch Primfaktorzerlegung von λ/p_1 und Multiplikation mit p_1 , andererseits durch Primfaktorzerlegung von $q_1 - p_1$ und Multiplikation mit $q_2 q_3 \dots q_m$. Da p_1 bei der ersteren Zerlegung vorkommt und die Primfaktorzerlegung von $\lambda < n$ eindeutig

¹Entscheidend ist, dass an dieser Stelle, dass die Grenzwertregel $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k$ für *natürliche* Exponenten $k \in \mathbb{N}$ und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ sich tatsächlich durch Induktion nach k aus der in den Übungen bewiesenen Produktregel ergibt. Man braucht an dieser Stelle also nicht etwa die in Abschnitt V.1 im Vorgriff angegebene Regel für allgemeine Potenzen, die wir noch nicht sauber behandelt haben.

ist, muss bei p_1 auch bei der zweiten Zerlegung vorkommen. Da p_1 mit keiner der Primzahlen q_2, q_3, \dots, q_m übereinstimmt, erzwingt dies, dass p_1 in der zweiten Zerlegung aus der Primfaktorzerlegung von $q_1 - p_1$ stammt, also Teiler von $q_1 - p_1$ ist. Damit ist p_1 auch ein von 1 und q_1 verschiedener Teiler von q_1 , was im *Widerspruch* zur Primzahleigenschaft von q_1 steht. Im Fall $p_1 > q_1$ ergibt sich dieser *Widerspruch* analog. Damit ist die Primfaktorzerlegung aller natürlichen Zahlen eindeutig.

Satz V.2.4. Sei $k \in \mathbb{N}$. Ist $m \in \mathbb{N}$ keine k -te Potenz einer natürlichen Zahl, also $\sqrt[k]{m} \notin \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt[k]{m}$ stets irrational, also $\sqrt[k]{m} \notin \mathbb{Q}$.

Insbesondere sind damit Quadratwurzeln aus Nicht-Quadrat-Zahlen wie $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ und Kubikwurzeln aus Nicht-Kubik-Zahlen wie $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[3]{10}$ stets irrational.

BEWEIS. Wir nutzen die Primfaktorzerlegung $m = p_1^{\ell_1} p_2^{\ell_2} \dots p_q^{\ell_q}$ von m (und gleich auch analog von anderen natürlichen Zahlen) mit eindeutigem $q \in \mathbb{N}_0$, eindeutigen Primfaktoren $p_i \in \mathbb{P}$ und eindeutigen Vielfachheiten $\ell_i \in \mathbb{N}$. Es gibt einen Primfaktor $p_{i_0} \in \mathbb{P}$ von m , dessen Vielfachheit ℓ_{i_0} nicht durch k teilbar ist (denn ansonsten wären die p_i alle k -te Potenzen und auch m selbst eine k -te Potenz). Angenommen, es ist $\sqrt[k]{m} \in \mathbb{Q}$, also $\sqrt[k]{m} = \frac{z}{n}$ mit $z, n \in \mathbb{N}$. Dann tritt p_{i_0} als Primfaktor von z^k und n^k entweder gar nicht oder mit einer durch k teilbaren Vielfachheit auf (denn die Primfaktoren von z^k und n^k sind genau die k -ten Potenzen derer von z und n). Bei mn^k hat der Primfaktor p_{i_0} aber eine um ℓ_{i_0} höhere Vielfachheit als bei n^k , die daher nicht durch k teilbar ist. Wegen $mn^k = z^k$ kommt der Primfaktor p_{i_0} aber bei mn^k und z^k mit der gleichen Vielfachheit vor. Dass diese einerseits durch k teilbar, andererseits nicht durch k teilbar ist, liefert uns einen Widerspruch. Folglich ist $\sqrt[k]{m} \notin \mathbb{Q}$. \square

Potenzen b^z einer Basis $b \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ mit ganzzahligen Exponenten $z \in \mathbb{Z}$ sind (wie früher schon allgemein in Gruppen und Ringen) durch die Festlegungen $b^0 := 1$, $b^n := \prod_{i=1}^n b$ (Produkt n gleicher Faktoren b) und $b^{-n} := (b^n)^{-1} = (b^{-1})^n$ für $n \in \mathbb{N}$ erklärt.

Potenzen b^q einer positiven Basis $b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit rationalen Exponenten $q \in \mathbb{Q}$ erklären wir darauf aufbauend durch

$$b^{z/n} := \sqrt[n]{b^z} = (\sqrt[n]{b})^z \text{ für } z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N},$$

wobei die Wohldefiniertheit dieser Bildung und die Gleichheit der letzten beiden Terme aus der Eindeutigkeit von Wurzeln folgen. Insbesondere können wir somit Wurzeln gemäß $\sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ in Potenzen umschreiben.

Im Folgenden lassen wir sogar *reelle* Exponenten zu:

Satz V.2.5. Für jede positive Zahl $b \in \mathbb{R}_{>0}$ und jedes $r \in \mathbb{R}$ gibt es eine eindeutige positive Zahl $b^r \in \mathbb{R}_{>0}$, genannt die Potenz der Basis b zum Exponent r , so dass insgesamt für $a, b, b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r, r_n, s \in \mathbb{R}$ folgende Gesetzmäßigkeiten gelten:

- *Monotonie-Eigenschaften:*

$$r < s \implies \begin{cases} a^r < a^s, & \text{falls } a > 1, \\ a^r > a^s, & \text{falls } a < 1; \end{cases}$$

$$a < b \implies \begin{cases} a^r < b^r, & \text{falls } r > 0, \\ a^r > b^r, & \text{falls } r < 0. \end{cases}$$

- *Rechenregeln:*

$$\begin{array}{lll} b^0 = 1, & b^1 = b, & 1^r = 1, \\ b^{r+s} = b^r b^s, & b^{rs} = (b^r)^s, & (ab)^r = a^r b^r, \end{array}$$

- *Bernoulli-Ungleichungen:*

$$\begin{array}{l} (1+x)^r \geq 1+rx \text{ für } x \in \mathbb{R}_{>-1}, \text{ falls } r \in \mathbb{R} \setminus (0,1), \\ (1+x)^r \leq 1+rx \text{ für } x \in \mathbb{R}_{>-1}, \text{ falls } r \in [0,1] \end{array}$$

mit Gleichheit einzig für $x = 0$ oder $r \in \{0,1\}$,

- Grenzwertregeln:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = b^r, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r > 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = 0. \end{aligned}$$

Ergänzend vereinbart man die Konvention $0^r := 0$ für $r > 0$, mit der die letzte Grenzwertregel sogar dann Sinn macht und gültig bleibt, wenn unendlich viele b_n gleich 0 sind.

ZUM BEWEIS. Als Vorüberlegung verifiziert man ohne besondere Probleme, dass die Monotonie-Eigenschaften erst für ganzzahlige Exponenten, dann für Stammbrüche $\frac{1}{n}$ als Exponenten (die n -ten Wurzeln entsprechen) und dann für rationale Exponenten gelten. Es folgt, dass die durch

$$b^r := \begin{cases} \sup\{b^q \mid q \in \mathbb{Q}_{\leq r}\} & \text{für } b \in [1, \infty), \\ \inf\{b^q \mid q \in \mathbb{Q}_{\leq r}\} & \text{für } b \in (0, 1]. \end{cases}$$

definierten Potenzen mit reellen Exponenten $r \in \mathbb{R}$ die Potenzen mit rationalen Exponenten konsistent erweitern und auch selbst die Monotonie-Eigenschaften haben. Mit gleichem Vorgehen (erst ganzzahlige Exponenten, dann Wurzeln und rationale Exponenten, schließlich reelle Exponenten) erfolgen auch die Nachweise der Rechenregeln ohne besondere Kniffe.

Die Bernoulli-Ungleichung wurde für *natürliche Exponenten* $r \in \mathbb{N}$ in einer Übungsaufgabe behandelt. Um die Ungleichung für *reelle Exponenten* aus $[1, \infty)$ zu zeigen, betrachtet man für $y \in \mathbb{R}$ die Folge $(a_n(y))_{n \in \mathbb{N}_{>-y}}$ mit Gliedern $a_n(y) := \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$ (für $y > -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert; sonst nur für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -y$). Man erhält aus der bereits bewiesenen Bernoulli-Ungleichung mit der Rechnung

$$\frac{a_{n+1}(y)}{a_n(y)} = \left(\frac{n+1+y}{n+1} \Big/ \frac{n+y}{n}\right)^{n+1} \frac{n+y}{n} = \left(1 - \frac{y}{(n+1)(n+y)}\right)^{n+1} \frac{n+y}{n} \geq \left(1 - \frac{y}{n+y}\right) \frac{n+y}{n} = 1,$$

dass $(a_n(y))_{n \in \mathbb{N}_{>-y}}$ für $y \in \mathbb{R}$ monoton wächst. Für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m > -nx$ erhalten wir daraus

$$(1+x)^{\frac{n}{m}} = a_n(nx)^{\frac{1}{m}} \geq a_m(nx)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{n}{m}x,$$

wobei die resultierende Ungleichung sogar allgemein für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ gilt (denn für $m \leq -nx$ ist die linke Seite positiv und die rechte Seite nichtpositiv). Damit gilt $(1+x)^q > 1+qx$ für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und rationale $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \cap [1, \infty)$. Für *reelle* $r \in [1, \infty)$ gibt Monotonie $(1+x)^r \geq (1+x)^q \geq 1+qx$ für $x \in [0, \infty)$, $q \in \mathbb{Q} \cap [1, r]$ sowie $(1+x)^r \geq (1+x)^q \geq 1+qx$ für $x \in (-1, 0]$, $q \in \mathbb{Q} \cap [r, \infty)$, und insgesamt folgt durch Supremumbildung $(1+x)^r \geq 1+rx$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>-1}$. Um für $x \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$, $r \in (1, \infty)$ sogar die strikte Ungleichung nachzuweisen, führen wir $\xi := \sqrt{1+x} - 1 \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$ mit $1+x = (1+\xi)^2$ und $2\xi = x - \xi^2$ ein und erhalten $(1+x)^r = ((1+\xi)^r)^2 \geq (1+r\xi)^2 = 1+r2\xi+r^2\xi^2 = 1+rx + (r-1)r\xi^2 > 1+rx$.

Für reelle Exponenten aus $(0, 1]$ zeigen wir die Bernoulli-Ungleichung weitgehend analog. Aus der Monotonie von $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}_{>-x}}$ erhalten wir zunächst

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} = a_m(mx)^{\frac{1}{n}} \leq a_n(mx)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{m}{n}x$$

für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ (wobei $m > -mx$ trivial gilt). Daraus ergibt sich erst $(1+x)^q \leq 1+qx$ für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und rationale $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ und dann $(1+x)^r \leq 1+rx$ für $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ und reelle $r \in (0, 1]$. Für $x \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$ und $r \in (0, 1)$ erhalten wir die schließlich die strikte Ungleichung durch neuerliche Rechnung mit $\xi := \sqrt{1+x} - 1 \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$.

Im Fall reeller Exponenten aus $(-\infty, 0)$ gewinnen wir die Bernoulli-Ungleichung, direkt in der strikten Version, durch Zurückführung auf das Vorige: Für $x \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$, $r \in [1, \infty)$ schätzen wir gemäß $(1+x)^{-r} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^r = \left(1 - \frac{x}{1+x}\right)^r \geq 1 - r \frac{x}{1+x} > 1 - r \frac{x+x^2}{1+x} = 1 - rx$ ab und für $x \in \mathbb{R}_{>-1} \setminus \{0\}$, $r \in (0, 1]$ gemäß $(1+x)^{-r} = \frac{1}{(1+x)^r} \geq \frac{1}{1+rx} > \frac{1-r^2x^2}{1+rx} = 1 - rx$. Für $x = 0$ schließlich gilt die schwache Ungleichung „ \geq “ natürlich sowieso.

Im letzten verbleibenden Fall $r = 0$ gilt die Bernoulli-Ungleichung trivialerweise, weil beide Seiten gleich 1 sind.

Schließlich kommen wir zu den behaupteten Grenzwertregeln. Für beliebige $b_n \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r_n \in \mathbb{R}$ erhalten wir aus der Bernoulli-Ungleichung die Abschätzungen

$$1+r_n(b_n-1) \leq (b_n)^{r_n} = \frac{1}{(1/b_n)^{r_n}} \leq \frac{1}{1+r_n(1/b_n-1)} \text{ im Fall } r_n \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$$

und dieselben Abschätzungen mit „ \geq “ statt „ \leq “ im Fall $r_n \in [0,1]$. Ist nun $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \in \mathbb{R}$ mit entweder $b = 1$ oder $r = 0$, so konvergieren gemäß den früher bewiesenen Grenzwertregeln für die Grundrechenarten die linken und rechten Seiten der Abschätzungen bei $n \rightarrow \infty$ gegen 1, und per Einschachtelungsprinzip erhalten wir $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = 1$. Im allgemeinen Fall mit beliebigen $b \in \mathbb{R}_{>0}$, $r \in \mathbb{R}$ beobachten wir zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n/b) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n - r) = 0$ nach Differenzen- und Quotientenregel und können dann mit Produktregel und vorausgehendem Spezialfall auf $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} [(b_n/b)^{r_n} b^{r_n-r} b^r] = 1 \cdot 1 \cdot b^r = b^r$ schließen. Im Fall mit $b = 0$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und erhalten für $n \gg 1$ sowohl $0 \leq b_n < 1$ und $b_n < \varepsilon^{2/r}$ als auch $r_n > r/2$. Mit Monotonie schließen wir für $n \gg 1$ auf $0 \leq (b_n)^{r_n} < (b_n)^{r/2} < (\varepsilon^{2/r})^{r/2} = \varepsilon$, erhalten also wie behauptet $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n)^{r_n} = 0$. \square

Als Nächstes kommen wir zu einer weiteren zentralen Grundfunktion der Analysis, die eng mit Potenzen verbunden ist.

Satz V.2.6.

(1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ bilden die Intervalle

$$\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \right] \text{ mit } n \in \mathbb{N}_{>|x|}$$

eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}_{>0}$. Der Kern dieser Intervallschachtelung bezeichnen wir mit $\exp(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ und nennen die zugehörige Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ die (natürliche) Exponentialfunktion. Insbesondere hat die natürliche Exponentialfunktion \exp die Grenzwertdarstellungen

$$(V.2.1) \quad \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(2) Die natürliche Exponentialfunktion \exp ist auch durch die Potenzen der Eulerschen Zahl $e := \exp(1) \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben: Es gilt

$$(V.2.2) \quad \exp(x) = e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Man bezeichnet e auch als die natürliche Basis der Exponentialfunktion.

(3) Für die natürliche Exponentialfunktion gelten die fundamentalen Ungleichungen

$$(V.2.3) \quad e^x \geq 1+x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } e^x \leq \frac{1}{1-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{<1},$$

wobei die Gleichheit in jeder der Ungleichungen einzig für $x = 0$ gilt.

Bemerkungen V.2.7.

- Die Eulersche Zahl e ist, wie später eventuell noch gezeigt wird, *irrational*. Ihre näherungsweise Berechnung ergibt

$$e = 2,71828\dots$$

Tatsächlich ist e gemäß einem Satz von C. Hermite (1822–1901) aus dem Jahr 1873 sogar *transzendent*, das heißt, e ist nicht Nullstelle eines Polynoms aus $\mathbb{Q}[X]$.

- Als entscheidende Konsequenz von Teil (V.2.2) des Satzes gilt für die Exponentialfunktion \exp das Exponentialgesetz

$$\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS DES SATZES. Wir beginnen mit dem Beweis von Teil (V.2.1). Dazu fixieren wir $x \in \mathbb{R}$ und schreiben

$$a_n(x) := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ und } b_n(x) := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

für die Randpunkte der betrachteten Intervalle. Im vorigen Beweis wurde bereits gezeigt, dass $(a_n(x))_{n \in \mathbb{N}_{>-x}}$ monoton wächst, und wegen $b_n(x) = \frac{1}{a_n(-x)}$ folgt, dass $(b_n(x))_{n \in \mathbb{N}_{>x}}$ monoton fällt. Zudem entnehmen wir für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$ aus $\frac{a_n(x)}{b_n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$, dass $a_n(x) \leq b_n(x)$ gilt. Somit sind die betrachteten Intervalle nicht-leer und liegen für $n > |x|$ gemäß $[a_n(x), b_n(x)] \supset [a_{n+1}(x), b_{n+1}(x)]$ ineinander. Damit tatsächlich eine Intervallschachtelung vorliegt, ist noch zu zeigen, dass die Intervalllänge $b_n(x) - a_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 strebt. Hierfür schätzen wir für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > |x|$ erst $\frac{a_n(x)}{b_n(x)} = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$ per Bernoulli-Ungleichung ab und erhalten mit $0 \leq b_n(x) - a_n(x) \leq \frac{x^2}{n} b_n(x) \leq \frac{x^2}{n} b_{n_0}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ die benötigte Konvergenz (wobei $n_0 \in \mathbb{N}_{>x}$ beliebig und die letzte Abschätzung durch $b_{n_0}(x)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ gültig ist). Die Grenzwertdarstellungen ergeben sich dann aus der in Abschnitt V.1 beobachteten Konvergenz der Randpunkte einer Intervallschachtelung.

Zum Beweis von Teil (V.2.2) rechnen wir für $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ zunächst mit den Grenzwertdarstellungen gemäß Teil (V.2.1) und den Grenzwertrechenregeln:

$$\begin{aligned} \exp(kx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{kx}{kn}\right)^{kn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]^k = \exp(x)^k, \\ \exp(-x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \exp(x)^{-1}. \end{aligned}$$

Durch mehrfache Anwendung dieser Regeln erhalten wir

$$\exp(\pm \ell/m) = \exp(\ell/m)^{\pm 1} = \exp(1/m)^{\pm \ell} = (\exp(1/m)^m)^{\pm \ell/m} = \exp(1)^{\pm \ell/m} = e^{\pm \ell/m}$$

für beliebige $\ell, m \in \mathbb{N}$, zusammen mit der trivialen Beobachtung $\exp(0) = 1$ also tatsächlich $\exp(q) = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Um diese Gleichheit auf ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ zu übertragen, betrachten wir eine Folge $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}_{<x}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_k = x$. Nun gilt $a_n(x) \geq a_n(q_k)$ für² $n \gg 1$ und im Limes $n \rightarrow \infty$ dann auch $\exp(x) \geq \exp(q_k)$. Insgesamt erhalten wir dann $\exp(x) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \exp(q_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{q_k} = e^x$ mit der Grenzwertregel für Potenzen. Eine analoge Approximation von x aus $\mathbb{Q}_{>x}$ gibt $\exp(x) \leq e^x$. Damit ist $\exp(x) = e^x$ gezeigt.

Zum Beweis von Teil (V.2.3) schätzen wir einerseits über die linken Randpunkte der Intervallschachtelung aus Teil (V.2.1) und die Bernoulli-Ungleichung

$$e^x = \exp(x) \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 1+x \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ab, wofür $n \in \mathbb{N}$ nur $n > \max\{-x, 1\}$ erfüllen muss. Indem wir dies mit $-x$ anstelle x anwenden, ergibt sich dann auch

$$e^x = \frac{1}{e^{-x}} < \frac{1}{1-x} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{<1} \setminus \{0\}.$$

Für $x = 0$ gelten die zugehörigen schwachen Ungleichungen trivialerweise. □

Korollar V.2.8. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

BEWEIS. Wir argumentieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Beim Induktionsanfang für $n = 1$ sind alle drei Terme gleich 1. Für den Schritt von $n \in \mathbb{N}$ zu $n + 1$ nehmen wir $e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne \left(\frac{n}{e}\right)^n$ an. Mit der Induktionsannahme und der Abschätzung

$$e \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

von e durch einen linken Randpunkt der Intervallschachtelung im vorigen Satz erhalten wir dann

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1)e \left(\frac{n}{e}\right)^n \geq (n+1) \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n = e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

²Tatsächlich reicht $n > -q_k$, womit die Basis in der Definition von $a_n(q_k)$ und $a_n(x)$ positiv ist.

Analog ergibt sich mit Induktionsannahme und Abschätzung $e \leq (1 - \frac{1}{n+1})^{-(n+1)} = (\frac{n+1}{n})^{n+1}$ durch einen rechten Randpunkt

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1)n e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq (n+1)n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{e}\right)^n = (n+1)e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Mit den beiden erhaltenen Abschätzungen ist der Induktionsschritt komplett. \square

In engem Zusammenhang mit Potenzen und Exponentialfunktionen steht folgendes Konzept:

Satz V.2.9. Für jedes $b \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und jedes $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es genau eine Zahl $\log_b x \in \mathbb{R}$, genannt der Logarithmus von x zur Basis b , mit

$$b^{\log_b x} = x.$$

Den Logarithmus zur Basis e bezeichnet man als natürlichen Logarithmus und schreibt kurz \log oder \ln für \log_e . Für $b, b_n \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$, $x, x_n, y \in \mathbb{R}_{>0}$ und $r \in \mathbb{R}$ gelten dann:

- *Monotonie-Eigenschaft:*

$$x < y \implies \begin{cases} \log_b x < \log_b y, & \text{falls } b > 1, \\ \log_b x > \log_b y, & \text{falls } b < 1. \end{cases}$$

- *Unter anderem gelten die Rechenregeln:*

$$\begin{aligned} \log_b 1 &= 0, & \log_b(xy) &= \log_b x + \log_b y, \\ \log_b(x^r) &= r \log_b x, & \log_b x &= \frac{\log x}{\log b}, & x^r &= e^{r \log x}, \end{aligned}$$

- *Fundamentale Ungleichungen für den natürlichen Logarithmus sind:*

$$\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{>-1},$$

wobei Gleichheit in jeder der Ungleichungen einzig für $x = 0$ gilt,

- *Grenzwertregel:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \log_{b_n} x_n = \log_b x.$$

Bemerkung V.2.10. Mit anderen Worten bedeutet die definierende Eigenschaft des Logarithmus, dass die Logarithmusfunktion $\log_b: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ zur Basis b die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $r \mapsto b^r$ zur Basis b ist.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Existenz von $\log_b x$ für $b \in (1, \infty)$, $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Dazu benutzen wir, dass $R_x := \{r \in \mathbb{R} \mid b^r \leq x\}$ wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} b^{-n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b^n = \infty$ und $b^n \leq b^r$ für $n \leq r$ nicht-leer und von oben beschränkt ist. Somit können wir $\log_b x := \sup R_x \in \mathbb{R}$ wählen und dafür $b^{\log_b x} = x$ wie folgt nachweisen. Einerseits ist $\frac{1}{n} + \log_b x \notin R_x$, also $b^{\frac{1}{n} + \log_b x} > x$ und nach Grenzwertregeln und Vergleichsprinzip dann $b^{\log_b x} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\frac{1}{n} + \log_b x} \geq x$.

Andererseits ist $\log_b x = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ für gewisse $r_n \in R_x$, für die $b^{r_n} \leq x$ gilt. Es folgt $b^{\log_b x} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{r_n} \leq x$.

Insgesamt gilt wie behauptet $b^{\log_b x} = x$. Für $b \in (0, 1)$, $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ist R_x nicht-leer und von unten beschränkt, man kann $\log_b x := \inf R_x \in \mathbb{R}$ wählen und analog $b^{\log_b x} = x$ zeigen.

Die Monotonie-Eigenschaft, die Rechenregeln und die Grenzwertregel für den Logarithmus ergeben sich problemlos aus denen für Potenzen.

Die fundamentalen Ungleichungen für \log geht man an, indem man die fundamentalen Ungleichungen der natürlichen Exponentialfunktion in folgender Form schreibt:

$$e^{\frac{x}{1+x}} \leq \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1+x} = 1+x \leq e^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}_{>-1},$$

wobei dann $\frac{x}{1+x} \in \mathbb{R}_{<1}$ ist. Da alle Terme positiv sind, kann man \log auf diese Ungleichungen anwenden und erhält in Anbetracht der Monotonie die letzten Behauptungen. \square

Zum Abschluss dieses Abschnitts erwähnen wir kurz, dass mit allgemeinen Potenzen auch allgemeine Mittelwerte gebildet werden können:

Bemerkung V.2.11. Für $n \in \mathbb{N}$, ein Tupel $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ positiver Zahlen $x_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und ein Tupel $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ von Gewichten $t_i \in [0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ erklärt man den (gewichteten) *Potenz-Mittelwert* von x_1, x_2, \dots, x_n zum Exponenten $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ als

$$\text{PM}_s(x; t) := \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i^s \right)^{\frac{1}{s}} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Spezialfälle dieser Bildung sind das (gewichtete) *arithmetische Mittel* und das (gewichtete) *harmonische Mittel*

$$\text{AM}(x; t) := \text{PM}_1(x; t) = \sum_{i=1}^n t_i x_i \quad \text{und} \quad \text{HM}(x; t) := \text{PM}_{-1}(x; t) = \left(\sum_{i=1}^n t_i x_i^{-1} \right)^{-1}.$$

Ein Basis-Fall gleicher Gewichtung ist $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$; dann läßt man t in den Formeln weg. Als sinnvoller Ersatz für den Potenz-Mittelwert zum bisher ausgeschlossenen Exponenten $s = 0$ erweist sich das (gewichtete) *geometrische Mittel*

$$\text{GM}(x; t) := \prod_{i=1}^n (x_i)^{t_i} \in \mathbb{R}_{>0} =: \text{PM}_0(x; t).$$

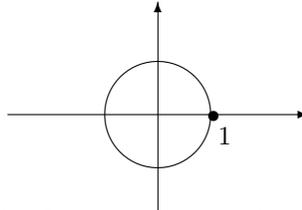
Mit diesen Festlegungen gilt für $x \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, $t \in [0, 1]^n$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ ganz allgemein die Ungleichung zwischen Potenzmittelwerten

$$\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq \text{PM}_r(x; t) \leq \text{PM}_s(x; t) \leq \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad \text{falls } r \leq s \text{ in } \mathbb{R}.$$

V.3. Kreiszahl und Kreisfunktionen

Die *Kreiszahl* π gibt die *halbe Länge einer Kreislinie mit Radius 1* an, wobei man als Modellfall einer solchen Kreislinie meist die *Einheitskreislinie*

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$



in der Gaußschen Zahlenebene \mathbb{C} heranzieht. Die anschauliche Vorstellung von π anhand der Kreislinie ist wichtig und entscheidend, muss für eine formale Definition aber dennoch präzisiert werden. Unter vielen Möglichkeiten zur präzisen Definition wählen wir hier eine geometrisch naheliegende und relativ elementare Variante:

Definition V.3.1. Wir setzen

$$\xi_1 := -1 \in S^1, \quad \xi_2 := i \in S^1 \quad \text{und} \quad \text{rekursiv} \quad \xi_{n+1} := \frac{\xi_n + 1}{|\xi_n + 1|} \in S^1 \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

Die Kreiszahl π definieren wir dann als

$$\pi := \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} |\xi_n - 1| \in \mathbb{R}_{>0}$$

Die Verbindung zum Kreis und auch die Wohldefiniertheit erfordern hierbei aber weitere Erklärungen:

Bemerkungen V.3.2.

- (1) Der geometrischen Hintergrund der Definition klärt sich mit folgenden Beobachtungen auf:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(\xi_{n+1})^2 = \xi_n$, und ξ_n ist eine *primitive* 2^n -te Einheitswurzel, also $\xi^{2^n} = 1$, aber $\xi^k \neq 1$ für $1 \leq k < 2^n$:
Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ rechnet man mit Hilfe der komplexen Konjugation

$$\begin{aligned}
(\xi_{n+1})^2 &= \frac{(\xi_n+1)^2}{(\xi_n+1)\overline{(\xi_n+1)}} \\
&= \frac{\xi_n^2+2\xi_n+1}{|\xi_n|^2+\xi_n+\overline{\xi_n}+1} \\
&= \frac{\xi_n^2+2\xi_n+\xi_n\overline{\xi_n}}{1+\xi_n+\overline{\xi_n}+1} \\
&= \frac{\xi_n(\xi_n+2+\overline{\xi_n})}{2+\xi_n+\overline{\xi_n}} = \xi_n.
\end{aligned}$$

Daneben ist $(\xi_2)^2 = \xi_1$ klar, und die Einheitswurzel-Eigenschaft folgt per Induktion.

- Die 2^n Zahlen $1, \xi_n, (\xi_n)^2, (\xi_n)^3, \dots, (\xi_n)^{2^n-1}$ sind die Ecken eines in die Kreislinie S^1 einbeschriebenen regulären 2^n -Ecks mit 2^n Seiten der gleichen Länge $|\xi_n - 1|$ und dementsprechend mit halbem Umfang $2^{n-1}|\xi_n - 1|$:
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$ gilt einerseits $|(\xi_n)^k| = |\xi_n|^k = 1$ und andererseits $|(\xi_n)^{k+1} - (\xi_n)^k| = |\xi_n^k(\xi - 1)| = |(\xi_n)^k||\xi_n - 1| = |\xi_n - 1|$. Deshalb liegen die $(\xi_n)^k$ auf S^1 , und je zwei benachbarte (mit gleichem festem n) haben den festen Abstand $|\xi_n - 1|$.
 - Die halben Umfänge $2^{n-1}|\xi_n - 1|$ der einbeschriebenen 2^n -Ecke geben für $n \gg 1$ Näherungen an die Länge der halben Kreislinie. Diese Näherungen sind in dem Sinn gut, dass $2^{n-1}|\xi_n - 1|$ ziemlich schnell gegen π konvergiert).
- (2) Die Kreiszahl π ist irrational und gemäß einem Satz von F. von Lindemann (1852–1939) aus dem Jahr 1882 sogar transzendent. Ihre näherungsweise Berechnung ergibt

$$\pi = 3,14159\dots$$

- (3) Die Existenz des Limes in der Definition ist nicht selbstverständlich, und wir müssen diese tatsächlich noch sicherstellen:

BEWEIS FÜR DIE EXISTENZ DER LIMES IN DER DEFINITION. Wir verifizieren, dass $(2^{n-1}|\xi_n - 1|)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsende, beschränkte Folge ist, woraus die Existenz mit dem Monotonie-Kriterium folgt.

Um zunächst einzusehen, dass $(2^{n-1}|\xi_n - 1|)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend ist, schätzen wir mit der Dreiecksungleichung $|\xi_n - 1| \leq |\xi_n - \xi_{n+1}| + |\xi_{n+1} - 1| = |(\xi_{n+1})^2 - \xi_{n+1}| + |\xi_{n+1} - 1| = 2|\xi_{n+1} - 1|$ ab und erhalten wie benötigt $2^{n-1}|\xi_n - 1| \leq 2^n|\xi_{n+1} - 1|$.

Für die Beschränktheit (und Nutzung in einem späteren Beweis) überlegen wir uns für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 2\}$, dass $\operatorname{Re}((\xi_n)^k) \in [0, 1]$ fallend und $\operatorname{Im}((\xi_n)^k) \in [0, 1]$ wachsend von k abhängt. Wegen $|(\xi_n)^k| = 1$ ist hierbei klar, dass die Real- und Imaginärteile ≤ 1 sind. Dass diese auch ≥ 0 sind, kann man durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zeigen: Dabei erhält man im Induktionsschritt $\operatorname{Re}(\xi_{n+1}) \geq 0$ und $\operatorname{Im}(\xi_{n+1}) \geq 0$ direkt aus der rekursiven Definition von ξ_{n+1} , beobachtet $(\xi_{n+1})^k = (\xi_n)^{k/2} \geq 0$ für gerade $k \in \{0, 2, 4, \dots, 2^{n-1}\}$ und rechnet für ungerade $k \in \{1, 3, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ die Behauptung mit $(\xi_{n+1})^k = 2\operatorname{Re}(\xi_{n+1})(\xi_n^{(k+1)/2} + \xi_n^{(k-1)/2}) \geq 0$ nach. Die Monotonie-Behauptungen erhält man dann mit dem Wissen $\operatorname{Re}((\xi_n)^k), \operatorname{Im}((\xi_n)^k) \in [0, 1]$ und $|(\xi_n)^k| = 1$ aus den Definition der Multiplikation und des Betrags in \mathbb{C} . Genauer schätzt man für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, k \in \{1, 2, \dots, 2^n - 2\}$ gemäß $\operatorname{Re}((\xi_n)^k) = \operatorname{Re}(\xi_n)\operatorname{Re}((\xi_n)^{k-1}) - \operatorname{Im}(\xi_n)\operatorname{Im}((\xi_n)^{k-1}) \leq \operatorname{Re}(\xi_n)\operatorname{Re}((\xi_n)^{k-1}) \leq \operatorname{Re}((\xi_n)^{k-1})$ ab und nutzt dann $\operatorname{Im}((\xi_n)^k) = \sqrt{1 - \operatorname{Re}((\xi_n)^k)^2}$.

Zum eigentlichen Nachweis der Beschränktheit schätzen wir nun für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ folgendermaßen ab, wobei wir nacheinander die Gleichheit der Seitenlängen, die Ungleichung $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ für $z \in \mathbb{C}$, die gerade gezeigte Monotonie (ganz entscheidend!) und Teleskop-Summation samt den

Identitäten $(\xi_n)^0 = 1$, $(\xi_n)^{2^{n-2}} = \xi_2 = i$ verwenden:

$$\begin{aligned}
2^{n-1}|\xi_n - 1| &= 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} |(\xi_n)^k - (\xi_n)^{k-1}| \\
&\leq 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} |\operatorname{Re}((\xi_n)^k - (\xi_n)^{k-1})| + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} |\operatorname{Im}((\xi_n)^k - (\xi_n)^{k-1})| \\
&= 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} (\operatorname{Re}((\xi_n)^{k-1}) - \operatorname{Re}((\xi_n)^k)) + 2 \sum_{k=1}^{2^{n-2}} (\operatorname{Im}((\xi_n)^k) - \operatorname{Im}((\xi_n)^{k-1})) \\
&= 2(\operatorname{Re}(1) - \operatorname{Re}(i)) + 2(\operatorname{Im}(i) - \operatorname{Im}(1)) = 4
\end{aligned}$$

Wir erhalten $2^{n-1}|\xi_n - 1| \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$, womit der Beweis komplett ist. \square

Nach der Kreiszahl führen wir nun die Kreisfunktionen ein.
Zunächst geht es uns um eine Abbildung³

$$\operatorname{cis}: \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

mit folgender anschaulicher Bedeutung: Jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ wird auf den Endpunkt $\operatorname{cis} \varphi$ des vom Anfangspunkt 1 ausgehenden Kreisbogens in S^1 mit Länge $|\varphi|$ abgebildet, wobei der Kreisbogen für $\varphi \geq 0$ von 1 an gegen den Uhrzeigersinn aufgetragen, für $\varphi \leq 0$ im Uhrzeigersinn. Mit anderen Worten bildet der Ortsvektor von $\operatorname{cis} \varphi \in S^1$ mit der positiven x -Achse gerade den im Bogenmaß bemessenen Winkel $|\varphi|$ (je nach Vorzeichen von φ gegen/im Uhrzeigersinn an die Achse angetragen). Für eine formale Definition gilt es diese Vorstellung aber wieder zu präzisieren, was wie bei der Kreiszahl π mit Hilfe der 2^n -ten Einheitswurzeln ξ_n erfolgen kann:

Definition V.3.3. Es bezeichne ξ_n die primitive 2^n -te Einheitswurzel aus der vorausgehenden Definition der Kreiszahl π , und für $\varphi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ sei $k_n(\varphi) \in \mathbb{Z}$ die eindeutige ganze Zahl mit $\frac{2\pi k_n(\varphi)}{2^n} \leq \varphi < \frac{2\pi(k_n(\varphi)+1)}{2^n}$, also $k_n(\varphi) = \lfloor \frac{2^n \varphi}{2\pi} \rfloor$. Dann definieren wir

$$\operatorname{cis} \varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)} \in S^1.$$

Auch diese Definition bedarf der näheren Erläuterung:

Bemerkungen V.3.4.

(1) Insbesondere garantiert die Definition

$$(V.3.1) \quad \operatorname{cis} \frac{2\pi k}{2^m} = (\xi_m)^k \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N},$$

denn es gilt $k_n(\frac{2\pi k}{2^m}) = 2^{n-m}k$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$, und somit ist $(\xi_n)^{k_n(\frac{2\pi k}{2^m})} = (\xi_n)^{2^{n-m}k} = (\xi_m)^k$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$ konstant. Also realisiert die Definition von cis in diesen Fällen die anschaulichen Bedeutung, denn bei $(\xi_m)^k$ handelt es sich um 2^m gleichmäßig auf der Kreislinie S^1 verteilte 2^m -te Einheitswurzeln, zwischen zwei benachbarten von diesen liegt ein Kreisbogen der Länge $\frac{2\pi}{2^m}$, und $(\xi_m)^k$ liegt wie benötigt am Ende eines vom Anfangspunkt 1 ausgehenden Kreisbogens in S^1 der Länge $\frac{2\pi|k|}{2^m}$ (je nach Vorzeichen von k gegen/im Uhrzeigersinn).

(2) Die Existenz des Limes in der Definition müssen wir auch hier sicherstellen:

BEWEIS FÜR DIE EXISTENZ DES LIMES IN DER DEFINITION. Wir beobachten zuerst, dass stets

$$k_{n+1}(\varphi) \geq 2k_n(\varphi)$$

gilt und tatsächlich $k_{n+1}(\varphi)$ entweder gleich $2k_n(\varphi)$ oder gleich $2k_n(\varphi)+1$ ist. Dies folgt aus der Definition und der Zerlegung $\left[\frac{k_n(\varphi)}{2^n}, \frac{k_n(\varphi)+1}{2^n} \right) = \left[\frac{2k_n(\varphi)}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(\varphi)+1}{2^{n+1}} \right) \sqcup \left[\frac{2k_n(\varphi)+1}{2^{n+1}}, \frac{2k_n(\varphi)+2}{2^{n+1}} \right)$.

³Dabei steht „cis“ für „Cosinus plus i Sinus“. Der Grund dieser Benennung wird demnächst klar.

Im Fall $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ist zudem $k_n(\varphi) \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$. Mit der bei der Definition von π gezeigten Monotonie von $\operatorname{Re}((\xi_n)^k)$ und $\operatorname{Im}((\xi_n)^k)$ in k erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}((\xi_{n+1})^{k_{n+1}(\varphi)}) &\leq \operatorname{Re}((\xi_{n+1})^{2k_n(\varphi)}) = \operatorname{Re}((\xi_n)^{k_n(\varphi)}), \\ \operatorname{Im}((\xi_{n+1})^{k_{n+1}(\varphi)}) &\geq \operatorname{Im}((\xi_{n+1})^{2k_n(\varphi)}) = \operatorname{Im}((\xi_n)^{k_n(\varphi)}).\end{aligned}$$

Also verhalten sich die Real- und Imaginärteile von $(\xi_n)^{k_n(\varphi)}$ monoton und mit $|(\xi_n)^{k_n(\varphi)}| = 1$ auch beschränkt. Nach dem Monotonie-Kriterium konvergieren die Real- und Imaginärteile, womit dann auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)} \in \mathbb{C}$ existiert. Nach den Grenzwertregeln hat mit $(\xi_n)^{k_n(\varphi)}$ auch der Grenzwert Betrag 1, liegt also in S^1 .

Der Fall $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ lässt sich darauf zurückführen, denn wir haben jetzt die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi - \frac{\pi}{2})}$ mit $\varphi - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und können dann mittels $k_n(\varphi) = k_n(\varphi - \frac{\pi}{2}) + 2^{n-2}$ und $(\xi_n)^{k_n(\varphi)} = (\xi_n)^{k_n(\varphi - \frac{\pi}{2})} i$ auf die Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)}$ schließen können. Ähnlich lassen sich auch beliebige $\varphi \in \mathbb{R}$ auf den behandelten Fall zurückführen. \square

Tatsächlich erweist sich cis als surjektiv (auf die Einheitskreislinie), was durch den folgenden Satz verallgemeinert wird:

Satz V.3.5 (über die **Polardarstellung** komplexer Zahlen). *Für jedes⁴ $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es einen sogenannten **Polarwinkel** $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $z = |z| \operatorname{cis} \varphi$.*

BEWEIS. Wir nehmen zunächst $z \in S^1$, $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ an. Wegen der bei der Definition von π gezeigten fallenden Monotonie von $\operatorname{Re}((\xi_n)^k)$ in $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$ samt $\operatorname{Re}((\xi_n)^0) = 1$, $\operatorname{Re}((\xi_n)^{2^{n-2}}) = 0$ existiert für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ein eindeutiges $k_n \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$ mit $\operatorname{Re}((\xi_n)^{k_n}) \geq \operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}((\xi_n)^{k_n+1})$. Wegen $|(\xi_n)^{k_n+1} - (\xi_n)^{k_n}| = |\xi_n - 1| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (z.B. mit der früheren Abschätzung für $2^{n-1}|\xi_n - 1|$) bedeutet dies insbesondere $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}((\xi_n)^{k_n}) = \operatorname{Re}(z)$. Da die betrachteten Zahlen Betrag 1 und Imaginärteil ≥ 0 haben, folgt auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n} = z$. Wegen $(\xi_{n+1})^2 = \xi_n$ lesen wir aus der Wahl von k_n außerdem ab, dass k_{n+1} gleich $2k_n$ oder gleich $2k_n+1$ ist, womit insbesondere $[\frac{k_{n+1}}{2^{n+1}}, \frac{k_{n+1}+1}{2^{n+1}}) \subset [\frac{k_n}{2^n}, \frac{k_n+1}{2^n})$ gilt. Per Monotonie-Kriterium folgt die Existenz von $\varphi := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi k_n}{2^n} \in \mathbb{R}$ mit $\frac{2\pi k_n}{2^n} \leq \varphi \leq \frac{2\pi(k_n+1)}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Hieraus erhalten wir $k_n(\varphi) = k_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sobald wir — eine kleine technische Feinheit — noch begründen, dass die rechte Ungleichung immer strikt ist. Dies könnte wegen der schon gezeigten Inklusion der Intervalle aber nur scheitern, wenn für $n \gg 1$ die rechten Randpunkte $\frac{2\pi(k_n+1)}{2^n}$ alle übereinstimmen, für $n \gg 1$ stets $k_{n+1} = 2k_n+1$ gilt und für $n \gg 1$ die Zahlen $(\xi_n)^{k_n+1}$ alle übereinstimmen. Dann wäre aber schon $z = (\xi_n)^{k_n+1}$ für $n \gg 1$, was im Widerspruch zur strikten Ungleichung bei der Wahl von k_n stünde. Also ist tatsächlich $k_n(\varphi) = k_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, und wir erhalten insgesamt

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)} = \operatorname{cis} \varphi.$$

Im Fall $z \in S^1$, $\operatorname{Re}(z) \leq 0 \leq \operatorname{Im}(z)$ können wir das Vorige auf $-iz$ mit $|-iz| = 1$, $\operatorname{Re}(-iz) \geq 0$, $\operatorname{Im}(-iz) \geq 0$ anwenden. Aus $-iz = \operatorname{cis} \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ erhalten wir dann $z = i \operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis}(\frac{\pi}{2} + \varphi)$. Ähnlich lassen sich die anderen Fälle mit $z \in S^1$ behandeln.

Für allgemeines $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ schließlich wenden wir das Gezeigte auf $\frac{z}{|z|} \in S^1$ und erhalten ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $\frac{z}{|z|} = \operatorname{cis} \varphi$, also $z = |z| \operatorname{cis} \varphi$. \square

Als Nächstes führen wir weitere Kreisfunktionen ein und halten Grundeigenschaften fest.

Definition V.3.6. Die Kreisfunktionen *Kosinus* und *Sinus* sind definiert als

$$\begin{aligned}\cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \varphi \mapsto \operatorname{Re}(\operatorname{cis} \varphi), \\ \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1], \varphi \mapsto \operatorname{Im}(\operatorname{cis} \varphi)\end{aligned}$$

oder mit anderen Worten durch die Gleichung

$$\operatorname{cis} \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

⁴Formal betrachtet gilt der Satz mit $0 = |0| \operatorname{cis} \varphi$ für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ auch für $z = 0$. Wegen der völligen Beliebigkeit von φ spricht man dann aber nicht von Polardarstellung oder Polarwinkel und schließt diesen Fall oft aus.

Traditionell wird $\operatorname{cis} \varphi$ als $e^{i\varphi}$ notiert. Wir sehen später, warum dies mehr ist als eine Bezeichnung.

Bemerkung V.3.7. Man kann die Definition von \cos und \sin am Einheitskreis S^1 veranschaulichen und dort auch folgende elementargeometrische Interpretation an rechtwinkligen Dreiecken ablesen: In einem Dreieck mit einem rechten Winkel und einem im Bogenmaß bemessenen Winkel $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ gibt $\cos \varphi$ das Längenverhältnis Ankathete durch Hypotenuse und $\sin \varphi$ das Längenverhältnis Gegenkathete durch Hypotenuse an.

Proposition V.3.8.

- (1) Für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt per Definition

$$(V.3.2) \quad |\operatorname{cis} \varphi| = 1 \text{ und } \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

wobei Abkürzungen wie $\cos^2 \varphi := (\cos \varphi)^2$ und $\sin^2 \varphi := (\sin \varphi)^2$ nun oft verwendet werden.

- (2) Spezielle Funktionswerte sind $\operatorname{cis}(0) = \cos(0) = 1$, $\operatorname{cis} \frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i$, $\cos \frac{\pi}{2} = \sin 0 = \sin \pi = 0$, $\cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
 (3) Die Funktion $\varphi \mapsto \operatorname{cis} \varphi$ ist periodisch mit minimaler Periode 2π , und für $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned} \operatorname{cis} \varphi = \operatorname{cis} \vartheta &\iff \varphi - \vartheta = 2k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{cis}(\varphi + 2\pi) &= \operatorname{cis} \varphi, \\ \operatorname{cis}(\varphi + \pi) &= -\operatorname{cis} \varphi. \end{aligned}$$

Insbesondere bedeutet dies, dass der Polarwinkel in der Polardarstellung in ganz \mathbb{R} nur bis auf Addition von Vielfachen von 2π eindeutig ist, beispielsweise in $(-\pi, \pi]$ aber vollständig eindeutig ist. Hieraus resultiert eindeutige *Argumentfunktion* $\operatorname{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ mit $|z| \operatorname{cis}(\operatorname{Arg} z) = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Außerdem folgt, dass auch \cos und \sin minimale Periode 2π haben und den Regeln $\cos(\varphi+2\pi) = \cos \varphi$, $\cos(\varphi+\pi) = -\cos \varphi$, $\sin(\varphi+2\pi) = \sin \varphi$, $\sin(\varphi+\pi) = -\sin \varphi$ sowie $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin \varphi$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ genügen.

- (4) Für die Kreisfunktionen gelten die Paritäts-Regeln

$$(V.3.3) \quad \operatorname{cis}(-\varphi) = \overline{\operatorname{cis}(\varphi)} = \frac{1}{\operatorname{cis}(\varphi)}, \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi, \quad \sin(-\varphi) = -\sin \varphi \text{ für } \varphi \in \mathbb{R}.$$

Damit ist \cos eine gerade Funktion und \sin eine ungerade Funktion.

- (5) Die *Additionstheoreme* für die Kreisfunktionen besagen

$$\begin{aligned} \operatorname{cis}(\varphi+\vartheta) &= \operatorname{cis}(\varphi) \cdot \operatorname{cis}(\vartheta), \\ \cos(\varphi\pm\vartheta) &= (\cos \varphi)(\cos \vartheta) \mp (\sin \varphi)(\sin \vartheta), \\ \sin(\varphi\pm\vartheta) &= (\sin \varphi)(\cos \vartheta) \pm (\cos \varphi)(\sin \vartheta) \end{aligned}$$

für alle $\varphi, \vartheta \in \mathbb{R}$. Iterative Anwendung des Additionstheorems für cis gibt die *Formel von De Moivre* für Winkel-Vervielfachung

$$\operatorname{cis}(k\varphi) = (\operatorname{cis}(\varphi))^k = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Durch Ausmultiplizieren der rechten Seite mit dem Binomialsatz und Bildung des Realteils erhält man die Vervielfachungs-Formel für den Kosinus

$$\cos(k\varphi) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j} (\sin \varphi)^{2j} (\cos \varphi)^{k-2j}$$

für $\varphi \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Analog führt Bildung des Imaginärteils zu einer Formel für den Sinus.

(6) Fundamentale Ungleichungen für die Kreisfunktion sind

$$\begin{aligned} |\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis} \vartheta| &\leq |\varphi - \vartheta| \text{ für } \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}, \\ |\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis} \vartheta| &\geq |\varphi - \vartheta| \frac{|\operatorname{cis} \varphi + \operatorname{cis} \vartheta|}{2} \\ &= |\varphi - \vartheta| \sqrt{1 - \frac{1}{4} |\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis} \vartheta|^2} \text{ für } \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}, |\varphi - \vartheta| \leq \pi, \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit jeweils nur für $\varphi = \vartheta$ gilt.

Für den Sinus ergeben sich daraus

$$\begin{aligned} |\sin \varphi - \sin \vartheta| &\leq |\varphi - \vartheta| \text{ für } \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}, \\ \sin \varphi &\leq \varphi \text{ für } \varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ \sin \varphi &\geq \varphi \cos \varphi \text{ für } \varphi \in [0, \pi] \end{aligned}$$

mit Gleichheit jeweils nur für $\varphi = \vartheta$ bzw. für $\varphi = 0$.

Für den Kosinus folgt

$$\begin{aligned} |\cos \varphi - \cos \vartheta| &\leq |\varphi - \vartheta| \text{ für } \varphi, \vartheta \in \mathbb{R}, \\ \cos \varphi &\leq \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}} \text{ für } \varphi \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \\ \cos \varphi &\geq \sqrt{1 - \varphi^2} \text{ für } \varphi \in [-1, 1] \end{aligned}$$

mit Gleichheit jeweils nur für $\varphi = \vartheta$ bzw. für $\varphi = 0$.

BEWEIS. Wir beschränken uns größtenteils auf Nachweise der Eigenschaften von cis , weil die Eigenschaften von \cos und \sin oft durch Real- und Imaginärteil-Bildung folgen.

Zunächst ist (V.3.2) nach der Definition von cis als S^1 -wertige Abbildung klar.

Die speziellen Werte in (2) an den Stellen $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$ und zudem $\operatorname{cis}(2\pi) = 1$ ergeben sich aus Bemerkung (V.3.1). Zudem erhalten wir $\cos \varphi, \sin \varphi \in (0, 1)$ für alle $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ aus der früher schon gezeigten Monotonie der Real- und Imaginärteile von $(\xi_n)^k$ in $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$.

Das Additionstheorem für cis in (5) ist die Grundlage der weiteren Eigenschaften und lässt sich wie folgt zeigen: Nach Addition der Ungleichungen für $k_n(\varphi), k_n(\vartheta)$ lesen wir aus $\frac{2\pi(k_n(\varphi)+k_n(\vartheta))}{2^n} \leq \varphi + \vartheta < \frac{2\pi(k_n(\varphi)+k_n(\vartheta)+2)}{2^n}$ ab, dass $k_n(\varphi + \vartheta)$ gleich $k_n(\varphi) + k_n(\vartheta)$ oder gleich $k_n(\varphi) + k_n(\vartheta) + 1$ ist. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1$ erhalten wir daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi + \vartheta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi) + k_n(\vartheta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)} (\xi_n)^{k_n(\vartheta)}$, und insgesamt folgt $\operatorname{cis}(\varphi + \vartheta) = (\operatorname{cis} \varphi)(\operatorname{cis} \vartheta)$.

Die Werte an den Stellen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{6}$ in (2) ergeben sich durch Lösen quadratischer Gleichungen. Zum Beispiel kann man für $\cos \frac{\pi}{6} \in (0, 1)$ von $0 = \cos \frac{\pi}{2} = (\cos^2 \frac{\pi}{6} - 3 \sin^2 \frac{\pi}{6}) \cos \frac{\pi}{6}$ gemäß (5) und $\cos^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} = 1$ gemäß (V.3.2) ausgehen.

Zum Nachweis von (V.3.3) bemerken wir $(\operatorname{cis} \varphi)(\operatorname{cis}(-\varphi)) = \operatorname{cis}(t - t) = \operatorname{cis} 0 = 1$ gemäß (5) und damit $\operatorname{cis}(-\varphi) = \frac{1}{\operatorname{cis} \varphi}$. Wegen (V.3.2) ist zudem $\frac{1}{\operatorname{cis} \varphi} = \operatorname{cis} \varphi$.

Für die 2π -Periodizität in (3) reicht in Anbetracht von (V.3.3) und (5) der Nachweis von $\operatorname{cis} \varphi = 1 \iff \varphi \in 2\mathbb{Z}\pi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$. Bei letzterer Äquivalenz ist, \iff mit $\operatorname{cis}(2\pi) = 1$ und (5) klar, und für \implies brauchen wir nur noch $\operatorname{cis} \varphi \neq 1$ für $\varphi \in (0, 2\pi)$ nachzuweisen. Dabei kennen wir die Werte $\operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = i$, $\operatorname{cis} \pi = -1$ und $\operatorname{cis} \frac{3\pi}{2} = -i$ bereits. Zudem hat $\operatorname{cis} \varphi$ für $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ Real- und Imaginärteil $\neq 0$, und mit (5) folgt, dass auch $\operatorname{cis}(\varphi + \frac{\pi}{2}) = i \operatorname{cis} \varphi$, $\operatorname{cis}(\varphi + \pi) = -\operatorname{cis} \varphi$ und $\operatorname{cis}(\varphi + \frac{3\pi}{2}) = -i \operatorname{cis} \varphi$ mit $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ alle Real- und Imaginärteil $\neq 0$ haben. Somit sind all diese Werte wie benötigt $\neq 1$. \square

Etwas aufwändiger gestalten sich die Nachweise der Ungleichungen in (6).

BEWEIS. Wir zeigen $|\operatorname{cis} \varphi - 1| \leq |\varphi|$ für $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ist dies erledigt, so folgt mit (V.3.3), (5) dasselbe für $\varphi \in \mathbb{R}_{< 0}$ und allgemein $|\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis} \vartheta| = \left| \frac{\operatorname{cis} \varphi}{\operatorname{cis} \vartheta} - 1 \right| |\operatorname{cis} \vartheta| = |\operatorname{cis}(\varphi - \vartheta) - 1| \leq |\varphi - \vartheta|$. Zum Beweis von $|\operatorname{cis} \varphi - 1| \leq \varphi$ für $\varphi \geq 0$ kombinieren wir die ähnlich schon früher benutzte Abschätzung $|(\xi_n)^k - 1| \leq$

$\sum_{j=1}^k |(\xi_n)^j - (\xi_n)^{j-1}| = k|\xi_n - 1|$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und die von der Definition von π herrührende Ungleichung $2^n |\xi_n - 1| \leq 2\pi$ zu

$$|(\xi_n)^{k_n(\varphi)} - 1| \leq k_n(\varphi)|\xi_n - 1| \leq \frac{2\pi k_n(\varphi)}{2^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir machen bei dieser Ungleichung den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ und erhalten wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{k_n(\varphi)} = \text{cis } \varphi$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi k_n(\varphi)}{2^n} = \varphi$ die Behauptung $|\text{cis } \varphi - 1| \leq \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Gleichheitsdiskussion lässt sich nun wie folgt erledigen. Im Fall $0 < |\varphi - \vartheta| < \pi$ erhalten wir mit

$$\begin{aligned} |\text{cis } \varphi - \text{cis } \vartheta| &= |\text{cis}[(\varphi - \vartheta)/2] - \text{cis}[(\vartheta - \varphi)/2]| \\ &= 2|\sin[(\varphi - \vartheta)/2]| \\ &< 2\sqrt{(\cos[(\varphi - \vartheta)/2] - 1)^2 + (\sin[(\varphi - \vartheta)/2])^2} \\ &= 2|\text{cis}[(\varphi - \vartheta)/2] - 1| \leq 2\left|\frac{\varphi - \vartheta}{2}\right| \\ &= |\varphi - \vartheta| \end{aligned}$$

die strikte Ungleichung. Im Fall $|\varphi - \vartheta| \geq \pi$ gilt trivial $|\text{cis } \varphi - \text{cis } \vartheta| \leq 2 < \pi \leq |\varphi - \vartheta|$. Insgesamt ist daher $\varphi = \vartheta$ der einzige Gleichheitsfall. \square

BEWEIS DER UNGLEICHUNG $|\text{cis } \varphi - \text{cis } \vartheta| \geq |\varphi - \vartheta| \frac{|\text{cis } \varphi + \text{cis } \vartheta|}{2}$. Wir zeigen

$$|\text{cis } \varphi - \text{cis}(-\varphi)| \geq |\varphi| |\text{cis } \varphi + \text{cis}(-\varphi)|$$

für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$. Ist dies erledigt, so können wir auch $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ zulassen, und über $|\text{cis } \varphi - \text{cis } \vartheta| = |\text{cis } \frac{\varphi - \vartheta}{2} - \text{cis } \frac{\vartheta - \varphi}{2}|$ folgt wie im vorigen Beweis die allgemeine Ungleichung

$$|\text{cis } \varphi - \text{cis } \vartheta| \geq |\varphi - \vartheta| |\text{cis } \varphi + \text{cis } \vartheta|/2$$

für $|\varphi - \vartheta| \leq \pi$. Wir beginnen die Argumentation mit der Betrachtung von $z = x + yi$ und $w = u + vi$ mit $|z| = |w| = 1$, $0 < u \leq x$, $0 \leq y \leq v$. Gemäß der Youngschen Ungleichung aus den Übungen oder direkter Rechnung gilt $xu + yv \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + u^2 + v^2) = 1 = u^2 + v^2$, und durch Umformung erhält man $u(x - u) \leq v(v - y)$. Als Nächstes ergibt sich

$$|z - w| = \frac{1}{u} \sqrt{u^2(x - u)^2 + u^2(v - y)^2} \leq \frac{1}{u} \sqrt{v^2 + u^2}(v - y) = \frac{1}{u}(v - y).$$

Wegen der früher gezeigten Monotonie von $(\xi_n)^j$ in j darf die resultierende Ungleichung für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $j \leq k$ in $\{1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ auf $z = (\xi_n)^{j-1}$ und $w = (\xi_n)^j$ angewandt werden und gibt

$$|(\xi_n)^j - (\xi_n)^{j-1}| \leq \frac{\text{Im}(\xi_n^j) - \text{Im}(\xi_n^{j-1})}{\text{Re}(\xi_n^j)} \leq \frac{\text{Im}(\xi_n^j) - \text{Im}(\xi_n^{j-1})}{\text{Re}(\xi_n^k)}.$$

Insgesamt erhalten wir daraus mit der Dreiecksungleichung und Teleskop-Summation die Hilfsabschätzung

$$k|\xi_n - 1| = \sum_{j=1}^k |(\xi_n)^j - (\xi_n)^{j-1}| \leq \frac{\text{Im}(\xi_n^k)}{\text{Re}(\xi_n^k)} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq 2} \text{ und } k \in \{0, 1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}.$$

Für die Hauptabschätzung wenden wir dies mit $k = k_n(\varphi)$ an (wobei $k_n(\varphi) < 2^{n-2}$ aus $\varphi < \frac{\pi}{2}$ folgt) und bekommen

$$\frac{|(\xi_n)^{k_n(\varphi)} - (\xi_n)^{-k_n(\varphi)}|}{|(\xi_n)^{k_n(\varphi)} + (\xi_n)^{-k_n(\varphi)}|} = \frac{\text{Im}(\xi_n^{k_n(\varphi)})}{\text{Re}(\xi_n^{k_n(\varphi)})} \geq k_n(\varphi)|\xi_n - 1| = \frac{2\pi k_n(\varphi)}{2^n} \cdot \frac{2^{n-1}|\xi_n - 1|}{\pi}.$$

für $n \gg 1$. Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)^{\pm k_n(\varphi)} = \text{cis}(\pm\varphi)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi k_n(\varphi)}{2^n} = \varphi$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1}|\xi_n - 1| = \pi$ die Behauptung $\frac{|\text{cis } \varphi - \text{cis}(-\varphi)|}{|\text{cis } \varphi + \text{cis}(-\varphi)|} \geq \varphi$.

Auch bei der hier bewiesenen Ungleichung lässt sich die Gleichheitsdiskussion im Nachhinein durchführen. Ähnlich wie oben überlegen wir uns im Fall $0 < |\varphi - \vartheta| < \pi$ dazu

$$\begin{aligned}
\frac{|\operatorname{cis} \varphi - \operatorname{cis} \vartheta|}{|\operatorname{cis} \varphi + \operatorname{cis} \vartheta|} &= \frac{|\sin[(\varphi - \vartheta)/2]|}{|\cos[(\varphi - \vartheta)/2]|} \\
&= 2 \frac{|\sin[(\varphi - \vartheta)/4]| |\cos[(\varphi - \vartheta)/4]|}{\cos^2[(\varphi - \vartheta)/4] - \sin^2[(\varphi - \vartheta)/4]} \\
&> 2 \frac{|\sin[(\varphi - \vartheta)/4]| |\cos[(\varphi - \vartheta)/4]|}{\cos^2[(\varphi - \vartheta)/4]} \\
&= 2 \frac{|\sin[(\varphi - \vartheta)/4]|}{|\cos[(\varphi - \vartheta)/4]|} \\
&= 2 \frac{|\operatorname{cis}(\varphi/2) - \operatorname{cis}(\vartheta/2)|}{|\operatorname{cis}(\varphi/2) + \operatorname{cis}(\vartheta/2)|} \\
&\geq \left| \frac{\varphi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right| = |\varphi - \vartheta|/2.
\end{aligned}$$

Im Fall $|\varphi - \vartheta| = \pi$ gilt die strikte Ungleichung trivial, und als Gleichheitsfall verbleibt nur $\varphi = \vartheta$. \square

BEWEISE DER UNGLEICHUNGEN FÜR \sin UND \cos . Die Ungleichungen

$$|\sin \varphi - \sin \vartheta| \leq |\varphi - \vartheta| \quad \text{und} \quad |\cos \varphi - \cos \vartheta| \leq |\varphi - \vartheta|$$

samt Gleichheitsdiskussionen folgen direkt aus der ersten Ungleichung für cis , die Ungleichung $\sin \varphi \leq \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist ein Spezialfall. Durch Anwendung der zweiten Ungleichung für cis mit $\vartheta = -\varphi$ erhält man außerdem $\sin \varphi \geq \varphi \cos \varphi$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ samt Gleichheitsdiskussion (und für $\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ gilt diese Ungleichung sowieso). Damit folgt auch

$$(1 + \varphi^2)(\cos \varphi)^2 = (\cos \varphi)^2 + (\varphi \cos \varphi)^2 \leq (\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2 = 1 \quad \text{für } \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

und somit die Abschätzung $\cos \varphi \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi^2}}$ für $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (und für $|\varphi| \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ gilt diese Ungleichung sowieso). Mit

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - (\sin \varphi)^2} \geq \sqrt{1 - \varphi^2} \quad \text{für } \varphi \in [-1, 1]$$

ist auch die letzte Abschätzung für den Kosinus erledigt. Die verbleibenden Aussagen über Gleichheitsfälle kommen bei diesen Argumenten gleich mit heraus. \square

Für die Kreisfunktionen gelten neben den oben genannten noch viele weitere Formeln und Eigenschaften. An dieser Stelle soll aber nur noch eine weitere Definition getroffen werden.

Definition V.3.9. Die Kreisfunktionen Tangens und Kotangens sind definiert als

$$\begin{aligned}
\tan: \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \dots\} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}, \\
\cot: \mathbb{R} \setminus \{0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots\} &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}.
\end{aligned}$$

Eigenschaften dieser Funktionen wie beispielsweise $\tan 0 = 0$, $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, $1 + \tan^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, $\tan(\varphi + \pi) = \tan \varphi$, $\tan(-\varphi) = -\tan \varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \pm 5\frac{\pi}{2}, \dots\}$ und $\tan \varphi > \varphi$ für $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ lassen sich aus den Eigenschaften des Kosinus und des Sinus ableiten.

Als abschließende Anwendung nutzen wir die Kreisfunktionen, um komplexe Wurzeln in Polardarstellung allgemein angeben zu können:

Satz V.3.10. Für $k \in \mathbb{N}$ besitzt jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau k verschiedene k -te Wurzeln in \mathbb{C} . Bei Polardarstellung $z = |z| \operatorname{cis} \varphi$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ sind diese Wurzeln gerade

$$\sqrt[k]{|z|} \operatorname{cis} \frac{\varphi}{k}, \sqrt[k]{|z|} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2\pi}{k}, \sqrt[k]{|z|} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 4\pi}{k}, \dots, \sqrt[k]{|z|} \operatorname{cis} \frac{\varphi + 2(k-1)\pi}{k}.$$

BEWEIS. Die k -ten Wurzeln aus z sind genau die Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der polynomialen Gleichung $w^k - z = 0$, und Sie wissen, dass es höchstens k solche Lösungen gibt. Es bleibt somit nur nachzurechnen, dass die angegebenen Zahlen in der Tat k verschiedene Wurzeln sind. Dies gelingt mit den Eigenschaften von cis und wird in den Übungen genauer erörtert. \square

Zumindest für Zweierpotenzen k kann man die k -ten Wurzeln aber als iterierte Quadratwurzeln auch ohne Kreisfunktionen erhalten, denn:

Bemerkung V.3.11. Die beiden komplexen *Quadratwurzeln* aus $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ kann man als

$$\pm \sqrt{|z|} \frac{z + |z|}{|z + |z||}$$

angeben und berechnen. Diese Formel bestätigt man mit der schon für die Einheitswurzeln ξ_n gemachten Rechnung. Im verbleibenden Fall $z = x \in \mathbb{R}_{< 0}$, in dem der Nenner in der Formel Null ist, erhält man die beiden komplexen Quadratwurzeln natürlich einfach als $\pm \sqrt{|x|}i$.

V.4. Häufungspunkte und Teilfolgen

In diesem Abschnitt wenden wir uns zwei Begriffen zu, mit denen manchmal das Grenzverhalten divergenter Folgen bei $n \rightarrow \infty$ beschrieben werden kann:

Definition V.4.1. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt $x \in \mathbb{K}$ ein *Häufungspunkt* (oder *Häufungswert*) der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ gibt. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bezeichnen wir zudem $\pm\infty$ als *uneigentlichen Häufungspunkt* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0}$ unendliche viele $n \in \mathbb{N}$ mit $\pm x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ gibt.

Bemerkung V.4.2. In Quantoren-Schreibweise verlangt die Definition des Häufungspunkts

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0} : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : |x_n - x| < \varepsilon$$

(und bei uneigentlich Häufungspunkten analog $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{> 0} : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : \pm x_n > \frac{1}{\varepsilon}$).

Beispiel V.4.3. Die Folge $(1 - \frac{1}{1}, 3 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{4}, 1 - \frac{1}{5}, 3 + \frac{1}{6}, 1 - \frac{1}{7}, 3 + \frac{1}{8}, \dots)$, die wir geschlossen als $(2 + (-1)^n(1 + \frac{1}{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ schreiben können, hat genau 1 und 3 als Häufungspunkte.

Definition V.4.4. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einer Menge \mathcal{X} . Ist $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ in \mathbb{N} (also $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in \mathbb{N}), so heißt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung V.4.5. Manchmal verwendet man die etwas andere Konvention, dass statt $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ die Indexfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge bezeichnet wird. Die Grundidee ist und bleibt aber, dass $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ das Aussondern von $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ aus einer (beliebigen) Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erlaubt.

Es besteht ein grundlegender Zusammenhang von Häufungspunkten und Teilfolgen:

Proposition V.4.6. Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $x \in \mathbb{K}$ (und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sogar für $x \in \overline{\mathbb{R}}$) gilt:

$$x \text{ ist Häufungspunkt von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \iff x \text{ ist Grenzwert einer Teilfolge von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

BEWEIS. Dies folgt aus den Definitionen und wird auch in den Übungen noch besprochen. \square

Von entscheidender Bedeutung in vielen verschiedenen Zusammenhängen ist nun der folgende Satz über die Existenz von Häufungspunkten, der auch als allgemeiner Existenzsatz für Grenzwerte (von Teilfolgen) verstanden werden kann:

Theorem V.4.7 (Satz von Bolzano-Weierstraß). *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Jede beschränkte Folge in \mathbb{K} besitzt einen Häufungspunkt in \mathbb{K} und, äquivalent, eine in \mathbb{K} konvergente Teilfolge.*

BEWEIS. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{R} . Es gibt dann eine Schranke $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass $I_0 := [-M, M]$ alle x_n mit $n \in \mathbb{N}$ enthält. Durch iterative Intervallhalbierung findet man für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein Intervall $I_k = [a_k, b_k] \subset I_{k-1}$ mit Länge $b_k - a_k = 2^{1-k}M$, das jedenfalls unendlich viele x_n mit $n \in \mathbb{N}$ enthält. Genauer zeigt man die Existenz von I_k mit Induktion und nutzt dabei im Induktionsschritt, dass mit I_{k-1} mindestens eines der halbierten Intervalle $[a_{k-1}, \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}]$ und $[\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}, b_{k-1}]$ unendlich viele x_n enthält und als I_k gewählt werden kann. Wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} besitzt die durch die Intervalle I_k gebildete Intervallschachtelung einen Kern $x \in \mathbb{R}$ mit $x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ betrachten wir nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{1-k}M < \varepsilon$ und erhalten, dass unendlich viele x_n mit $n \in \mathbb{N}$ in $I_k \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ liegen. Also ist x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ kann man durch ein analoges Argument mit Rechteckschachtelungen erledigen oder ihn wie folgt auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zurückführen: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in \mathbb{C} , so erhält man erst die Konvergenz einer Teilfolge $(\operatorname{Re}(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ der Realteile gegen ein $x \in \mathbb{R}$, dann die Konvergenz einer (weiteren) Teilfolge $(\operatorname{Im}(x_{n_{k_\ell}}))_{\ell \in \mathbb{N}}$ der Imaginärteile gegen ein $y \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt die Konvergenz der Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $x + iy \in \mathbb{C}$. \square

Bemerkungen V.4.8.

- Ein alternativer Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß gelingt mit der etwas Überlegung erfordernden Beobachtung, dass jede Folge in \mathbb{R} eine monotone Teilfolge besitzt, und dem Monotoniekriterium.
- Unbeschränkte Folgen in \mathbb{R} besitzen einen uneigentlichen Häufungspunkt und, äquivalent, eine uneigentlich konvergente Teilfolge. Insgesamt kann man daher sagen, dass jede Folge in \mathbb{R} , im eigentlichen oder im uneigentlichen Sinne, einen Häufungspunkt und eine konvergente Teilfolge besitzt.
- Als Korollar zum Satz von Bolzano-Weierstraß ergeben sich folgende Äquivalenzen: Für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{K} und $x \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt, } x \text{ ist einziger Häufungspunkt von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{K},$$

und für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und $x \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff x \text{ ist einziger Häufungspunkt von } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \overline{\mathbb{R}}.$$

In beiden Fällen ist dabei der Beweis von \implies 'elementar, während der Beweis von \impliedby ' mit dem Hauptsatz und einem sogenannten Teilfolgenargument erfolgt; vergleiche mit den Übungen.

Abschließend beschäftigen wir uns kurz mit der Menge aller Häufungspunkte einer Folge:

Satz V.4.9.

- (1) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und existiert für eine Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Häufungspunkten von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eventuell uneigentliche) Grenzwert⁵ $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_k$, so ist a wieder ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Man drückt diese Eigenschaft auch so aus, dass die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter Grenzwerten abgeschlossen ist.
- (2) Bei einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} gibt es stets einen größten Häufungspunkt und einen kleinsten Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wir bezeichnen diese als den Limes superior $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ und den Limes inferior $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

BEWEIS. Es sei \mathcal{H} die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ beziehungsweise \mathbb{C} .

Wir beginnen mit Teil (1) und betrachten eine gegen a konvergente Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{H} . Wir können $a_k \in \mathbb{K}$ annehmen (denn, ist $a_k = \pm\infty$ für unendliche viele $k \in \mathbb{N}$, so muss $a = \pm\infty \in \mathcal{H}$ sein). Wir erhalten eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|x_{n_k} - a_k| < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, indem wir erst $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|x_{n_1} - a_1| < 1$ und dann rekursiv $n_{k+1} \in \mathbb{N}_{>n_k}$ mit $|x_{n_{k+1}} - a_{k+1}| < \frac{1}{k+1}$ wählen. Es folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a$, also ist a ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

⁵Man beachte, dass für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ uneigentliche Häufungspunkte $a_k = \pm\infty$ möglich sind und hier behandelt werden können, wenn die (uneigentliche) Grenzwertdefinition auf naheliegende Weise auf Folgen in $\overline{\mathbb{R}}$ erweitert wird.

Um die in Teil (2) behauptete Existenz eines größten und kleinsten Elements von \mathcal{H} nachzuweisen, bemerken wir zuerst, dass der Satz von Bolzano-Weierstraß $\mathcal{H} \neq \emptyset$ sichert. Somit existieren $\sup \mathcal{H}, \inf \mathcal{H} \in \overline{\mathbb{R}}$. Da $\sup \mathcal{H}$ und $\inf \mathcal{H}$ als Grenzwerte von Folgen in \mathcal{H} geschrieben werden können, erhalten wir mit Teil (1), dass $\sup \mathcal{H}, \inf \mathcal{H} \in \mathcal{H}$ das größte und das kleinste Element von \mathcal{H} sind. \square

Bemerkungen V.4.10.

- Nach Definition gilt für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathbb{R}}$ stets $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Der (eventuell uneigentliche) Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert genau in dem Fall, dass Gleichheit $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ eintritt.
- Eine Folge kann sehr viele Häufungspunkte besitzen. Wird etwa durch eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ganz $\mathbb{Q} = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ abgezählt (was nach dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren ja möglich ist), so sind *alle* Elemente von $\overline{\mathbb{R}}$ Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

V.5. Konvergenz von Reihen

Reihen sind unendliche Summen und können als (spezielle) Grenzwerte von Folgen aufgefasst werden. Die Theorie der Reihen erweist sich aber als erstaunlich vielseitig und reichhaltig und verdient eine separate Behandlung:

Definition V.5.1. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- (1) Eine *Reihe* ist eine formale unendliche Summe

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + a_{k_0+3} + \dots$$

mit $k_0 \in \mathbb{Z}$ und einer Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ von *Reihengliedern* $a_k \in \mathbb{K}$. Wir bezeichnen die endlichen Summen $\sum_{k=k_0}^n a_k$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ als *Partialsommen* der Reihe.

- (2) Wir nennen eine Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ *konvergent*, wenn die zugehörige Partialsummenfolge $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ in \mathbb{K} konvergiert, und andernfalls *divergent*. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nennen wir $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ *bestimmt divergent*, wenn $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ bestimmt gegen ∞ oder $-\infty$ divergiert, und in anderen Divergenzfällen *unbestimmt divergent*.
- (3) Für konvergente oder bestimmt divergente Reihen erklären wir den *Wert der Reihe*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k$$

als den (bei bestimmter Divergenz uneigentlichen) Grenzwert der Partialsommen.

Die erwähnte Schreibweise $a_{k_0} + a_{k_0+1} + a_{k_0+2} + a_{k_0+3} + \dots$ mit De-Facto-Angabe nur endlich vieler Reihenglieder ist dabei im Gegensatz zur Schreibweise $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit dem Summenzeichen nicht völlig präzise. Führt man ausreichend viele Reihenglieder an, um ein klares Bildungsgesetz zu suggerieren, so erweist sich die Pünktchen-Notation in der Rechenpraxis aber dennoch als unproblematisch und sinnvoll.

Wir geben nun vier fundamentale (Typen von) Reihen als Beispiele an:

Beispiele V.5.2.

- Aus der geometrischen Summenformel $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ die Konvergenz der *geometrischen Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } q \in \mathbb{C} \text{ mit } |q| < 1.$$

Für $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$ dagegen divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, wobei für $q \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ bestimmte Divergenz gegen ∞ , für $q \in \mathbb{R}_{\leq -1}$ unbestimmte Divergenz vorliegt.

- Die *harmonischen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

ist bestimmt divergent. Dies kann man mit der Abschätzung $\sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k=2^{\ell}+1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{2^{\ell+1}} = \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell} \frac{1}{2^{\ell+1}} = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ einsehen, die einem Spezialfall des demnächst folgenden Verdichtungskriteriums entspricht. Alternativ werden wir die bestimmte Divergenz der harmonischen Reihe gegen Ende dieses Abschnitts noch mit Hilfe eines unendlichen Produkts zeigen.

- Die Konvergenz der *reellen Exponentialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x) = e^x \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

wird für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ in den Übungen gezeigt und wird für $x \in \mathbb{R}_{< 0}$ später im allgemeineren Kontext der komplexen Exponentialreihe nachgetragen. Insbesondere ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = e \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \pm \dots = \frac{1}{e}.$$

- Für $k_0 \in \mathbb{Z}$ und jede in \mathbb{C} konvergente⁶ Folge $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ konvergiert die *Teleskopreihe*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (b_{k+1} - b_k) = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k \right) - b_{k_0}.$$

Ein konkretes Beispiel dieses Typs ist

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Als grundlegende Eigenschaften bei Reihen halten wir fest:

Proposition V.5.3. Für $k_0 \leq m$ in \mathbb{Z} , $s \in \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ und $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ in \mathbb{K} gelten:

- (1) Sind die Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ konvergent oder bestimmt divergent, so ist auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ konvergent oder bestimmt divergent mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k,$$

vorausgesetzt rechts tritt *nicht* der unbestimmte Ausdruck $\infty - \infty$ oder $-\infty + \infty$ auf.

Falls eine der Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=k_0}^{\infty} (sa_k)$ mit $s \neq 0$ konvergiert oder bestimmt divergiert, so ist dies auch für die andere der Fall, und es gilt

$$(V.5.1) \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} (sa_k) = s \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k.$$

- (2) Falls eine der Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert oder bestimmt divergiert, so ist dies auch für die andere der Fall, und es gilt

$$(V.5.2) \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k.$$

- (3) Abänderung endlich vieler Glieder ändert nichts an Konvergenz oder Divergenz einer Reihe, kann aber ihren Wert ändern. Vertauschung endlicher vieler Glieder beeinflusst weder die Konvergenz einer Reihe noch den Reihenwert.

⁶Man kann sich hier tatsächlich auf gegen 0 konvergente Folgen $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ zurückziehen, da man für beliebiges $b := \lim_{k \rightarrow \infty} b_k \in \mathbb{C}$ durch $\tilde{b}_k := b_k - b$ eine Nullfolge $(\tilde{b}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{b}_{k+1} - \tilde{b}_k = b_{k+1} - b_k$ für $k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ erhält.

- (4) Liegt eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{Z}_{\geq k_0} = \{\ell_i \mid i \in \mathbb{N}\} \sqcup \{m_j \mid j \in \mathbb{N}\}$ mit streng monoton wachsenden Indexfolgen $(\ell_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vor und sind $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\ell_i}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}$ konvergent oder bestimmt divergent, so ist auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergent oder bestimmt divergent mit Wert

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\ell_i} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j},$$

vorausgesetzt rechts tritt *nicht* der unbestimmte Ausdruck $\infty - \infty$ oder $-\infty + \infty$ auf. Ein typischer Spezialfall dieser Regel (mit $k_0 = 1$) ist die Zerlegung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j-1}$$

in Teilreihen mit nur geraden und nur ungeraden Indizes (falls die rechte Seite sinnvoll ist).

- (5) Gilt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$a_k \leq b_k \text{ f\"ur alle } k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$$

und sind $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ konvergent oder bestimmt divergent, so folgt

$$(V.5.3) \quad \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} b_k.$$

BEWEIS. Die Eigenschaften (V.5.1) und (V.5.2) erhält man problemlos, indem man bei den Grenzwerten der Partialsummen die Grenzwertregeln für Summen und Produkte anwendet (inklusive symbolischer Regeln bei Fällen mit bestimmter Divergenz).

Die Eigenschaft (3) ergibt sich nach Umschreiben mit (V.5.2) aus dem entsprechenden Verhalten bei endlichen Summen.

Zum Nachweis der Eigenschaft (4) beobachten wir

$$\sum_{k=k_0}^n a_k = \sum_{i=1}^{i_n} a_{\ell_i} + \sum_{j=1}^{j_n} a_{m_j} \text{ f\"ur } n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$$

mit $i_n := \max\{i \in \mathbb{N} \mid \ell_i \leq n\}$ und $j_n := \max\{j \in \mathbb{N} \mid m_j \leq n\}$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = \infty$ konvergiert dabei der erste Term auf der rechten Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\ell_i}$, und analog konvergiert der zweite Term gegen $\sum_{j=1}^{\infty} a_{m_j}$. Die Grenzwertregeln für Folgen implizieren dann die Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ und die behauptete Summenformel.

Die Eigenschaft (V.5.3) schließlich folgt aus dem entsprechenden Vergleichsprinzip für Grenzwerte. \square

Wir kommen nun zu *Konvergenzkriterien* für Reihen und halten dazu erste Beobachtungen fest, wobei das Nullfolgenkriterium für Theorie *und* Rechenpraxis nützt, während die andere Kriterien von überwiegend theoretischer Bedeutung sind. Im nächsten Satz folgen dann weitere Kriterien, mit denen die Konvergenz konkret gegebener Reihen besser untersucht werden kann.

Satz V.5.4. Sei $k_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

- (1) Beschranktheitskriterium: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Falls $a_k \geq 0$ für $k \gg 1$ gilt, so konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge $(\sum_{k=k_0}^n a_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ der Partialsummen beschränkt bleibt, und andernfalls liegt bestimmte Divergenz $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \infty$ vor.
- (2) Cauchy-Kriterium: Genau dann konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, wenn $\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k = 0$ gilt, wobei letzteres gemäß der für die Cauchy-Eigenschaft eingeführten Notation präzise $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq m}: \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| < \varepsilon$ bedeutet.
- (3) Nullfolgenkriterium: Wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Mit anderen Worten ist für Konvergenz einer Reihe notwendig, dass ihre Glieder eine Nullfolge bilden.

(4) Wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergiert, so bilden die Reihenreste $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ eine Nullfolge. Genauer gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k = 0,$$

was Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ mit $m \gg 1$ einschließt.

In Anbetracht des Beschränktheitskriteriums (1) wird die Konvergenz einer Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit (fast nur) nichtnegativen Gliedern $a_k \geq 0$ auch einfach durch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k < \infty$ ausgedrückt.

BEWEIS. Die Kriterien (1) und (2) folgen durch Anwendung des Monotonie- beziehungsweise Cauchy-Kriteriums aus Abschnitt V.1 auf die Partialsummen $s_n := \sum_{k=k_0}^n a_k$, weil $s_n - s_{n-1} = \sum_{k=n}^n a_k$ für $n \geq m$. Das Kriterium (3) ergibt sich für $m = n$ aus (2) oder alternativ, weil mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ schon $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - s_{n-1}) = 0$ folgt. Das Kriterium (4) erhält man entweder durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der Cauchy-Bedingung von (2) oder durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in der Formel der vorausgehenden Grundeigenschaft (V.5.2). \square

Bemerkung V.5.5. Das Nullfolgenkriterium sollte man bei der Untersuchung der Konvergenz einer gegebenen Reihe (wenn es sich nicht gerade um einen schon bekannten Standard-Typ handelt) unbedingt zuallererst prüfen. Stellt man fest, dass die Glieder keine Nullfolge bilden, so kann man die Reihe sofort als divergent abhaken und kann im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ normalerweise auch leicht ablesen, ob bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$ oder unbestimmte Divergenz vorliegt. Wenn dagegen eine Nullfolge vorliegt, so kann man — das ist das Wesen eines notwendigen Kriteriums — noch nicht entscheiden, ob Konvergenz vorliegt, und muss die Reihe mit anderen Kriterien genauer untersuchen.

Weitere, nützliche Kriterien, mit denen man über Konvergenz oder Divergenz vieler konkret gegebener Reihen entscheiden kann, gibt der folgende Satz.

Satz V.5.6. Es seien $k_0 \in \mathbb{Z}$, sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, und es sei $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ eine Folge in \mathbb{R} .

- (1) Majorantenkriterium: Gilt $|a_k| \leq C b_k$ für $k \gg 1$ mit festem $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und konvergiert die Majorantenreihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$, so konvergiert auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
- (2) Minorantenkriterium: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Gilt $a_k \geq c b_k$ für $k \gg 1$ mit festem $c \in \mathbb{R}_{> 0}$ und divergiert die Minorantenreihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \infty$, so divergiert auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \infty$.
- (3) Quotientenkriterium: Ist $a_k \neq 0$ für $k \gg 1$ und gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
- (4) Wurzelkriterium: Gilt $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, so konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.
- (5) Verdichtungskriterium: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ist (ein Endstück von) $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ monotone Nullfolge und ist $\ell_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $2^{\ell_0} \geq k_0$, so konvergiert $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn auch die verdichtete Reihe $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} 2^{\ell} a_{2^{\ell}}$ konvergiert.
- (6) Leibniz-Kriterium: Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Ist (ein Endstück von) $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ monotone Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k a_k$.

BEWEIS. Für das Majorantenkriterium (1) argumentieren wir so: Da $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ konvergiert, gibt das Cauchy-Kriterium $\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n b_k = 0$. Wegen $|\sum_{k=m}^n a_k| \leq \sum_{k=m}^n |a_k| \leq C \sum_{k=m}^n b_k$ für $n \geq m \gg 1$ folgt daraus $\lim_{n \geq m \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k = 0$, und eine erneute Anwendung des Cauchy-Kriteriums gibt Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

Zum Herleitung des Minorantenkriterium (2) fixieren wir $m \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ mit $a_k \geq c b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$ und folglich $\sum_{k=m}^n a_k \geq c \sum_{k=m}^n b_k$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq m}$. Die bestimmte Divergenz $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k = \infty$, die gemäß Grundeigenschaft (V.5.2) gleichbedeutend mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n b_k = \infty$ ist, impliziert dann gemäß dem Minorantenkriterium des Abschnitts V.1 für Unendlichfolgen auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k = \infty$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \infty$.

In der Situation des Quotientenkriteriums (3) gibt es $q \in [0, 1)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq q$, also $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$, für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$. Induktiv folgt $|a_k| \leq q^{k-m}|a_m| = Cq^k$ für $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$, wobei $C := q^{-m}|a_m| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fest ist. Somit lässt sich das Majorantenkriterium (1) mit der konvergenten geometrischen Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$ als Majorantenreihe anwenden und gibt Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

Unter der Voraussetzung der Wurzelkriteriums gibt es $q \in [0, 1)$ und $m \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$, also $|a_k| \leq q^k$, für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$. Daher greift erneut (1) mit Majorantenreihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$.

Beim Beweis des Verdichtungskriteriums (5) behandeln wir in Anbetracht von Grundeigenschaft (V.5.2) nur $k_0 = 1$, $\ell_0 = 0$ und sowie eine fallende Nullfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Nach dem Beschränktheitskriterium kann nun sowohl $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ als auch $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ nur gegen einen endlichen Wert konvergieren oder bestimmt gegen ∞ divergieren. Zudem lassen sich die zugehörigen Partialsummen mit $p \in \mathbb{N}$ durch Zusammenfassen von Reihengliedern in Gruppen gemäß

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^p-1} a_k &= a_1 + (a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6+a_7) + \dots + (a_{2^{p-1}}+a_{2^{p-1}+1} + \dots + a_{2^p-2}+a_{2^p-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^{p-1}a_{2^{p-1}} = \sum_{\ell=0}^{p-1} 2^\ell a_{2^\ell} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^p} a_k &= a_1 + a_2 + (a_3+a_4) + (a_5+a_6+a_7+a_8) + \dots + (a_{2^{p-1}+1}+a_{2^{p-1}+2} + \dots + a_{2^p-1}+a_{2^p}) \\ &\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 \dots + 2^{p-1}a_{2^p} = \frac{1}{2} \sum_{\ell=0}^p 2^\ell a_{2^\ell} \end{aligned}$$

von oben und unten durch einander abschätzen. Daher müssen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^\ell a_{2^\ell}$ tatsächlich *beide* gegen einen endlichen Wert konvergieren oder *beide* bestimmt gegen ∞ divergieren.

Auch beim Leibniz-Kriterium (6) behandeln wir ohne Einschränkung nur $k_0 = 0$ und eine fallende Nullfolge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Mit den Partialsummen $s_n := \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ bilden wir für $n \in \mathbb{N}_0$ Intervalle $I_n := [s_{2n+1}, s_{2n}]$, die wegen $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n}$ nicht-leer sind und wegen $s_{2(n+1)} = s_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq s_{2n}$ und $s_{2(n+1)+1} = s_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq s_{2n+1}$ zudem $I_{n+1} \subset I_n$ erfüllen. Aufgrund von $s_{2n} - s_{2n+1} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ bilden die Intervalle I_n sogar eine Intervallschachtelung. Mit deren Kern $s \in \mathbb{R}$ folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$. Also konvergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ mit Wert s . \square

Beispiele V.5.7.

- (1) Das Majorantenkriterium (1) und das Minorantenkriterium (2) sind oft nützlich, um über die Konvergenz oder Divergenz einer gegebenen Reihe durch Vergleich mit einfacheren und schon behandelten Reihen zu entscheiden. Beispiele hierzu sind Thema der Übungen.
- (2) *Zahlen mit unendlich vielen Nachkommastellen* im schon früher angesprochenen Stellenwertsystem zu einer Basis $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ lassen sich als Reihen

$$(z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0, z_{-1} z_{-2} z_{-3} \dots)_b := \sum_{i=-n}^{\infty} z_{-i} b^{-i}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und b -adischen Ziffern $z_i \in \{0, 1, 2, \dots, b-2, b-1\}$ präzise erklären. Wegen $|z_{-i} b^{-i}| \leq b^{1-i}$ wird dabei die Konvergenz der auftretenden Reihe allgemein durch die Konvergenz der geometrischen Majorantenreihe $\sum_{i=-n}^{\infty} b^{1-i}$ gesichert, und es ist nicht schwer zu zeigen, dass jede nichtnegative reelle Zahl eine Zifferndarstellung der obigen Form besitzt. Ist $z_{-i} = 0$ für $i \gg 1$, so verzichtet man in der Notation auf das Endstück aus Nullen und schreibt die Zahl in üblicher Notation mit endlich vielen Nachkommastellen. Verschwinden mit $z_{-i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gar alle Nachkommaziffern, so liefert dies natürlich die aus bekannte b -adische Darstellung natürlicher Zahlen zurück. Als Spezialfall sei noch erwähnt, dass wir im Dezimalsystem die bekannte „Null-Komma-Periode-Neun-Problematik“ per geometrischer Reihe präzise auflösen können: Tatsächlich ist

$$0,99999999 \dots = \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i} = 9 \left(\frac{1}{1-10^{-1}} - 1 \right) = 1.$$

- (3) Mit dem Quotientenkriterium (3) und dem Wurzelkriterium (4) lassen sich — wie man aus dem Beweis abliest — gewisse Reihen behandeln, die eine geometrische Majorantenreihe besitzen. Der Hauptvorteil dieser beiden Kriterien besteht dabei in der Möglichkeit, sie recht schematisch einzusetzen. In interessanten Grenzfällen versagen sie aber oft und liefern dann auch kaum Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen.
- (4) Das Verdichtungskriterium (5) ergibt, dass die (speziellen) *Dirichlet-Reihen*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

genau für $s > 1$ konvergent sind. Genauer ergibt das Kriterium erst, dass die geometrische Reihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} (2^{1-s})^{\ell}$ dasselbe Konvergenzverhalten aufweist, und letztere konvergiert dann genau für $2^{1-s} < 1$, also mit anderen Worten genau für $s > 1$.

Durch $\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \in \mathbb{R}_{>0}$ sind übrigens auch die Werte der *Riemannsches Zeta-Funktion* ζ auf $\mathbb{R}_{>1}$ gegeben. Es handelt sich dabei um eine berühmte komplexe Funktion, die in der Zahlentheorie große Bedeutung besitzt und später in natürlicher Weise auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortgesetzt und weiter untersucht werden kann. Die Werte von ζ auf geraden natürlichen Zahlen gibt Eulers erstaunliche Formel $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} b_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!}$ für $k \in \mathbb{N}$ mit den Bernoulli-Zahlen b_k , während über die Werte auf ungeraden natürlichen Zahlen wenig bekannt ist. Speziell gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \frac{1}{256} + \dots = \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}.$$

- (5) Das Leibniz-Kriterium (6) zeigt (zusammen mit dem Nullfolgenkriterium), dass die alternierenden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

genau für $s > 0$ konvergent sind. Speziell konvergieren die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots,$$

deren Wert in den Übungen zu $\ln 2$ bestimmt wird, und die *Leibnizsche Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots,$$

auf deren Wert $\frac{\pi}{4}$ wir später eingehen werden.

Als Nächstes erklären wir ein Konzept besonders gutartiger Konvergenz.

Definition V.5.8. Sei $k_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ eine Folge in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent*, wenn die Reihe der Beträge $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiele V.5.9.

- Aus dem Majorantenkriterium (1) (mit $b_k = |a_k|$) folgt, dass eine absolute konvergente Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ stets konvergent ist. Durch Grenzübergang in der Dreiecksungleichung für endliche (Partial-)Summen ergibt sich für solche Reihen zudem die *Dreiecksungleichung*

$$\left| \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|.$$

- Die Kriterien (1), (3), (4), (5) des letzten Satzes (also Majoranten-, Quotienten-, Wurzel-, und Verdichtungskriterium) erfassen mit einer Reihe stets auch die zugehörige Reihe der Beträge und geben daher stets absolute Konvergenz. (Bei den ersten drei Kriterien liegt dies daran, dass überhaupt nur die Beträge der Glieder auftreten. Beim Verdichtungskriterium folgt es, weil fast alle Glieder a_k der monotonen Nullfolge gleiches Vorzeichen haben müssen).

- Das Leibniz-Kriterium erfasst auch einige konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihen, wie beispielsweise die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}$ mit $s \in (0, 1]$ (für die sich dieses Verhalten aus den vorausgehenden Punkten (4) und (5) ergibt).

Für einige weitere Sachverhalte bei Reihen ist eine allgemeine Definition nützlich, die wir an dieser Stelle kurz einschieben:

Definition V.5.10. Für $x \in \mathbb{R}$ erklären wir den *Positivteil* x_+ von x und den *Negativteil* x_- von x durch

$$x_+ := \max\{x, 0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ und } x_- := \max\{-x, 0\} \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Damit bekommen wir die Zerlegungen

$$x = x_+ - x_- \text{ und } |x| = x_+ + x_- \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}.$$

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit der Frage, ob Konvergenz und Wert einer Reihe von der Reihenfolge abhängen, in der die Summanden addiert werden. Wie wir sehen werden, lässt sich dies nicht allgemein bejahen oder verneinen, sondern die Antwort hängt ganz wesentlich davon ab, wie gutartig die Konvergenz der betreffenden Reihe ist. Wir machen dies im nächsten Satz präzise, prägen dafür aber zunächst noch ein zugehöriges Konzept.

Definition V.5.11. Für $k_0, \ell_0 \in \mathbb{Z}$ seien $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ und $(b_\ell)_{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq \ell_0}}$ Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann heißt $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} b_\ell$ eine *Umordnung* von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$, wenn es eine Bijektion $\pi: \mathbb{Z}_{\geq \ell_0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ mit $b_\ell = a_{\pi(\ell)}$ für alle $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq \ell_0}$ gibt.

Satz V.5.12. *Es sei $k_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ eine Folge in \mathbb{R} .*

- (1) *Gilt $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ < \infty$ oder $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- < \infty$, so haben alle Umordnungen von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ das gleiche Konvergenzverhalten und den gleichen Wert wie $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ selbst. Insbesondere greift dies in den Fällen, dass $a_k \geq 0$ für $k \gg 1$ gilt, $a_k \leq 0$ für $k \gg 1$ gilt oder $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.*
- (2) *Riemannscher Umordnungssatz: Ist $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ konvergent, aber nicht absolut konvergent, so gibt es für jedes $s \in \overline{\mathbb{R}}$ Umordnungen von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit Wert s und auch unbestimmt divergente Umordnungen von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.*

Hier sagt Teil (1), dass in den dort erfassten Fällen die Reihenfolge der Summation irrelevant ist und durch Umordnungen keine Probleme entstehen. Insbesondere erweisen sich die absolut konvergenten Reihen als *unbedingt konvergente Reihen*, bei denen jede Umordnung gegen den gleichen endlichen Wert konvergiert. Dagegen kann bei *nicht-absoluter* Konvergenz gemäß Teil (2) durch Umordnung „alles maximal schiefgehen“, und die nicht-absolut konvergenten Reihen sind *bedingt konvergente Reihen*, die zwar konvergieren, aber Umordnungen mit unterschiedlichem Verhalten und unterschiedlichen Werten besitzen.

BEWEIS VON TEIL (1) DES SATZES. Wir behandeln erst den Fall, dass $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ gilt. Da dann nur Konvergenz oder unbestimmte Divergenz gegen ∞ in Frage kommen, können wir das Konvergenzverhalten am Wert festmachen und müssen nur die Übereinstimmung der Werte zeigen. Der Schlüssel hierzu ist die Darstellung

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n a_k = \sup \left\{ \sum_{k=k_0}^n a_k \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \sup \left\{ \sum_{k \in E} a_k \mid E \subset \mathbb{Z}_{\geq k_0} \mid |E| < \infty \right\}.$$

der Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ als Supremum endlicher Summen über beliebige endliche Teilmengen E der Indexmenge $\mathbb{Z}_{\geq k_0}$. Beim letzten „ $=$ “ gilt hier „ \leq “, weil jede Partialsumme $\sum_{k=k_0}^n a_k$ der Reihe gleich einer endlichen Summe $\sum_{k \in E} a_k$ mit $E = \{k_0, k_0 + 1, \dots, n\}$ ist, und „ \geq “ gilt, weil jede endliche Summe $\sum_{k \in E} a_k$ kleiner oder gleich einer Partialsumme $\sum_{k=k_0}^n a_k$ mit $n = \max E$ ist. Ist $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ und $\pi: \mathbb{Z}_{\geq \ell_0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq k_0}$ eine Bijektion, so können wir obige Darstellung auch auf die Umordnung $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} a_{\pi(\ell)}$ anwenden. Mit der Bijektivität von π

ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} a_{\pi(\ell)} &= \sup \left\{ \sum_{\ell \in F} a_{\pi(\ell)} \mid F \subset \mathbb{Z}_{\geq \ell_0}, |F| < \infty \right\} = \sup \left\{ \sum_{k \in \pi(F)} a_k \mid F \subset \mathbb{Z}_{\geq \ell_0}, |F| < \infty \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{k \in E} a_k \mid E \subset \mathbb{Z}_{\geq k_0}, |E| < \infty \right\} = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k, \end{aligned}$$

also die behauptete Übereinstimmung der Werte.

Die allgemeine Aussage führen wir durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil auf das Vorige zurück. Zunächst ist bei $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_-$ wegen der gemachten Voraussetzung das Auftreten von $\infty - \infty$ ausgeschlossen, und die Reihe ist konvergent oder bestimmt divergent mit definiertem Wert in $\overline{\mathbb{R}}$. Da wir die Reihen mit Gliedern $(a_k)_{\pm} \geq 0$ nach dem schon Gezeigten ohne Änderung des Wertes umordnen dürfen, folgt dasselbe für jede Umordnung $\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} a_{\pi(\ell)}$ (mit $\ell_0 \in \mathbb{Z}$ und Bijektion $\pi: \mathbb{Z}_{\geq \ell_0} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq k_0}$) samt der behaupteten Übereinstimmung

$$\sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} a_{\pi(\ell)} = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} (a_{\pi(\ell)})_+ - \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} (a_{\pi(\ell)})_- = \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ - \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- = \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k. \quad \square$$

BEWEIS VON TEIL (2) DES SATZES. Wir beobachten zunächst, dass die nicht-absolute Konvergenz von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ erzwingt, dass $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_+ = \infty$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k)_- = \infty$ gelten, denn in allen anderen Fällen ergäbe die frühere Grundeigenschaft (V.5.1) entweder $\sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k| < \infty$ oder $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \pm \infty$.

Wir konstruieren nun eine Umordnung mit beliebig gegebenem Wert $s \in \mathbb{R}$. Die Grundidee hierzu ist, eine Indexfolge $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 \dots$ in $\mathbb{Z}_{\geq k_0}$ und zugehörige umgeordnete Partialsummen $s_{n_i} := \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{\pi(\ell)}$ zu wählen, für die $s_{n_1}, s_{n_3}, s_{n_5}, \dots > s$ und $s_{n_2}, s_{n_4}, s_{n_6}, \dots < s$ gelten, also s_{n_i} abwechselnd größer und kleiner als s ist. Hierzu sollen abwechselnd nur Summanden ≥ 0 und nur Summanden < 0 zusätzlich addiert werden, wobei unwichtige Null-Summanden per Konvention dem ersten Fall zugeschlagen wurden. Es sollen also etwa $a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(n_1)}, a_{\pi(n_2+1)}, a_{\pi(n_2+2)}, \dots, a_{\pi(n_3)} \geq 0$ und $a_{\pi(n_1+1)}, a_{\pi(n_1+2)}, \dots, a_{\pi(n_2)}, a_{\pi(n_3+1)}, a_{\pi(n_3+2)}, \dots, a_{\pi(n_4)} < 0$ gelten. Um dies zu erreichen, gehen wir im i -ten Schritt tatsächlich von s_{i-1} aus und bilden s_i durch Hinzunahme von noch nicht verwendeten Summanden a_k passenden Vorzeichens, die dann unnummeriert und als $a_{\pi(\ell)}$ in die Umordnung eingefügt werden. Wegen $\sum_{k=m}^{\infty} (a_k)_+ = \infty$ und $\sum_{k=m}^{\infty} (a_k)_- = \infty$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ können wir dabei mit dem verbleibenden Vorrat an Summanden immer wieder eine Summe $> s$ bzw. $< s$ erreichen. Um die Wahl der Summanden $a_{\pi(\ell)}$ eindeutig festzulegen, vereinbaren wir tatsächlich, unter den Summanden a_k , die das richtige Vorzeichen haben und noch nicht verwendet wurden, die mit den kleinsten Indizes k zu verwenden und das im jeweiligen Schritt nur, bis die Summe *erstmal* $> s$ bzw. *erstmal* $< s$ ist. Damit erreichen wir auch, dass alle Summanden a_k irgendwann vorkommen, so dass die Umnummerierung π bijektiv und $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\pi(\ell)}$ tatsächlich eine Umordnung von $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ wird. Nun bringen wir noch ein, dass gemäß Nullfolgenkriterium $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ und für beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ folglich $|a_{\pi(\ell)}| < \varepsilon$ für $\ell \gg 1$ gilt. Da die s_{n_i} den Wert s erst durch Addition des letzten Summanden über- oder unterschreiten, erhalten wir $|s_{n_i} - s| < \varepsilon$ für $i \gg 1$ und wegen Monotonie der Partialsummen zwischen benachbarten s_{n_i} dann auch $|\sum_{\ell=1}^n a_{\pi(\ell)} - s| < \varepsilon$ für $n \gg 1$. Dies zeigt die behauptete Konvergenz $\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\pi(\ell)} = s$.

Eine Umordnung mit Wert ∞ lässt sich ganz ähnlich konstruieren. Wir fügen dazu wie zuvor abwechselnd *nichtnegative* und *negative* Summanden hinzu, erzeugen jetzt mit entsprechender Abbruchbedingung aber Partialsummen $s_{n_1} > 2, s_{n_2} < 1, s_{n_3} > 4, s_{n_4} < 3, s_{n_5} > 6, s_{n_6} < 5, s_{n_7} > 8, s_{n_8} < 7$, und so weiter. Analog erhalten wir eine Umordnung mit Wert $-\infty$. Für eine bestimmt divergente Umordnung schließlich erzeugen wir mit demselben Verfahren Partialsummen $s_{n_1} > 1, s_{n_2} < 0, s_{n_3} > 1, s_{n_4} < 0, s_{n_5} > 1, s_{n_6} < 0, s_{n_7} > 1, s_{n_8} < 0$, und so weiter. \square

Bemerkung V.5.13. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil kann Teil (1) des vorigen Satzes auf Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit komplexen Gliedern $a_k \in \mathbb{C}$ verallgemeinert werden. Dafür müssen natürlich die Voraussetzungen des Teils (1) für die Reihen $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Re}(a_k)$ und $\sum_{k=k_0}^{\infty} \operatorname{Im}(a_k)$ der Real- und Imaginärteile vorliegen, was wegen $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{C}$ insbesondere dann der Fall ist, wenn $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ *absolut* konvergiert.

Eine wichtige Rechenregel für absolut konvergente Reihen ist die *Produktformel*.

Satz V.5.14. Für zwei absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$ reeller oder komplexer Zahlen a_k und b_ℓ ist auch die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right)$ mit Gliedern $\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$ absolut konvergent und erfüllt

$$(V.5.4) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell \right).$$

Man nennt $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \right)$ das *Cauchy-Produkt* von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$. Hierbei summiert man also jeweils über die Diagonalen im Schema unten:

$$\begin{array}{cccccccc} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & a_0 b_4 & a_0 b_5 & \dots & \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 & a_1 b_4 & a_1 b_5 & \dots & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 & a_2 b_4 & a_2 b_5 & \dots & \\ a_3 b_0 & a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 & a_3 b_4 & a_3 b_5 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

BEWEIS. Wir setzen $c_m = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k}$. Die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} c_m$ folgt aus der Konvergenz beschränkter monotoner Folgen mit der Abschätzung:

$$\sum_{m=0}^n |c_m| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j \leq n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq n} |a_i| |b_j| = \left(\sum_{i=0}^n |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n |b_j| \right) \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |a_i| \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \right).$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\sum_{m=0}^{\infty} c_m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$ gilt.

Es genügt zu zeigen, dass $\sum_{k=0}^n c_k - \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k \right)$ gegen Null konvergiert. Wir schätzen diese Folge gegen eine konvergente Folge ab:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n c_k - \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^n b_k \right) \right| &= \left| \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j \leq n} a_i b_j - \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i b_j \right| = \left| \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j > n} a_i b_j \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i, j \leq n, i+j > n} |a_i| |b_j| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k|. \end{aligned}$$

Dies ist eine Nullfolge nach Satz V.5.4 4. □

Am Ende dieses Abschnitts gehen wir kurz auf multiplikative Analoga zu Reihen ein:

Bemerkungen V.5.15.

- Ein *unendliches Produkt* $\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit Startindex $k_0 \in \mathbb{Z}$ und reellen oder komplexen Faktoren a_k erklären wir als

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=k_0}^n a_k,$$

falls der Limes der Partialprodukte auf der rechten Seite existiert. Im Fall positiver reeller Faktoren $a_k \in \mathbb{R}_{>0}$ können unendliche Produkte *auf Reihen zurückgeführt* werden, denn per Logarithmus-Rechenregel folgt

$$\log \prod_{k=k_0}^{\infty} a_k = \sum_{k=k_0}^{\infty} \log a_k,$$

wobei wir gegebenenfalls $\log \infty = \infty$ setzen.

- Als konkretes Beispiel, aus dem wir gleich noch eine interessante Folgerung ziehen, betrachten wir das Teleskopprodukt

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{1} = \infty$$

und erhalten durch Logarithmieren dann $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{k}) = \infty$. Damit ergibt sich ein eleganter neuer Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, denn gemäß der fundamentalen Logarithmus-Ungleichung gilt $\frac{1}{k} \geq \log(1+\frac{1}{k})$ für alle $k \in \mathbb{N}$, womit sich $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1+\frac{1}{k})$ als divergente Minorante für $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erweist.

V.6. Funktionenfolgen und Potenzreihen

Das Konzept der Konvergenz kann von Folgen und Reihen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ auf Folgen und Reihen \mathbb{K} -wertiger Funktionen ausgedehnt werden und wird sich auch in dieser größeren Allgemeinheit noch verschiedentlich als sehr wichtig erweisen.

Definition V.6.1. Es seien \mathcal{X} eine Menge, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge in $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$.

- (1) Dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *punktweise* auf \mathcal{X} gegen eine Grenzfunktion $f \in \text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ *konvergiert*, bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathcal{X},$$

also

$$\forall x \in \mathcal{X}: \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

- (2) Dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gleichmäßig* auf \mathcal{X} gegen eine Grenzfunktion $f \in \text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ *konvergiert*, bedeutet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in \mathcal{X}} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: \forall x \in \mathcal{X}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

wobei man mit der Definition des Supremums zunächst nur $\leq \varepsilon$ bekäme, wegen der Beliebigkeit von ε aber tatsächlich auch $< \varepsilon$ schreiben kann.

In beiden Fällen notieren wir $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ oder gleichbedeutend $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ und kennzeichnen die Art der Konvergenz durch Hinzusetzen von „punktweise auf \mathcal{X} “ oder „gleichmäßig auf \mathcal{X} “.

Für $k_0 \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$ in $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ erklären wir die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} g_k$ als die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Partialsummenfolge $(\sum_{k=k_0}^n g_k)_{n \in \mathbb{Z}_{\geq k_0}}$. Wir notieren bei derart konvergenten Reihen auch $\sum_{k=k_0}^{\infty} g_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=k_0}^n g_k$ für die Grenzfunktion.

Bemerkung V.6.2. Der Unterschied zwischen punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz besteht darin, dass der All-Quantor $\forall x \in \mathcal{X}$ einmal am Anfang, einmal am Ende der Quantoren-Abfolge steht, wobei die Vertauschung von $\forall x \in \mathcal{X}$ mit den anderen All-Quantoren $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ tatsächlich nichts ändert, die Vertauschung von $\forall x \in \mathcal{X}$ mit dem Existenz-Quantor $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ aber ganz entscheidend ist.

Letztere führt zum wesentlichen Unterschied, dass n_0 bei punktweiser Konvergenz von ε und von der betrachteten Stelle x abhängen darf, während n_0 bei gleichmäßiger Konvergenz nur von ε , aber eben *nicht* von x abhängen darf. Dies erklärt auch die Benennung als punktweise und gleichmäßige Konvergenz: Bei punktweiser Konvergenz fordert man die Existenz eines n_0 (und auch überhaupt die Konvergenz) für jeden Punkt $x \in \mathcal{X}$ einzeln, bei gleichmäßiger Konvergenz fordert man die Existenz eines (bei gegebenem ε) universellen n_0 , das dann für alle $x \in \mathcal{X}$ gleichermaßen funktioniert.

Beispiel V.6.3. Für die durch

$$f_n(x) := \frac{1}{1+n^3(x - \frac{1}{n})^2} = \frac{1}{n^3x^2 - 2n^2x + n+1} \text{ für } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

gegebene Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$$

punktweise auf \mathbb{R} (gemäß Grenzwertberechnung bei festem $x \in \mathbb{R}$), aber nicht gleichmäßig auf \mathbb{R} , weil $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Nach Bemerkung (V.6.1) ist klar: Aus gleichmäßiger Konvergenz folgt punktweise Konvergenz.

- (2) Die Grenzfunktion einer Funktionenfolge oder Funktionenreihe ist, wenn sie existiert, stets eindeutig bestimmt.

Für punktweise Konvergenz folgt dies direkt aus der Eindeutigkeit des Grenzwerts von Zahlenfolgen und damit gilt die Eindeutigkeit für gleichmäßige Konvergenz natürlich erst recht.

- (3) Gleichmäßige Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ für Funktionen $f_n, f \in \text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ auf $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ heißt also, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ die Graphen von f_n mit $n \gg 1$ in einem 2ε -Schlauch der Höhe 2ε um den Graph von f als Mittellinie bleiben.
- (4) Man bezeichnet eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ (mit Menge \mathcal{X} und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) als *gleichmäßige Cauchy-Folge* auf \mathcal{X} , wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}: \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}: \forall x \in \mathcal{X}: |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

gilt. Damit gilt das folgende *gleichmäßige Cauchy-Kriterium*: Eine Folge in $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ konvergiert genau dann gleichmäßig auf \mathcal{X} gegen eine Grenzfunktion in $\text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$, wenn sie eine gleichmäßige Cauchy-Folge auf \mathcal{X} ist:

Bei gleichmäßiger Konvergenz auf \mathcal{X} , $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und alle $x \in \mathcal{X}$. Hieraus folgt per Dreiecksungleichung $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und alle $x \in \mathcal{X}$. Also ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßige Cauchy-Folge auf \mathcal{X} .

Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßige Cauchy-Folge auf \mathcal{X} , so gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und alle $x \in \mathcal{X}$. Insbesondere ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes feste $x \in \mathcal{X}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} . Nach dem Cauchy-Kriterium aus Abschnitt V.1 existiert daher $f(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ und definiert eine Funktion $f \in \text{Abb}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$. Durch Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ in der Ungleichung $|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ erhalten wir $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ und alle $x \in \mathcal{X}$. Also liegt gleichmäßige Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ vor. Wir haben in diesem zweiten Beweisteil nur deshalb mit $\frac{\varepsilon}{2}$ statt direkt mit ε begonnen, weil „<“ im Grenzwert zu „≤“ wird und wir am Ende trotzdem mit einem „<“ herauskommen möchten. Man kann dies auch anders lösen.

- (5) Gleichmäßige Konvergenz erlaubt oft die Vertauschung von Grenzwerten, wofür auch implizit in Bildungen wie Supremum, Ableitung oder Integral enthaltene Grenzwerte in Frage kommen. Diese Rolle der gleichmäßigen Konvergenz wird sich erst im Verlauf der Nachfolge-Vorlesungen klarer herauskristallisieren.

Im Rest dieses Abschnitts beschäftigen wir uns hauptsächlich mit folgendem speziellen Typ von Funktionenreihen.

Definition V.6.4. Eine *Potenzreihe* (in einer Variablen) ist formal durch einen *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ und eine Folge $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von *Koeffizienten* $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots \in \mathbb{C}$ gegeben, mit denen für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + c_3(z-a)^3 + \dots$$

(speziell im Fall $z = a$ mit $0^0 := 1$ und daher Wert gleich c_0) gebildet wird. Der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ ist die Teilmenge $\{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \text{ konvergiert}\}$ von \mathbb{C} .

Während für eine Polynomfunktion nur endlich viele monomiale Terme $c_k(z-a)^k$ aufsummiert werden, sind es bei einer Potenzreihe (normalerweise) unendlich viele solche Terme. Die große Bedeutung solcher Reihen liegt zum einen darin, dass sich mit Ihnen viele Funktionen als Funktionenreihen mit Monomfunktionen (das sind im Wesentlichen Potenzen mit natürlichen Exponenten, also relativ einfache Funktionen) als Gliedern ausdrücken lassen, zum anderen darin, dass ihr Konvergenzbereich gemäß dem nächsten Satz eine prinzipiell einfache Struktur hat.

Satz V.6.5. *Es seien $a \in \mathbb{C}$, $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in \mathbb{C} . Dann existiert genau ein $R \in [0, \infty]$, der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$, so dass sich die Fälle $|z-a| < R$ und $|z-a| > R$ wie folgt wesentlich unterscheiden:*

- Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < R$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ absolut, und für jedes $r \in [0, R)$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k p_a^k$ mit $p_a^k(z) := (z - a)^k$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ sogar gleichmäßig.
- Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > R$ divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ bestimmt oder unbestimmt.

Bemerkungen V.6.6.

- Der Satz besagt, dass der Konvergenzbereich einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ die Kreisscheibe um den Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ als Mittelpunkt mit dem Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ als Radius ist. Genauer liegt jedenfalls für z innerhalb der Kreisscheibe (Fall $|z - a| < R$) Konvergenz und für z außerhalb der Kreisscheibe (Fall $|z - a| > R$) Divergenz vor, während für Randpunkte z der Kreisscheibe (Fall $|z - a| = R$) offen bleibt, ob Konvergenz oder Divergenz besteht. Damit ist der genaue Konvergenzbereich gemäß

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < R\} \subset \left\{z \in \mathbb{C} \mid \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k \text{ konvergent}\right\} \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq R\}$$

zwischen der Kreisscheibe ohne Randpunkte und der Kreisscheibe mit Randpunkten eingeschachtelt. Für das Randverhalten, auf das wir hier nicht genauer eingehen, bestehen tatsächlich die Möglichkeiten, dass für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| = R$ entweder stets absolute Konvergenz oder stets nicht-absolute Konvergenz oder stets Divergenz oder in ziemlich beliebiger Mischung für manche z nicht-absolute Konvergenz, für andere Divergenz vorliegt.

- Speziell ist der reelle Konvergenzbereich $\{x \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - a)^k \text{ konvergent}\}$ einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ stets ein Intervall. Im Fall $a \in \mathbb{R}$ handelt es sich um eines der Intervalle $(a - R, a + R)$, $[a - R, a + R)$, $(a - R, a + R]$, $[a - R, a + R]$ mit dem Konvergenzradius R .
- Der Konvergenzradius R kann auch 0 oder ∞ sein. Im Fall $R = 0$ besteht der genaue Konvergenzbereich $\{a\}$ nur aus dem Entwicklungspunkt a . Im Fall $R = \infty$ liegt für alle $z \in \mathbb{C}$ Konvergenz vor, und der genaue Konvergenzbereich ist ganz \mathbb{C} .

Der Beweis für das gerade beschriebene Konvergenz- und Divergenzverhalten basiert entscheidend auf dem Vergleich mit geometrischen Reihen und verläuft genauer wie folgt.

BEWEIS DES SATZES. Die Eindeutigkeit von R ist klar (denn wären $R_1 < R_2$ zwei Radien mit den genannten Eigenschaften, so müsste für $z \in \mathbb{C}$ mit $R_1 < |z - a| < R_2$ sowohl Divergenz als auch Konvergenz vorliegen). Die Existenz von R beweisen wir, indem wir für die Wahl

$$R := \sup \{s \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid (|c_k|s^k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ Nullfolge}\}$$

das behauptete Konvergenz- und Divergenzverhalten nachweisen. Dazu bemerken wir, dass $(|c_k|s^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ für alle $s \in [0, R)$ Nullfolge ist, denn $0 \leq s < R$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|s^k = 0$ implizieren $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|s^k = \lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|s^k (s/R)^k = 0 \cdot 0 = 0$ und für alle $s \in (R, \infty)$ keine Nullfolge ist (klar). Dann argumentieren wir einmal für (gutartige) Konvergenz und einmal für Divergenz:

- Wir betrachten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| \leq r < R$ und fixieren ein beliebiges $s \in (r, R)$, zum Beispiel $s := \frac{R+r}{2}$. Damit schätzen wir $|c_k(z - a)^k| \leq |c_k|r^k = |c_k|s^k (r/s)^k \leq (r/s)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq k_0}$ ab, wobei die letzte Abschätzung wegen $s < R$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|s^k = 0$ ab einem gewissen z -unabhängigen (!) Index $k_0 \in \mathbb{N}$ möglich ist. Also ist die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (r/s)^k$ zur Basis $r/s \in [0, 1)$ eine konvergente Majorantenreihe für $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$, und nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ absolut. Dass die Konvergenz in der behaupteten Weise gleichmäßig ist, folgt durch z -unabhängige Abschätzung der Reihenreste von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ durch die von $\sum_{k=0}^{\infty} (r/s)^k$, genauer ab $m \in \mathbb{N}_{\geq k_0}$ durch die Abschätzung $|\sum_{k=m}^{\infty} c_k(z - a)^k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |c_k(z - a)^k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} (r/s)^k \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$.
- Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > R$ ist nach Obigem $(|c_k||z - a|^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und damit auch $(c_k(z - a)^k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge. Nach dem Nullfolgenkriterium divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$ in diesem Fall.

Insgesamt ist die Existenz von R mit beiden behaupteten Eigenschaften gezeigt. \square

Bemerkungen V.6.7.

- Zur Bestimmung des Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ gibt es verschiedene Möglichkeiten. Oft lässt sich direkt durch Vergleich mit bekannten Reihen oder mit Kriterien aus Abschnitt V.5 entscheiden, für welche $z \in \mathbb{C}$ Konvergenz beziehungsweise Divergenz besteht, und der Konvergenzradius kann abgelesen werden. Alternativ kann man sich an den vorausgehenden Beweis anlehnen und $\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|s^k$ mit Parameter $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ untersuchen. Findet man das $R \in [0, \infty]$ (das es gemäß dem Beweis stets gibt), so dass der Limes für $s \in [0, R)$ Null und für $s \in (R, \infty)$ nicht Null (tatsächlich sogar immer ∞) ist, so ist der Konvergenzradius R bestimmt.

Den Konvergenzradius R können Sie explizit mit der *Formel von Euler* bestimmen:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Diese Formel ist gültig, falls dieser Limes in $[0, \infty]$ existiert; der Konvergenzradius existiert aber auch bei Nicht-Existenz des Limes. Alternativ gibt es die *Formel von Cauchy-Hadamard*

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}.$$

Diese ist allgemein gültig; *auch*, wenn der Limes superior 0 oder ∞ ist; in letzteren Fällen mit Verständnis $\frac{1}{0} := \infty$ bzw. $\frac{1}{\infty} := 0$. Die beiden Formeln lehnen sich dabei an das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium aus Abschnitt V.5 an. Genauer stellen die Kriterien für das durch die Formeln gegebene R und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-a| < R$ Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ sicher. Für $|z-a| > R$ Divergenz einzusehen und damit den Beweis der beiden Formeln zu vervollständigen, ist dann auch nicht mehr schwer.

- Unter der *Entwicklung einer Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ mit Konvergenzradius R um einen anderen Punkt b im Innern des Konvergenzbereichs (also um $b \in \mathbb{C}$ mit $|b-a| < R$) versteht man den Übergang zur Potenzreihe $\sum_{\ell=0}^{\infty} d_{\ell}(z-b)^{\ell}$ mit Entwicklungspunkt b und neuen Koeffizienten $d_{\ell} = \sum_{k=\ell}^{\infty} c_k \binom{k}{\ell} (b-a)^{k-\ell}$. Diese neue Reihe mit Entwicklungspunkt b ergibt sich, indem man bei der ursprünglichen Reihe mit Entwicklungspunkt a per Binomialsatz $(z-a)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (z-b)^{\ell} (b-a)^{k-\ell}$ ausmultipliziert und dann umsummiert. Man kann zeigen, dass der Konvergenzradius der neuen Reihe mindestens $R - |b-a|$ ist, und, dass zumindest für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-b| < R - |b-a|$ (woraus dann $|z-a| < R$ folgt) die Werte der beiden Reihen übereinstimmen. Anschaulich umfasst der Konvergenzbereich der neuen Reihe mindestens die größte Kreisscheibe mit Mittelpunkt b , die noch ganz im Innern des Konvergenzbereichs der ursprünglichen Reihe liegt.

Auch wenn wir Potenzreihen hier ganz allgemein eingeführt haben, werden wir uns im Folgenden vor allem für Varianten der geometrischen Reihe, bei denen der Konvergenzradius endlich ist, sowie für die Exponentialreihe und daraus abgeleitete Reihen mit Konvergenzradius ∞ interessieren. Wir geben zunächst zwei Beispiele vom einfachen geometrischen Typ.

Beispiele V.6.8.

- Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k(z-1)^k$ in der Variablen $z \in \mathbb{C}$ hat Entwicklungspunkt 1 und kann als geometrische Reihe zur Basis $2(z-1)$ aufgefasst werden. Damit ist klar, dass Konvergenz genau für $|2(z-1)| < 1$ oder mit anderen Worten genau für $|z-1| < \frac{1}{2}$ besteht. Der Konvergenzradius der Reihe ist $\frac{1}{2}$.
- Die Potenzreihe $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2^k}$ in der Variablen $z \in \mathbb{C}$ hat Entwicklungspunkt 0 und kann als geometrische Reihe zur Basis $\frac{z^2}{2}$ aufgefasst werden, wobei der Startindex 4 sich auf das Konvergenzverhalten natürlich nicht auswirkt. Konvergenz besteht genau für $|\frac{z^2}{2}| < 1$ oder äquivalent genau für $|z| < \sqrt{2}$. Der Konvergenzradius der Reihe ist $\sqrt{2}$.

Als Nächstes betrachten wir die vielleicht wichtigste Potenzreihe überhaupt, die komplexe Exponentialreihe, und nutzen diese zur Einführung der komplexen Exponentialfunktion:

Definition V.6.9. Wir erklären die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ über die gemäß dem folgenden Satz konvergente komplexe Exponentialreihe

$$\exp(z) := e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Theorem V.6.10. Die Exponentialreihe der vorausgehenden Definition ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius ∞ und konvergiert insbesondere für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut. Weiterhin hat die komplexe Exponentialfunktion folgende Eigenschaften:

- (1) Für die Approximation der komplexen Exponentialfunktion durch die Partialsummen der Exponentialreihe gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k \leq \frac{|z|^n}{(n+1)!} (e^{|z|} - 1) \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|z|} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N}_0.$$

- (2) Die komplexe Exponentialfunktion hat die Grenzwertdarstellung

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n} \right)^n \text{ für jede Folge } (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

(insbesondere natürlich $e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n$ für jedes $z \in \mathbb{C}$) und erweist sich damit als konsistente Erweiterung der reellen Exponentialfunktion aus Abschnitt V.2.

- (3) Es gilt das allgemeine Exponentialgesetz

$$e^{z+w} = e^z e^w \text{ für alle } w, z \in \mathbb{C}.$$

- (4) Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{i\varphi} = \operatorname{cis} \varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}.$$

- (5) Bei beliebigem $M \in \mathbb{R}$ gilt die Lipschitz-Abschätzung

$$|e^w - e^z| \leq e^M |w - z| \text{ für alle } z, w \in \mathbb{C} \text{ mit } \max\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w)\} \leq M.$$

Es ergeben sich verschiedene Folgerungen: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ erhält man die *Polardarstellung*

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} \operatorname{cis}(\operatorname{Im}(z))$$

von e^z mit $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$ und Polarwinkel $\operatorname{Im}(z)$. Da das Bild der reellen Exponentialfunktion ganz $\mathbb{R}_{>0}$ ist, folgt

$$\operatorname{Bild}(\exp) = \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

und die gerade erwähnte Polardarstellung ist letztlich nichts anderes als die aus Abschnitt V.3, die jede komplexe Zahl in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ erfasst. Weiterhin folgt auch $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, und mit der 2π -Periodizität von cis ergibt sich für $z, w \in \mathbb{C}$ die $2\pi i$ -Periodizität der komplexen Exponentialfunktion

$$e^w = e^z \iff w \in z + 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Nach diesen Ergänzungen kommen wir zum Nachweis der Gesetzmäßigkeiten im Theorem.

BEWEIS DES THEOREMS. Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} s^k = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ hat die Exponentialreihe Konvergenzradius ∞ und ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Wir beweisen nun die einzelnen Ungleichungen des Teils (1). Die linke Ungleichung folgt durch Abschätzung des Reihenrests $|e^z - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k$ mit der Dreiecksungleichung. Die mittlere Ungleichung ergibt sich mit der Exponentialreihe, einer Indexverschiebung und der Beobachtung $(n+k)! = (n+1)! \prod_{i=2}^k (n+i) \geq (n+1)! \prod_{i=2}^k i = (n+1)! k!$ durch Rechnung $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = |z|^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)!} |z|^k \leq \frac{|z|^n}{(n+1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = \frac{|z|^n}{(n+1)!} (e^{|z|} - 1)$. Die rechte Ungleichung folgt mit $e^{|z|} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} |z|^k \leq |z| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = |z| e^{|z|}$.

Den Beweis des Teils (2) gehen wir durch Ausmultiplizieren mittels Binomialsatz

$$\left(1 + \frac{z_n}{n} \right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n t_{k,n} z_n^k \text{ mit der Abkürzung } t_{k,n} := \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n}$$

an. Dabei gilt offensichtlich $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = \frac{1}{k!}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, woraus sich für die Summe mit n -abhängiger Zahl von Summanden aber nicht direkt eine Folgerung ziehen lässt. Wir führen deshalb eine beliebige Obergrenze $m \in \mathbb{N}$ ein, und schätzen für $n \geq m$ mit der Dreiecksungleichung und der Abschätzung $0 < t_{k,n} \leq \frac{1}{k!}$ für $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \right| &\leq \left| \sum_{k=0}^m \left(t_{k,n} z_n^k - \frac{1}{k!} z^k\right) \right| + \left| \sum_{k=m+1}^n t_{k,n} z_n^k \right| + \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} z^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^m \left| t_{k,n} z_n^k - \frac{1}{k!} z^k \right| + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} |z_n|^k + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k!} |z|^k. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{k,n} = \frac{1}{k!}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^k = z^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ geht nun der erste Term auf der rechten Seite (mit der festen Zahl $m+1$ von Summanden) für $n \rightarrow \infty$ gegen Null, während der zweite Term für $n \gg 1$ durch $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} (2|z|)^k$ nach oben abgeschätzt ist. Insgesamt erhalten wir daher

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} (2|z|)^k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k \text{ für beliebiges } m \in \mathbb{N}.$$

Wir können nun auch den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ durchführen. Da es sich um Reihenreste der Exponentialreihe an den Stellen $2|z|$ und $|z|$ handelt, gehen dann die Terme rechts gegen Null, und der Limes Superior auf der linken Seite ist tatsächlich ein Limes mit Wert Null. Wir erhalten also erst $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k \right| = 0$ und daraus dann mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = e^z$$

die behauptete Grenzwertdarstellung der Exponentialfunktion.

Teil (3) des Satzes wird in den Übungen durch Berechnung des Cauchy-Produkts zweier Exponentialreihen bewiesen.

Zum Beweis von Teil (4) gehen wir von den aus Abschnitt V.3 bekannten Ungleichungen $1 \geq \cos \varphi \geq \sqrt{1 - \varphi^2}$ für $\varphi \in [-1, 1]$ aus. Für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ lässt sich diese auf $\frac{\varphi}{n}$ mit $n \gg 1$ anstelle von φ anwenden und zeigt

$$0 \geq n(\cos \frac{\varphi}{n} - 1) \geq n\left(\sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{n^2}} - 1\right) = \frac{-\varphi^2}{\sqrt{n^2 - \varphi^2} + n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Per Einschachtelungsprinzip folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\cos \frac{\varphi}{n} - 1) = 0$. Ähnlich nutzen wir nun die Ungleichungen $\varphi \geq \sin \varphi \geq \varphi \cos \varphi$ für $\varphi \in [0, \pi]$ aus Abschnitt V.3. Für $\varphi \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $n \gg 1$ bekommen wir daraus

$$\varphi \geq n \sin \frac{\varphi}{n} \geq \varphi \cos \frac{\varphi}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi$$

und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\varphi}{n} = \varphi$, wobei letzteres wegen der ungeraden Parität von \sin sogar für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ richtig bleibt. Für $\text{cis} = \cos + i \sin$ haben wir in Zusammenfassung der gerade betrachteten Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\text{cis} \frac{\varphi}{n} - 1) = i\varphi \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R}$$

gezeigt. Für gegebenes $\varphi \in \mathbb{R}$ kombinieren wir dies nun mit Teil (2) für $z_n := n(\text{cis} \frac{\varphi}{n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} i\varphi$ und der Formel von De Moivre aus Abschnitt V.3 zu

$$e^{i\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{cis} \frac{\varphi}{n}\right)^n = \text{cis} \varphi.$$

Zum Beweis von Teil (5) benutzen wir $|a - b|^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b$ für $a, b \in \mathbb{C}$. Zudem schreiben wir $w, z \in \mathbb{C}$ als $w = uv + viv$ und $z = x + iy$ mit $u, v, x, y \in \mathbb{R}$. Mit zweimaliger Anwendung der gerade angegebenen Regel und dem Exponentialgesetz aus (3) und $|e^{iv}| = |e^{iy}| = 1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} |e^w - e^z|^2 &= |e^w|^2 + |e^z|^2 - e^w \bar{e^z} - \overline{e^w} e^z = (e^u)^2 + (e^x)^2 + e^u e^x (-e^{iv} \overline{e^{iy}} - \overline{e^{iv}} e^{iy}) \\ &= (e^u)^2 + (e^x)^2 - 2e^u e^x + e^u e^x (2 - e^{iv} \overline{e^{iy}} - \overline{e^{iv}} e^{iy}) = (e^u - e^x)^2 + e^u e^x |e^{iv} - e^{iy}|^2 \end{aligned}$$

Mit der fundamentalen Ungleichung $e^t \geq 1+t$ für $t \in \mathbb{R}$ aus Abschnitt V.2 können wir für $x \leq u \leq M$ nun $|e^u - e^x| = e^u(1 - e^{x-u}) \leq e^M(u-x) = e^M|u-x|$ und für $u \leq x \leq M$ analog $|e^u - e^x| = e^x(1 - e^{u-x}) \leq e^M(x-u) = e^M|u-x|$ abschätzen. Aus Teil (4) und der fundamentalen Ungleichung für cis aus Abschnitt V.3 bekommen wir zudem $|e^{iv} - e^{iy}| = |\text{cis } v - \text{cis } y| \leq |v-y|$. Wenden wir diese Beobachtungen auf der rechten Seite der vorausgehenden Abschätzung für $|e^w - e^z|^2$ an, so ergibt sich für $w = u + iv$, $z = x + iy$ mit $\max\{x, u\} \leq M$ insgesamt

$$|e^w - e^z|^2 \leq (e^M|u-x|)^2 + e^M e^M |v-y|^2 = (e^M)^2 |w-z|^2.$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel erhalten wir dann die letzte Behauptung. \square

Aufbauend auf der komplexen Exponentialfunktionen lassen sich verschiedene weitere Grundfunktionen im Komplexen einführen.

Korollar V.6.11. *Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert ein komplexer Logarithmus $w \in \mathbb{C}$ mit $e^w = z$, der (nur) bis auf Addition von $2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig ist. Die Abbildung*

$$\text{Log}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} + i(-\pi, \pi],$$

die einer Zahl in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ den vollständig eindeutigen Logarithmus w mit $\text{Im}(w) \in (-\pi, \pi]$ zuordnet, heißt der Hauptzweig des komplexen Logarithmus und ist bijektiv von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{R} + i(-\pi, \pi]$. Mit der in Abschnitt V.3 eingeführten Argumentfunktion $\text{Arg}: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$ gilt $\text{Log}(z) = \log|z| + i \text{Arg}(z)$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. \square

Definition V.6.12. Die Potenzen mit reellen Exponenten aus Abschnitt V.2 werden durch

$$b^s := e^{s \log b} \text{ für } b \in \mathbb{R}_{>0}, s \in \mathbb{C}$$

verallgemeinert.

Neben den üblichen Potenzgesetzen gilt hierfür auch $|b^s| = b^{\text{Re}(s)}$.

Definition V.6.13.

(1) Die *komplexen Kreisfunktionen* Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens werden durch

$$\begin{aligned} \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \text{ für } z \in \mathbb{C}, & \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \\ \tan z &:= \frac{\sin z}{\cos z} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)\frac{\pi}{2}, & \cot z &:= \frac{\cos z}{\sin z} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}\pi, \end{aligned}$$

konsistent auf komplexe Argumente erweitert. Der Sinus und der Kosinus besitzen die Potenzreihenentwicklungen

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \quad \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius ∞ , und es gilt

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

(2) Die *Hyperbelfunktionen* Sinus hyperbolicus, Kosinus hyperbolicus, Tangens hyperbolicus und Kotangens hyperbolicus werden durch

$$\begin{aligned} \cosh z &:= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ für } z \in \mathbb{C}, & \sinh z &:= \frac{e^z - e^{-z}}{2} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \\ \tanh z &:= \frac{\sinh z}{\cosh z} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{Z} + 1)i\frac{\pi}{2}, & \coth z &:= \frac{\cosh z}{\sinh z} \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}i\pi, \end{aligned}$$

konsistent auf komplexe Argumente erweitert. Der Sinus hyperbolicus und der Kosinus hyperbolicus besitzen die Potenzreihenentwicklungen

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} z^{2k} \text{ für } z \in \mathbb{C}, \quad \sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} z^{2k+1} \text{ für } z \in \mathbb{C}$$

mit Entwicklungspunkt 0 und Konvergenzradius ∞ , und es gilt

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Wir schließen dieses Kapitel nun mit einem Ausblick zur tatsächlich noch viel weiter führenden Theorie von Potenzreihen ab:

Bemerkungen V.6.14. Tatsächlich lassen sich für viele Funktionen der Analysis Potenzreihenentwicklungen angeben, und mit Differential- und Integralrechnung wird später auch die systematische Bestimmung solcher Entwicklungen möglich. Wir erwähnen hier *ohne Beweis* zwei grundlegende und interessante Fälle:

(1) Die *Logarithmusreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k = \operatorname{Log}(1+z) \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

mit Entwicklungspunkt 0 hat Konvergenzradius 1. Mit etwas Aufwand (Konvergenzkriterium von Dirichlet und Abelscher Grenzwertsatz) kann man tatsächlich zeigen, dass diese Reihe auch für Randpunkte $z \in S^1 \setminus \{-1\}$ nicht-absolut konvergent mit Wert $\operatorname{Log}(1+z)$ ist. Als Spezialfälle gibt dies Konvergenz und Wert interessanter Reihen: Für $z = 1$ erhalten wir die *alternierende harmonische Reihe*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \dots = \ln 2.$$

Für $z = i$ ergibt sich

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell-1}}{2\ell} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2\ell+1} = \operatorname{Log}(1+i) = \frac{1}{2} \ln 2 + i \frac{\pi}{4},$$

wobei die Realteile wieder auf die alternierende harmonische Reihe, die Imaginärteile auf die *Leibnizsche Reihe*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots = \frac{\pi}{4}$$

führen.

(2) Die *Binomialreihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} z^k = (1+z)^s \text{ für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1$$

mit Parameter $s \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspunkt 0 hat für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ Konvergenzradius 1 und ergibt die mit dem Logarithmus-Hauptzweig definierte Potenz $(1+z)^s = \exp(s \operatorname{Log}(1+z))$ (wie etwas früher in einer Bemerkung erwähnt). Im Fall $s \in \mathbb{N}_0$ vereinfacht sich die Reihe wegen $\binom{s}{k} = 0$ für $k \in \mathbb{N}_{>s}$ zu einer endlichen Summe, deren Wert durch den Binomialsatz aus Abschnitt IV.2 gegeben ist. Formal hat die Reihe für $s \in \mathbb{N}_0$ daher Konvergenzradius ∞ .

Vektorräume und lineare Abbildungen

In diesem Kapitel behandeln wir eine systematische Theorie von Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen als abstrakte algebraische Bildungen ähnlich den früher eingeführten. In engem Wechselspiel damit steht aber tatsächlich auch konkreteres Rechnen mit Vektoren und Matrizen.

VI.1. Vektorräume und Untervektorräume

Wir beginnen mit der grundlegenden Definition der Theorie. Sie kennen diese schon aus der Mathematik 1, IV.2.1 und IV.2.2: Dort hatten wir für die reelle Zahlenebene die Addition von Vektoren und die Streckung mit Skalaren aus \mathbb{R} betrachtet. Die folgende Definition verallgemeinert diesen Fall.

Definition VI.1.1. Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein K -Vektorraum oder *Vektorraum über K* ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ aus einer Menge V und Abbildungen

$$+ : V \times V \rightarrow V \text{ und } \cdot : K \times V \rightarrow V,$$

genannt die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation des Vektorraums, so dass folgende Vektorraumaxiome erfüllt sind:

- (V1) Bei $(V, +)$ handelt es sich um eine abelsche Gruppe.
 (V2) Es gelten die *Distributivgesetze*

$$\begin{aligned} (s + t) \cdot v &= (s \cdot v) + (t \cdot v), \\ s \cdot (v + w) &= (s \cdot v) + (s \cdot w) \text{ für } s, t \in K, v, w \in V. \end{aligned}$$

- (V3) Es gelten das *Assoziativgesetz* und die *Neutralität der Eins*

$$\begin{aligned} (st) \cdot v &= s \cdot (t \cdot v), \\ 1_K \cdot v &= v \text{ für } s, t \in K, v \in V. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Symbole $+$ und \cdot sowohl für die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation als auch die Körperaddition und -multiplikation verwendet, obwohl es sich um unterschiedliche Operationen handelt und diese in den Vektorraumaxiomen vermischt auftreten. Da sich die zugehörigen Operationen oft aus dem Kontext ergeben, bezeichnen wir statt $(K, +, \cdot)$ und $(V, +, \cdot)$ oft auch nur K als Körper und V als K -Vektorraum. Die Elemente des Vektorraums V nennen wir *Vektoren*, die des Grundkörpers K dagegen *Skalare*. Das neutrale Element der abelschen Gruppe $(V, +)$ bezeichnen wir als *Nullvektor* 0_V oder kurz 0 .

Bemerkungen VI.1.2.

- Wir verwenden für Vektoren und Skalare dieselben Konventionen zur Notationsvereinfachung wie für Zahlen oder Ring- bzw. Körperelemente, also das Einsparen des Malpunkts, die Notationen $-v$ für das additiv Inverse zu $v \in V$ und $v - w := v + (-w)$ für die Differenz von $v, w \in V$ und die üblichen Konventionen zur Klammereinsparung wie „Punkt- vor Strichrechnung“.
- Für das Rechnen mit einem Vektor $v \in V$, einem Skalar $s \in K$ sowie den neutralen Elementen $0_V \in V$ und $0_K, 1_K \in K$, die wir in Zukunft meist ohne die Indizes V und K notieren, gelten die Grundregeln

$$\begin{aligned} 0_K v &= 0_V, \\ s 0_V &= 0_V, \\ sv = 0_V &\implies (s = 0_K \vee v = 0_V), \\ (-1_K)v &= -v : \end{aligned}$$

Aus dem ersten Distributivgesetz erhalten wir $0v + 0v = (0 + 0)v = 0v$ und kommen dann durch Subtraktion von $0v$ auf die erste Regel $0v = 0$. Analog gibt das zweite Distributivgesetz $s0 + s0 = s(0 + 0) = s0$, woraus die zweite Regel folgt. Für die dritte Regel gehen wir von $sv = 0$ aus und nehmen ohne Einschränkung $s \neq 0$ an. Mit dem Reziproken s^{-1} zu s im Körper K , der Neutralität der Eins, dem Assoziativgesetz und der gerade bewiesenen zweiten Regel bekommen wir dann $v = 1v = (s^{-1}s)v = s^{-1}(sv) = s^{-1}0 = 0$, also die Behauptung. Für die letzte Regel rechnen wir in ähnlicher Weise

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$$

und lesen ab, dass $(-1)v$ das additive Inverse $-v$ zu v ist.

Bemerkung VI.1.3. Allgemeiner als oben kann man das Konzept des Vektorraums auch über Schiefkörpern K (also bei nicht-kommutativer Körpermultiplikation) einführen. Es ist dann allerdings zwischen K -Linksvektorräumen und K -Rechtsvektorräumen zu unterscheiden, wobei erstere wie oben und zweitere mit Skalarmultiplikation „von rechts“ $\cdot: V \times K \rightarrow V$ und daran angepassten Axiomen wie dem Rechts-Distributivgesetz $v \cdot (st) = (v \cdot s) \cdot t$ definiert werden. Die oben getroffene Konvention $v \cdot s = s \cdot v$ würde über Schiefkörpern schnell zu Irritation führen und ist in dieser Allgemeinheit nicht sinnvoll. Abgesehen von etlichen Unterscheidungen zwischen „Links-Begriffen“ und „Rechts-Begriffen“ verläuft die Theorie über Schiefkörpern aber relativ weitgehend analog zu der über Körpern.

Noch allgemeiner gibt es auch über einem Ring R das zum K -Vektorraum analoge Konzept des R -Moduls. Auch hier ist bei nicht-kommutativen R zwischen R -Linksmoduln und R -Rechtsmoduln zu unterscheiden. Moduln verhalten sich im Allgemeinen deutlich weniger gutartig als Vektorräume, beginnend schon damit, dass die dritte Regel in (VI.1.2) oben nicht übertragen werden kann. Daher unterscheidet sich diese Theorie wesentlich von der der Vektorräume.

Beispiele VI.1.4.

- Der *Nullvektorraum* $\{0\}$, der als einzigen Vektor den Nullvektor enthält, ist (mit der einzig möglichen Vektoraddition und Skalarmultiplikation) ein Vektorraum über jedem Körper.
- Jeder Körper ist mit der Körperaddition als Vektoraddition und der Körpermultiplikation als Skalarmultiplikation ein Vektorraum über sich selbst.
- Als wichtiges Beispiel betrachten wir für einen Körper K und $n \in \mathbb{N}$ den

K -Vektorraum K^n

mit der komponentenweisen Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{für } x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n \in K$$

als Vektoraddition und der durch

$$s \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ \vdots \\ sx_n \end{pmatrix} \quad \text{für } s, x_1, x_2, \dots, x_n \in K$$

definierten Skalarmultiplikation. Dabei haben wir, wie ab jetzt oft, *Tupel als Spaltenvektoren*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$$

notiert. Besonders werden wir im Folgenden $K = \mathbb{R}$ im Auge haben und haben dann auch eine gewisse *Anschaung des \mathbb{R} -Vektorraums \mathbb{R}^n* : Wie früher schon oft bemerkt entspricht \mathbb{R} einer Gerade, \mathbb{R}^2 einer Ebene und \mathbb{R}^3 einem Raum.

- In ähnlicher Weise ist für $n \in \mathbb{N}$ und jeden K -Vektorraum V auch das n -fache Produkt V^n ein K -Vektorraum sowie allgemeiner für $n \in \mathbb{N}$ und K -Vektorräume V_1, V_2, \dots, V_n auch das Produkt $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ ein K -Vektorraum jeweils mit der komponentenweisen Addition und der zum Vorausgehenden analogen Skalarmultiplikation.
- Ist K ein Teilkörper eines Körpers L , so ist jeder L -Vektorraum, etwa L selbst oder L^n mit $n \in \mathbb{N}$, auch ein K -Vektorraum (mit entsprechend eingeschränkter Skalarmultiplikation). Hieraus ergibt sich zum Beispiel, dass der \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C} auch \mathbb{R} - und \mathbb{Q} -Vektorraum sowie der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^3 auch \mathbb{Q} -Vektorraum ist.
- Für jede Menge \mathcal{X} und jeden Vektorraum V über einem Körper K ist auch $\text{Abb}(\mathcal{X}, V)$ mit der punktweisen Addition und der durch $(s \cdot f)(x) := s(f(x)) \in V$ für $s \in K, f \in \text{Abb}(\mathcal{X}, V), x \in \mathcal{X}$ definierten Skalarmultiplikation ein K -Vektorraum. Für konkrete \mathcal{X} und V werden sich auch Teilmengen von $\text{Abb}(\mathcal{X}, V)$ wie etwa die Mengen der stetigen, differenzierbaren oder integrierbaren Funktionen $\mathcal{X} \rightarrow V$ oder gewisser Homomorphismen $\mathcal{X} \rightarrow V$ oft als Vektorräume erweisen.
- Der *Polynomring* $K[X]$ über einem Körper K ist mit der Polynomaddition und der durch

$$s(a_\ell X^\ell + a_{\ell-1} X^{\ell-1} + \dots + a_1 X + a_0) := sa_\ell X^\ell + sa_{\ell-1} X^{\ell-1} + \dots + sa_1 X + sa_0$$

für $\ell \in \mathbb{N}_0, s, a_0, a_1, a_2, \dots, a_{\ell-1}, a_\ell \in K$ definierten Skalarmultiplikation ein K -Vektorraum. Auch die Teilmenge $K[X]_{\leq n} := \{p \in K[X] \mid \text{Grad}(p) \leq n\}$ der Polynome vom Grad $\leq n$ und die Teilmenge $U := \{a_{2\ell+1} X^{2\ell+1} + a_{2\ell-1} X^{2\ell-1} + \dots + a_3 X^3 + a_1 X \mid \ell \in \mathbb{N}_0, a_1, a_3, \dots, a_{2\ell-1}, a_{2\ell+1} \in K\}$ der ungeraden Polynome sind mit derselben Addition und Skalarmultiplikation K -Vektorräume.

Wie schon für Gruppen und Ringe gesehen lassen sich auch für Vektorräume Unterstrukturen erklären.

Definition VI.1.5. Sei K ein Körper. Ein K -Untervektorraum eines K -Vektorraums V ist eine Teilmenge U von V mit folgenden Eigenschaften:

- (U1) $0_V \in U$ für den Nullvektor 0_V von V ,
- (U2) *Abgeschlossenheit unter Vektoraddition:* $v + w \in U$ für alle $v, w \in U$,
- (U3) *Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation:* $sv \in U$ für alle $s \in K, v \in U$.

Gelegentlich bezeichnen wir einen Untervektorraum auch kurz als *Unterraum*.

Bemerkungen VI.1.6.

- Da ein Untervektorraum zumindest den Nullvektor enthält, ist er insbesondere $\neq \emptyset$.
- Aus der Abgeschlossenheit eines K -Untervektorraums U von V unter Skalarmultiplikation folgt wegen $-v = (-1)v$ seine Abgeschlossenheit auch unter Negation im Sinn von $-v \in U$ für alle $v \in U$. Die Abgeschlossenheit unter Addition und Negation bedeuten zusammen, dass U dann auch stets auch additive Untergruppe von V ist.
- Die Definition des Untervektorraums wurde so getroffen, dass jeder K -Untervektorraum mit entsprechend eingeschränkter Addition und Skalarmultiplikation selbst ein K -Vektorraum ist.

Beispiele VI.1.7.

- (1) Für jeden K -Vektorraum V sind der *Nullvektorraum* $\{0\}$ und der ganze Vektorraum V zwei K -Untervektorräume von V und offensichtlich der kleinst- und größtmögliche solche.
- (2) Erste Beispiele für Untervektorräume ergeben sich aus den Beispielen (VI.1.4), (VI.1.4) und (VI.1.4) zu Vektorräumen: Konkret ist etwa \mathbb{R} ein \mathbb{R} -Untervektorraum und \mathbb{Q} -Untervektorraum von \mathbb{C} , \mathbb{Q}^3 ist ein \mathbb{Q} -Untervektorraum von \mathbb{R}^3 , und $\mathbb{R} \times \{(0, 0)\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$ ist ein \mathbb{R} -Untervektorraum und \mathbb{Q} -Untervektorraum von \mathbb{R}^5 . Auch sind über einem beliebigen Körper K die im vorigen Beispiel (VI.1.4) angegebenen Teilmengen von $K[X]_{\leq n} \subset K[X]$ und $U \subset K[X]$ stets K -Untervektorräume von $K[X]$.
- (3) Wichtige Beispiele von K -Untervektorräumen eines K -Vektorraums V sind

$$Kv := \{sv \mid s \in K\} \text{ und } Kv + Kw := \{sv + tw \mid s, t \in K\}$$

mit dem Grundkörper K und festen Vektoren $v, w \in V$. Zwei konkrete Beispiele dieses Typs sind die \mathbb{R} -Untervektorräume

$$\mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \pi \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} s \\ -2s \\ \pi s \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \mathbb{R} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} s/2+t \\ -s+4t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

von \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 . Anschaulich entspricht dabei ersterer eine Gerade in \mathbb{R}^3 , für zweiteren wird etwas später klar, dass er mit der gesamten Ebene \mathbb{R}^2 übereinstimmt.

Bemerkungen VI.1.8. • Sei W ein Vektorraum über einem Körper K . Für K -Untervektorräume U und V von W geben der Schnitt $U \cap V$ und die Summe $U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$ wieder K -Untervektorräume von W :

Offensichtlich ist $0 \in U \cap V$ und $0 \in U + V$. Daneben sind diese Eigenschaften zu zeigen:

Abgeschlossenheit von $U \cap V$ unter Addition: Für $w_1, w_2 \in U \cap V$ ist einerseits mit $w_1, w_2 \in U$ auch $w_1 + w_2 \in U$, andererseits mit $w_1, w_2 \in V$ auch $w_1 + w_2 \in V$, insgesamt also $w_1 + w_2 \in U \cap V$.

Abgeschlossenheit von $U \cap V$ unter Skalarmultiplikation: Für $s \in K, w \in U \cap V$ ist einerseits mit $w \in U$ auch $sw \in U$, andererseits mit $w \in V$ auch $sw \in V$, insgesamt also $sw \in U \cap V$.

Abgeschlossenheit von $U + V$ unter Addition: Für $w_1, w_2 \in U + V$ ist $w_1 = u_1 + v_1, w_2 = u_2 + v_2$ mit $u_1, u_2 \in U, v_1, v_2 \in V$, und wir bekommen $w_1 + w_2 = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in U + V$.

Abgeschlossenheit von $U + V$ unter Skalarmultiplikation: Für $s \in K, w \in U + V$ ist $w = u + v$ mit $u \in U, v \in V$, und wir bekommen $sw = su + sv \in U + V$.

- Analog ergibt sich, dass sogar der Schnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ einer beliebigen Familie $(U_i)_{i \in I}$ von K -Untervektorräumen von W und die Summe $\sum_{i=1}^n U_i = \{ \sum_{i=1}^n u_i \mid u_i \in U_i \text{ für } i = 1, 2, \dots, n \}$ einer endlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ von K -Untervektorräumen U_1, U_2, \dots, U_n von W wieder K -Untervektorräume von W sind.
- Vorsicht: Sind U_1, U_2 K -Untervektorräume von W , so ist $U_1 \cup U_2$ im Allgemeinen *kein* Untervektorraum von W . Zum Beispiel können wir in $W = \mathbb{R}^2$ die Untervektorräume

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

betrachten. Dann sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $U_1 \cup U_2$, aber die Summe ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und dies ist kein Element von $U_1 \cup U_2$.

Tatsächlich ist $U_1 \cup U_2$ ausschließlich in der trivialen Situation, dass $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt und somit $U_1 \cup U_2$ mit U_1 oder U_2 selbst übereinstimmt, wieder ein K -Untervektorraum von W .

Wir betrachten als Nächstes erzeugte Unterstrukturen, die sich hier bei Vektorräumen schnell als eng verbunden mit sogenannten Linearkombinationen herausstellen werden:

Definition VI.1.9. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und A eine beliebige Teilmenge von V .

- Eine K -Linearkombination von $n \in \mathbb{N}_0$ Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ ist ein Vektor

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in V$$

mit beliebigen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$. Sind alle Koeffizienten gleich Null, so heißt die Linearkombination *trivial*, ist mindestens einer ungleich Null, so heißt sie *nicht-trivial*. Weiterhin bezeichnen wir einen Vektor in V als K -Linearkombination von Vektoren aus A , wenn er für irgendein *endliches*¹ $n \in \mathbb{N}_0$ eine K -Linearkombination von n Vektoren aus A ist.

- Der von A aufgespannte oder von A erzeugte K -Untervektorraum von V oder die K -lineare Hülle von A in V ist der (bezüglich „ \subset “) kleinste K -Untervektorraum U von V mit $A \subset U$. Er wird als $\text{Span}(A)$, $\text{Span}_K A$ oder $\langle A \rangle$ notiert. Für als Liste angegebene, endliche oder abzählbare Mengen A verzichten wir bei dieser Notation gelegentlich auf Mengenklammern und schreiben beispielsweise $\langle v_1, v_2, \dots \rangle$ für $\langle \{v_1, v_2, \dots\} \rangle$ oder $\text{Span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ für $\text{Span}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$.

¹Beim Begriff der Linearkombination gehen also auch für *unendliche* Mengen A nur *endliche* Summen ein. Unendliche Summen haben wir in einem beliebigen Vektorraum tatsächlich auch gar nicht zur Verfügung.

Am Rande sei angemerkt, dass wir oben für $n = 0$ die leere Summe $\sum_{i=1}^0 v_i$ als den Nullvektor verstehen. Mit dieser Konvention ist der Nullvektor formal K -Linearkombination von 0 Vektoren und auch K -Linearkombination von Vektoren aus \emptyset . Später erspart uns dies bisweilen, solche trivialen Situationen explizit ausschließen zu müssen.

Satz VI.1.10. *Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und A eine beliebige Teilmenge von V . Dann existiert $\text{Span}_K A$ und erfüllt*

$$\text{Span}_K A = \{w \in V \mid w \text{ ist } K\text{-Linearkombination von Vektoren aus } A\}.$$

BEWEIS. Sei $\text{LK}_K(A)$ die im Satz auftretende Menge der Linearkombinationen. Es ist zu zeigen, dass $\text{LK}_K(A)$ ein K -Untervektorraum von V mit $A \subset \text{LK}_K(A)$ ist und zudem $\text{LK}_K(A) \subset U$ für jeden anderen K -Untervektorraum U von V mit $A \subset U$ gilt.

Dabei ist $A \subset \text{LK}_K(A)$, weil jedes $w \in A$ mit $w = 1w$ Linearkombination von sich selbst ist. Ebenso $0 \in \text{LK}_K(A)$ und die Abgeschlossenheit von $\text{LK}_K(A)$ unter Skalarmultiplikation. Dass $\text{LK}_K(A)$ abgeschlossen unter Addition und damit K -Untervektorraum von V ist, kann man so begründen: Sind $v, w \in \text{LK}_K(A)$, also $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{j=1}^n \lambda_{m+j} v_{m+j}$ mit $m, n \in \mathbb{N}_0$, $v_i \in A$, $\lambda_i \in K$, so ist offensichtlich auch $v + w = \sum_{i=1}^{m+n} \lambda_i v_i \in \text{LK}_K(A)$.

Ist U ein weiterer K -Untervektorraum von V mit $A \subset U$, so erhalten wir $\text{LK}_K(A) \subset U$ wie folgt: Für $v \in \text{LK}_K(A)$ ist $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ mit $m \in \mathbb{N}$, $v_i \in A$, $\lambda_i \in K$. Wegen $A \subset U$ sind dann $v_i \in U$ und wegen der Abgeschlossenheit des Untervektorraums U unter Skalarmultiplikation und Addition folgen $\lambda_i v_i \in U$ und $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in U$. \square

Bemerkungen VI.1.11. Die Existenz von $\text{Span}_K A$ ergibt sich mit dem vorausgehenden Beweis. Alternativ kann man die Existenz mit dem Standard-Ansatz zeigen, dass der kleinste K -Untervektorraum U von V mit $A \subset U$ sich als Durchschnitt aller K -Untervektorräume U von V mit $A \subset U$ ergibt.

Beispiele VI.1.12.

- Da der Nullvektorraum $\{0\}$ stets der kleinste Untervektorraum ist, gelten $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ und $\langle \{0\} \rangle = \{0\}$ in jedem Vektorraum.
- In jedem Vektorraum V über einem Körper K geben

$$\langle v \rangle = Kv \text{ und } \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = Kv_1 + Kv_2 + \dots + Kv_n$$

mit $v \in V$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ im Wesentlichen schon betrachtete Standard-Beispiele von Untervektorräumen.

- Im \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R} ist $\text{Span}_{\mathbb{R}} A = \mathbb{R}$ für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ außer $A = \emptyset$ und $A = \{0\}$. Als für unsere Betrachtungen eher randständige Beispiele im \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{R} erwähnen wir aber noch $\text{Span}_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ und $\text{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts beschreiben wir noch in Kürze, wie mit Untervektorräumen einerseits affine Unterräume, andererseits Quotientenvektorräume gebildet werden können.

Definition VI.1.13. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Ein *affiner Unterraum* von V ist eine Teilmenge der Form $x + U$ von V mit beliebigem $x \in V$ und einem K -Untervektorraum U von V .

Bemerkungen VI.1.14. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

- Ein affiner Unterraum A von V erfüllt $A = x + U$ für jedes beliebige $x \in A$ und einen festen K -Untervektorraum U von V . Dies ergibt sich, weil für $\tilde{x} \in x + U$ stets $\tilde{x} + U = x + U$ gilt. In Anlehnung an die folgenden Beispiele bezeichnet man dabei manchmal x als Aufpunkt und U als Raum der Richtungen von A .
- Ein affiner Unterraum A von V ist genau dann ein K -Untervektorraum von V , wenn $0 \in A$ gilt. Dies folgt aus der vorigen Bemerkung (VI.1.14) mit $x = 0$ oder auch direkter.
- Auch der von einer nicht-leeren Teilmenge von V aufgespannte *affine* Unterraum von V kann als der kleinste affine Unterraum von V , der die Teilmenge enthält, sinnvoll erklärt werden. Da jeder nicht-leere Schnitt von affinen Unterräumen, wie man mit Bemerkung (VI.1.14) sieht, wieder ein affiner Unterraum ist, ergibt sich auch die generelle Existenz aufgespannter affiner Unterräume mit der üblichen Durchschnitts-Konstruktion.

Beispiele VI.1.15.

- Ein affiner Unterraum

$$x + \langle v \rangle = x + \mathbb{R}v$$

mit Aufpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ entspricht einer Geraden im \mathbb{R}^n . Dabei sind weder x noch v , aber schon $\langle v \rangle = \mathbb{R}v$ eindeutig durch den affinen Unterraum bestimmt.

- Ein affiner Unterraum

$$x + \langle v_1, v_2 \rangle = x + \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$$

mit Aufpunkt $x \in \mathbb{R}^n$ und Richtungsvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass $\mathbb{R}v_1 \neq \mathbb{R}v_2$, entspricht einer Ebene in \mathbb{R}^n . Dabei sind weder x noch $\langle v_1 \rangle = \mathbb{R}v_1$ noch $\langle v_2 \rangle = \mathbb{R}v_2$, aber schon $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$ eindeutig durch den affinen Unterraum bestimmt.

Zuletzt kommen wir in diesem Abschnitt zu Quotientenvektorräumen, die ganz analog zu den schon behandelten Faktorgruppen und Faktorringsen erklärt werden.

Definition VI.1.16. Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U ein Untervektorraum von V . Unter dem *Quotientenvektorraum* (oder *Faktorraum*) V/U (lies: V durch U oder V modulo U) versteht man die Quotientenmenge

$$V/U := \{x + U \mid x \in V\}$$

bezüglich der durch $x \sim_U y: \Leftrightarrow y - x \in U$ gegebenen Äquivalenzrelation mit zugehörigen Äquivalenzklassen $[x]_{\sim_U} = x + U = \{x + u \mid u \in U\}$ zusammen mit der durch

$$\begin{aligned} (x + U) + (y + U) &:= (x + y) + U \in V/U && \text{für } x + U, y + U \in V/U, \\ s \cdot (x + U) &:= sx + U \in V/U && \text{für } s \in K, x + U \in V/U \end{aligned}$$

definierten Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Bei Vektorräumen verhält sich diese Bildung sogar besonders gutartig. Anders als etwa bei Gruppen oder Ringen erhält man nämlich ganz allgemein und ohne Zusatzbedingung an den Untervektorraum U als Quotient V/U stets wieder einen Vektorraum:

Satz VI.1.17. *Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und U ein Untervektorraum von V . Dann sind die Addition und Skalarmultiplikation der vorigen Definition wohldefiniert, und der Quotientenvektorraum V/U ist mit diesen Operationen ein K -Vektorraum.*

BEWEIS. Dass die Vektoraddition wohldefiniert und V/U mit dieser eine abelsche Gruppe bildet, wissen wir aus der Mathematik 1, denn in der abelschen Gruppe $(V, +)$ ist die Untergruppe U auch Normalteiler.

Für die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation betrachten wir zwei Repräsentanten $x, x' \in V$ einer Äquivalenzklasse $x' + U = x + U \in V/U$. Aus $x' - x \in U$ folgt dann mit der Abgeschlossenheit von U unter Skalarmultiplikation $sx' - sx = s(x' - x) \in U$. Mit $sx' + U = sx + U$ sehen wir dann, dass der $s \cdot (x + U)$ definierende Ausdruck $sx + U$ nicht von der Repräsentantenwahl abhängt.

Somit bleiben nur die Vektorraumaxiome für V/U aus den Definitionen und den Vektorraumaxiomen von V abzuleiten. Zum Beispiel rechnet man für das zweite Distributivgesetz

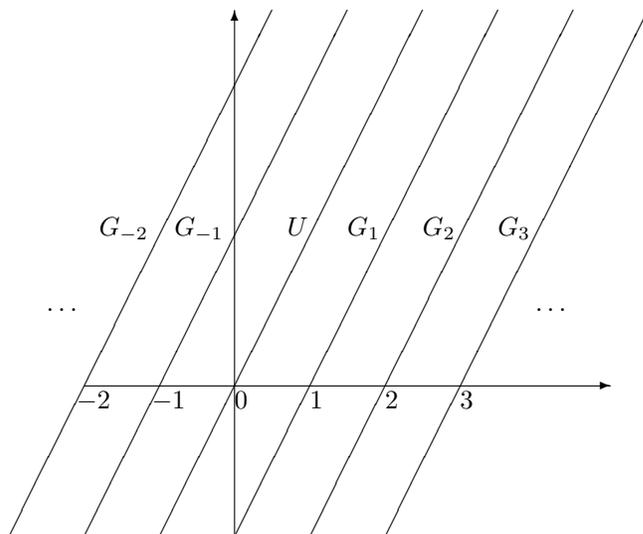
$$s((x + U) + (y + U)) = s((x + y) + U) = s(x + y) + U = (sx + sy) + U = (sx + U) + (sy + U)$$

für $s \in K, x, y \in V$. Die weiteren Axiome weist man ganz ähnlich nach. □

Bemerkung VI.1.18. Die Elemente von V/U sind die affinen Unterräume von V , die den festen Untervektorraum U als Raum von Richtungen haben. Speziell für eine Ursprungsgerade U bzw. eine Ebene U durch den Ursprung in \mathbb{R}^n , besteht \mathbb{R}^n/U aus allen zu U parallelen Geraden bzw. Ebenen in \mathbb{R}^n . Das Rechnen in diesen Faktorräumen kann man daher als ein Rechnen mit parallelen affinen Unterräumen, parallelen Geraden bzw. parallelen Ebenen auffassen.

Beispiel VI.1.19. Ist $V = \mathbb{R}^2$ und ist $U = \text{Span}_K \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, dann entsprechen die Äquivalenzklassen affinen Geraden, die parallel sind zu U : Die Gerade U entspricht der Äquivalenzklasse des Nullpunkts. Die affine Gerade G_1 mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Schnittpunkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der x -Achse enthält alle Vektoren, die in der Äquivalenzklasse des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen. Die Äquivalenzklasse des Vektors $\begin{pmatrix} 3, 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die gleiche wie

die Äquivalenzklasse des Vektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und entspricht der affinen Gerade G_3 mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und Schnittpunkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der x -Achse.



VI.2. Basen von Vektorräumen und der Dimensionsbegriff

Als Nächstes wollen wir ausgehend von einem System nur einiger Vektoren eines Vektorraums alle anderen Vektoren als deren Linearkombinationen beschreiben. Die gutartigen Systeme, bezüglich denen dies möglich sein wird, heißen Basen. Bevor wir zu diesen kommen, führen wir aber zunächst ein vorbereitendes und ebenfalls wichtiges Konzept ein:

Definition VI.2.1. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

- (1) Wir nennen $m \in \mathbb{N}$ Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ *linear unabhängig* über K , wenn für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ die Implikation

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j v_j = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$$

gilt. Andernfalls heißen v_1, v_2, \dots, v_m *linear abhängig* über K .

- (2) Wir nennen eine Teilmenge A von V *linear unabhängig* über K , wenn jede *endliche* Menge von Vektoren aus A ohne Mehrfachnennung desselben Vektors über K linear unabhängig ist, wenn also die Implikation $\sum_{v \in E} \lambda_v v = 0 \implies \forall v \in E: \lambda_v = 0$ für alle *endlichen* Teilmengen E von A und alle mit E indizierten Familien $(\lambda_v)_{v \in E}$ von Elementen von K gilt. Andernfalls heißt A *linear abhängig* über K .

In gleicher Bedeutung sprechen wir auch von *K -linear unabhängigen* und von *K -linear abhängigen* Vektoren und Mengen.

Bemerkungen VI.2.2.

- (1) Lineare (Un-)Abhängigkeit endlich vieler Vektoren und endlicher Teilmengen sind im Wesentlichen dieselben Konzepte. Genauer sind Vektoren v_1, v_2, \dots, v_m mit $m \in \mathbb{N}$ genau dann linear unabhängig, wenn sie alle verschieden sind und $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ linear unabhängig ist.
- (2) Die lineare Unabhängigkeit *eines* einzelnen Vektors $v_1 \in V$ (Fall $m = 1$ in der Definition) bedeutet einfach $v_1 \neq 0$.
- (3) Die lineare Unabhängigkeit *zweier* Vektoren $v_1, v_2 \in V$ (Fall $m = 2$ in der Definition) bedeutet $v_1 \neq 0$ und $v_2 \neq s v_1$ für alle $s \in K$. Für $K = \mathbb{R}$ bedeutet dies anschaulich, dass zwei linear

- (3) Manchmal werden wir bei einer Basis b_1, b_2, \dots, b_m Wert auf die Reihenfolge der Vektoren legen. Wir fassen dann die Basisvektoren als Tupel (b_1, b_2, \dots, b_m) zusammen und sprechen in diesem Fall von einer *geordneten* Basis.
- (4) Die definierende Eigenschaft eines K -Erzeugendensystems b_1, b_2, \dots, b_m von V ist die, dass jeder Vektor $v \in V$ als K -Linearkombination $v = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j$ der Basisvektoren mit gewissen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$ geschrieben werden kann. Bei einer K -Basis b_1, b_2, \dots, b_m von V sind zudem die Koeffizienten λ_j durch den Vektor v und die Basis eindeutig bestimmt, weil ansonsten die Differenz zweier Darstellungen eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors gäbe und dies durch lineare Unabhängigkeit ausgeschlossen ist. Man hat also für jedes $v \in V$ eine *Basisdarstellung*

$$v = \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j \text{ mit } \textit{eindeutigen} \text{ Koeffizienten } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K.$$

Zur konkreten Bestimmung der Koeffizienten ist erneut ein lineares Gleichungssystem für diese zu lösen. Auf der linken Seite des Systems stehen dabei exakt dieselben Terme wie beim Nachweis der linearen Unabhängigkeit von b_1, b_2, \dots, b_m , nur auf der rechten Seite stehen statt der Nullen die Einträge des gegebenen Vektors v . Aufgrund der Übereinstimmung links kann man aber über dieselben Umformungen vorgehen und beide Aufgaben zu einem gewissen Grad simultan erledigen.

- (5) Mit den n Vektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in K^n$$

gilt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ für jeden Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$. Da diese Darstellung offensichtlich eindeutig ist, bilden somit e_1, e_2, \dots, e_n eine K -Basis von K^n , die als *kanonische Basis des K^n* oder *Standardbasis des K^n* bezeichnet wird.

- (6) Mit der vorigen Bemerkung wird klar, dass die Einträge eines Spaltenvektors aus K^n die Koeffizienten der Basisdarstellung bezüglich der kanonischen Basis sind. Aufbauend hierauf notiert man auch die *\mathcal{B} -Basisdarstellung* bezüglich einer beliebigen geordneten Basis $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ von V manchmal in an die „normalen“ Spaltenvektoren angelehnter Notation

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} := \sum_{j=1}^m \lambda_j b_j \in V \text{ für } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K.$$

Für die Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ von K^n ist dabei natürlich $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$.

Beispiel VI.2.6. Bezüglich der geordneten Basis

$$\mathcal{B} := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von \mathbb{R}^2 über \mathbb{R} hat der Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ die Basisdarstellung

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 7 \\ -10 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}.$$

Die Berechnung dieser Darstellung gelingt dabei mit dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= -3, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4, \end{aligned}$$

für das man die eindeutige Lösung $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -10$ ermittelt.

Unsere nächsten Ziele sind drei entscheidende Sätze über Basen:

Theorem VI.2.7. *Es sei K ein Körper. Jeder K -Vektorraum hat eine K -Basis.*

Satz VI.2.8 (Basisergänzungssatz). *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Für jede K -linear unabhängige Teilmenge A von V gibt es eine K -Basis B von V mit $A \subset B$.*

Satz VI.2.9 (Basisauswahlsatz). *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Für jedes K -Erzeugendensystem C von V gibt es eine K -Basis B von V mit $B \subset C$.*

Dabei ist der Existenzsatz für $A = \emptyset$ im Basisergänzungssatz enthalten. Tatsächlich formulieren wir als Nächstes aber sogar eine Aussage, die alle drei Sätze als Spezialfälle enthält und nur diese verallgemeinerte Aussage werden wir daher noch beweisen.

Satz VI.2.10. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Für eine K -linear unabhängige Teilmenge A von V und ein K -Erzeugendensystem C von V mit $A \subset C$ gibt es stets eine K -Basis B von V mit $A \subset B \subset C$.*

Bemerkung VI.2.11. Der obige Satz sichert zwar generell die Existenz mindestens einer Basis, bringt aber keine Möglichkeit, eine Basis explizit zu bestimmen. Tatsächlich stützt sich der noch folgende Beweis entscheidend auf das Zornsche Lemma aus der Mathematik 1, welches wiederum auf dem Auswahlaxiom der Mengenlehre basiert, und ist überhaupt nicht konstruktiv. Konkret lässt sich etwa für den \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{R} eine Basis nicht explizit angeben. Es kann aber gezeigt werden, dass alle \mathbb{Q} -Basen von \mathbb{R} überabzählbar sind: Hätte \mathbb{R} eine abzählbare \mathbb{Q} -Basis, so wäre es selbst abzählbar.

BEWEIS DES LETZTEN SATZES. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{S} := \{M \in \mathcal{P}(V) \mid M \text{ linear unabhängig über } K \text{ mit } A \subset M \subset C\}$$

mit der Mengeninklusion „ \subset “ als Ordnungsrelation auf \mathcal{S} und halten $\mathcal{S} \neq \emptyset$ fest, denn wegen der K -linearen Unabhängigkeit von A gilt auf jeden Fall $A \in \mathcal{S}$.

Wir zeigen nun folgende, als Voraussetzung für das Zornsche Lemma benötigte Aussage (alles bezüglich „ \subset “):

Jede Kette $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ hat eine obere Schranke in \mathcal{S} .

Für $\mathcal{K} = \emptyset$ ist jedes Element von \mathcal{S} eine obere Schranke und dies ist klar, weil $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Für $\mathcal{K} \neq \emptyset$ ist $\bigcup \mathcal{K} = \bigcup_{M \in \mathcal{K}} M$ die benötigte Schranke, sofern $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{S}$ gilt. Dafür weisen wir erst K -lineare Unabhängigkeit von $\bigcup \mathcal{K}$ nach: Für endlich viele Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_m \in \bigcup \mathcal{K}$ gibt es $M_1, M_2, \dots, M_m \in \mathcal{K}$ mit $v_i \in M_i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Da \mathcal{K} eine Kette ist, ist unter M_1, M_2, \dots, M_m eine größte Menge M_{i_0} mit $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$, so dass $M_i \subset M_{i_0}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ gilt. Es sind also $v_1, v_2, \dots, v_m \in M_{i_0}$, und M_{i_0} ist K -linear unabhängig (wegen $M_{i_0} \in \mathcal{K} \subset \mathcal{S}$ und der Wahl von \mathcal{S}). Also sind v_1, v_2, \dots, v_m ebenfalls K -linear unabhängig, und $\bigcup \mathcal{K}$ ist insgesamt K -linear unabhängig. Nach Wahl von \mathcal{S} gilt zudem $A \subset M \subset C$ für alle $M \in \mathcal{K} \neq \emptyset$ und damit $A \subset \bigcup \mathcal{K} \subset C$. Insgesamt ist wie benötigt $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{S}$ und die obige, benötigte Aussage gezeigt.

Damit können wir das Zornsche Lemma auf \mathcal{S} anwenden und erhalten die Existenz eines bezüglich Mengeninklusion maximalen Elements B von \mathcal{S} . Nach Wahl von \mathcal{S} gilt $A \subset B \subset C$, und B ist K -linear unabhängig. Um die Behauptung des Satzes zu erhalten, müssen wir also nur noch aus der Maximalität von B folgern, dass B ein K -Erzeugendensystem (und damit eine K -Basis) von V ist.

Es sei hierzu $v \in C \setminus B$. Wegen der Maximalität von B kann dann $B \sqcup \{v\}$ nicht in \mathcal{S} sein. Da $A \subset B \sqcup \{v\} \subset C$ erfüllt ist, erzwingt dies die K -lineare Abhängigkeit von $B \sqcup \{v\}$. Es gibt also $m \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \dots, b_m \in B$ und Koeffizienten $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in K$, die nicht alle Null sind, mit $\lambda v + \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = 0$. Ist $\lambda = 0$, so erhalten wir mit $\sum_{i=1}^m \lambda_i b_i = 0$, wobei nicht alle λ_i Null sind, einen Widerspruch zur K -linearen Unabhängigkeit von B . Also ist $\lambda \neq 0$, wir können zu $v = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$ auflösen und $v \in \text{Span}_K B$ ablesen. Insgesamt haben wir damit $C \setminus B \subset \text{Span}_K B$ gezeigt und bekommen wegen der trivialen Inklusion $B \subset \text{Span}_K B$ sofort auch $C \subset \text{Span}_K B$. Hieraus folgt mit der Eigenschaft des K -Erzeugendensystems C schließlich $V = \text{Span}_K C \subset \text{Span}_K(\text{Span}_K B) = \text{Span}_K B$. Also ist B ein K -Erzeugendensystem von V und der Beweis komplett. \square

Aus dem Basisergänzungs- und dem Basisauswahlsatz ergeben sich zwei grundlegende Charakterisierungen von Basen, die beim vorigen Beweis teils schon mitschwangen.

Korollar VI.2.12. *Für einen Körper K , einen K -Vektorraum V und $B \subset V$ sind äquivalent:*

- (1) B ist eine K -Basis von V .
- (2) B ist eine bezüglich „ \subset “ maximale K -linear unabhängige Teilmenge von V .
- (3) B ist ein bezüglich „ \subset “ minimales K -Erzeugendensystem von V .

BEWEIS. Die Implikation (2) \implies (1) ergibt sich mit dem Basisergänzungssatz: Die maximale K -linear unabhängige Teilmenge B von V kann zu einer K -Basis von V ergänzt werden, die insbesondere K -linear unabhängig ist und wegen der Maximalität mit B übereinstimmt. Analog ergibt sich (3) \implies (1) mit dem Basisauswahlsatz. Die Implikationen (1) \implies (2) und (1) \implies (3) sind Thema der Übungen. \square

Im Rest dieses Abschnitts geht es maßgeblich um den Begriff der Dimension. Um diese definieren zu können, benötigen wir aber zunächst noch ein konkretes Resultat über Basen von Vektorräumen.

Satz VI.2.13 (Basisaustauschsatz von Steinitz). *Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und B eine K -Basis von V . Für $n \in \mathbb{N}$ und K -linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ gibt es n verschiedene Vektoren $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$, so dass auch $(B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}) \sqcup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine K -Basis von V ist.*

Grob gesprochen besagt der Satz, dass gegebene linear unabhängige Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ in einer ebenfalls gegebenen Basis B gewisse Basisvektoren $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ ersetzen können, ohne dass hierdurch die Basiseigenschaft zerstört wird. Man kann also „alte“ Basisvektoren b_1, b_2, \dots, b_n durch die „neuen“ Basisvektoren v_1, v_2, \dots, v_n austauschen.

Der Schlüssel zum Beweis des Austauschsatzes ist tatsächlich die Behandlung des Falls $n = 1$, für den wir noch eine minimal präzisere Aussage (nämlich inklusive Kriterium, *welcher* Basisvektor weggelassen werden kann) als Lemma formulieren und beweisen:

Lemma VI.2.14. *Es sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und B eine K -Basis von V .*

Ist für $v \in V$ in der Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i b_i$ mit $\ell \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2, \dots, b_{\ell} \in B$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell} \in K$ für ein $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ der Koeffizient $\lambda_{i_0} \neq 0$, so ist auch $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ eine K -Basis von V .

BEWEIS. Zunächst ist $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \cap \{v\} = \emptyset$ und „ \sqcup “ in der Aussage des Lemmas berechtigt, weil in der eindeutigen B -Basisdarstellung eines Basisvektors $v \in B \setminus \{b_{i_0}\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung $\lambda_{i_0} \neq 0$ wäre.

Wir komplettieren den Beweis durch die Nachweise, dass $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ einerseits ein K -Erzeugendensystem von V , andererseits K -linear unabhängig ist.

Für die Eigenschaft als Erzeugendensystem lösen wir die B -Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i b_i$ zu $b_{i_0} = \lambda_{i_0}^{-1} (v - \sum_{i \in \{1, 2, \dots, \ell\} \setminus \{i_0\}} \lambda_i b_i)$ auf. Damit können wir das Auftreten von b_{i_0} in der B -Basisdarstellung eines Vektors $w \in V$ eliminieren und b_{i_0} durch v und die b_i mit $i \neq i_0$ ersetzen. Somit ist jedes $w \in V$ eine K -Linearkombination von Vektoren aus $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$, und $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ ist ein K -Erzeugendensystem von V .

Zum Beweis der K -linearen Unabhängigkeit von $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ schreiben wir 0 als Linearkombination von Vektoren aus $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ und zeigen, dass diese Linearkombination trivial sein muss. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die schon im Lemma auftretenden Basisvektoren $b_1, b_2, \dots, b_{i_0-1}, b_{i_0+1}, \dots, b_{\ell}$ bei der Linearkombination, eventuell mit Null-Koeffizienten, vorkommen, können also

$$\mu v + \sum_{i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}} \mu_i b_i = 0$$

mit beliebigen $m \in \mathbb{N}_{\geq \ell}$, $b_{\ell+1}, b_{\ell+2}, \dots, b_m \in B$, $\mu, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{i_0-1}, \mu_{i_0+1}, \dots, \mu_m \in K$ ansetzen. Vereinbaren wir $\lambda_i := 0$ für $i \in \mathbb{N}_{> \ell}$, so können wir $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$ in den Ansatz einsetzen und bekommen $\mu \lambda_{i_0} b_{i_0} + \sum_{i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}} (\mu_i + \mu \lambda_i) b_i = 0$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der b_i folgen $\mu \lambda_{i_0} = 0$ und $\mu_i + \mu \lambda_i = 0$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$. Wegen $\lambda_{i_0} \neq 0$ bedeutet dies, dass mit $\mu = 0$ und $\mu_i = 0$ für $i \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{i_0\}$ alle Koeffizienten des Ansatzes Null sind. Also ist $(B \setminus \{b_{i_0}\}) \sqcup \{v\}$ wie behauptet K -linear unabhängig. \square

BEWEIS DES BASISAUSTAUSCHSATZES. Wir zeigen die Behauptung des Satzes durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$.

Beim Induktionsanfang für $n = 1$ ist $v_1 \in V$ nach Voraussetzung linear unabhängig, also $v_1 \neq 0$. In der Basisdarstellung $v_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \beta_i$ mit $\ell \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\ell} \in B$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell} \in K$ ist daher $\lambda_{i_0} \neq 0$ für mindestens ein $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$. Nach dem Lemma ist $(B \setminus \{\beta_{i_0}\}) \sqcup \{v_1\}$ eine Basis von V , und wir erhalten die Behauptung des Satzes für $n = 1$ mit $b_1 = \beta_{i_0}$.

Beim Induktionsschluss von $n \in \mathbb{N}$ zu $n + 1$ sind linear unabhängige $v_1, v_2, \dots, v_{n+1} \in V$ gegeben. Da insbesondere v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig sind, ist nach Induktionsannahme $(B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}) \sqcup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Nun hat v_{n+1} eine Basisdarstellung $v_{n+1} = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i \beta_i + \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$ mit $\ell \in \mathbb{N}$, $\beta_1, \dots, \beta_{\ell} \in B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{\ell} = 0$ wäre der Nullvektor $0 = v_{n+1} - \sum_{j=1}^n \mu_j v_j$ eine nicht-triviale Linearkombination von $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$, was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ stünde. Also gibt es mindestens ein $i_0 \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ mit $\lambda_{i_0} \neq 0$. Das Lemma, angewandt auf die vorausgehende Basisdarstellung von v_{n+1} , erlaubt daher, in der Basis $(B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}) \sqcup \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ den Vektor $b_{n+1} := \beta_{i_0} \in B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ durch v_{n+1} auszutauschen. Wir erhalten, dass $(B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}) \sqcup \{v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ eine Basis von V ist, und der Induktionsschritt ist komplett. \square

Als zentrale Anwendung des Basisaustauschsatzes können wir die Dimension eines Vektorraums als die eindeutig bestimmte Länge seiner Basen einführen:

Theorem VI.2.15. *Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Ist V über K endlich erzeugt, also gibt es ein K -Erzeugendensystem von V aus endlich vielen Vektoren, so hat jede K -Basis B von V die gleiche Länge $|B| \in \mathbb{N}_0$, besteht also aus der gleichen endlichen Zahl $|B|$ von Vektoren.*

Definition VI.2.16. Es sei K ein Körper. Einen über K endlich erzeugten K -Vektorraum V nennen wir *endlich-dimensional* über K , und erklären die *Dimension* $\dim_K V \in \mathbb{N}_0$ von V über K als die eindeutige Länge $|B|$ einer K -Basis B von V . Einen über K nicht endlich erzeugten K -Vektorraum V nennen wir *unendlich-dimensional* über K , und setzen für einen solchen $\dim_K V := \infty$.

BEWEIS. Da ein Erzeugendensystem nach dem Basisauswahlsatz immer eine Basis enthält, besitzt der endlich erzeugte Vektorraum V eine endliche Basis B mit $|B| \in \mathbb{N}_0$. Wir zeigen, dass für jede weitere Basis \tilde{B} von V notwendig $|\tilde{B}| = |B|$ gilt. Wäre $|B| > |\tilde{B}|$, so ergäbe sich durch Anwendung des Basisaustauschsatzes (oder trivial im Fall $n = 0$), dass $(B \setminus \{b_1, b_2, \dots, b_n\}) \sqcup \tilde{B}$ mit $n := |\tilde{B}| \in \mathbb{N}_0$ und gewissen $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ eine Basis von V wäre. Wegen $|B| > |\tilde{B}| = n$ wäre also \tilde{B} nicht maximale linear unabhängige Teilmenge von V , und wir erhielten einen Widerspruch zur Basiseigenschaft von \tilde{B} . Wäre $|\tilde{B}| > |B|$, so ergäbe sich durch völlig analoge Argumentation mit $n := |B| \in \mathbb{N}_0$ ein Widerspruch. Also ist $|\tilde{B}| = |B|$. \square

Bemerkungen VI.2.17. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

- Im unendlich-dimensionalen Fall $\dim_K V = \infty$ kann mit dem Auswahlaxiom die Variante des Hauptsatzes gezeigt werden, dass alle K -Basen von V zueinander gleichmächtig sind.

Beweisskizze: Es seien A und B Basen von V . Für jedes $a \in A$ gibt es dann $m(a) \in \mathbb{N}$ und $b_1(a), b_2(a), \dots, b_{m(a)}(a) \in B$ mit $a \in \text{Span}\{b_1(a), b_2(a), \dots, b_{m(a)}(a)\}$. Mit A ist auch

$$\bigcup_{a \in A} \{b_1(a), b_2(a), \dots, b_{m(a)}(a)\}$$

ein Erzeugendensystem von V . Weil die Basis B ein *minimales* Erzeugendensystem von V ist, folgt daraus $\bigcup_{a \in A} \{b_1(a), b_2(a), \dots, b_{m(a)}(a)\} = B$. Mit dem Auswahlaxiom ergibt sich aus dieser Gleichheit eine Injektion $B \rightarrow A \times \mathbb{N}$, die jedes $b \in B$ auf ein $(a, i) \in A \times \mathbb{N}$ mit $i \in \{1, 2, \dots, m(a)\}$ und $b_i(a) = b$ abbildet. Gemäß einem weiteren Argument mit dem Auswahlaxiom, auf das wir hier nicht im Detail eingehen, ist $A \times \mathbb{N}$ für die unendliche Menge A gleichmächtig² zu A . Insgesamt erhalten wir eine Injektion $B \rightarrow A$. Dieselben Argumente mit vertauschten Rolle von A und B

²Speziell für abzählbar unendliches A folgt die Gleichmächtigkeit von $A \times \mathbb{N}$ und A aus dem ersten Cantorschen Diagonalverfahren. Allgemeine unendliche A können durch eine Argumentation mit dem Auswahlaxiom darauf zurückgeführt werden.

ergeben eine weitere Injektion $A \rightarrow B$, und mit dem Satz von Cantor-Schröder-Bernstein aus der Mathematik 1 folgt die Gleichmächtigkeit von A und B .

- Im endlich-dimensionalen Fall mit $n := \dim_K V \in \mathbb{N}_0$
 - besteht eine K -linear unabhängige Teilmenge von V aus höchstens n Vektoren,
 - besteht ein K -Erzeugendensystem von V aus mindestens n Vektoren.

Dies folgt aus dem Basisergänzungs- beziehungsweise dem Basisauswahlsatz.

Beispiele VI.2.18. Es sei K ein Körper.

- (1) Der Nullvektorraum $\{0\}$ ist der einzige Vektorraum der Dimension 0 über K .
- (2) Das Standard-Beispiel eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums ist der Raum K^n der Vektoren mit $n \in \mathbb{N}$ Einträgen aus K . Da die Standardbasis von K^n Länge n hat, ist

$$\dim_K K^n = n.$$

- (3) Drei Beispiele für unendlich-dimensionale K -Vektorräume sind der Raum $K[X]$ der Polynome über K , der Raum $K^{(\mathbb{N})} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n = 0 \text{ für } n \gg 1\}$ der abbrechenden Folgen über K und der Raum $K^{\mathbb{N}}$ aller Folgen über K . Eine Basis von $K[X]$ ist $\{1, X, X^2, X^3, \dots\}$, und eine Basis von $K^{(\mathbb{N})}$ ist $\{(1, 0, 0, 0, \dots), (0, 1, 0, 0, \dots), (0, 0, 1, 0, \dots), \dots\}$. Eine Basis von $K^{\mathbb{N}}$ lässt sich nicht explizit angeben.

Als wichtige Folgerungen für den künftigen Umgang mit Vektorräumen und Dimensionen halten wir die Folgenden Fakten fest. Dabei schreiben wir $U_1 \oplus U_2$ für $U_1 + U_2$, falls $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Korollar VI.2.19. *Es sei K ein Körper, V, V_1, V_2 Vektorräume über K und U, U_1, U_2 Untervektorräume von V über K . Dann gilt:*

- (1) $\dim_K(V_1 \times V_2) = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$.
- (2) $\dim_K U \leq \dim_K V$ mit „ \leq “ nur für $U = V$ oder $\dim_K U = \dim_K V = \infty$, wobei insbesondere die Charakterisierung des Gleichheitsfalls oft nützlich ist.
- (3) die Existenz eines K -Untervektorraums U^c von V mit $U \oplus U^c = V$, genannt ein komplementärer Untervektorraum zu U in V .
- (4) $\dim_K(V/U) + \dim_K U = \dim_K V$ für den Quotientenvektorraum V/U von V nach U .
- (5) Die Dimensionsformel für Untervektorräume

$$\dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K U_2$$

und speziell $\dim_K(U_1 \oplus U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K U_2$ im Fall $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

BEWEIS. Zum Beweis von Teil (1) seien B_1 eine Basis von V_1 und B_2 eine Basis von V_2 . Dann ist $B := (B_1 \times \{0\}) \sqcup (\{0\} \times B_2)$ eine Basis von $V_1 \times V_2$, und es folgt $\dim(V_1 \times V_2) = |B| = |B_1| + |B_2| = \dim V_1 + \dim V_2$.

Für Teil (2) sei B eine Basis von U . Nach dem Basisergänzungssatz gibt es eine Basis B^* von V mit $B \subset B^*$. Es folgt $|B| \leq |B^*|$ mit „ \leq “ nur für $B = B^*$ oder $|B| = |B^*| = \infty$. Wir erhalten also $\dim U = |B| \leq |B^*| = \dim V$ mit „ \leq “ nur für $U = \text{Span} B = \text{Span} B^* = V$ oder $\dim U = \dim V = \infty$.

Für Teil (3) betrachten wir B und B^* wie gerade zuvor und setzen $U^c := \text{Span}(B^* \setminus B)$. Da B^* ein Erzeugendensystem von V ist, gilt dann $U + U^c = \text{Span} B + \text{Span}(B^* \setminus B) = V$. Da B^* linear unabhängige Teilmenge von V ist, folgt zudem $U \cap U^c = \text{Span} B \cap \text{Span}(B^* \setminus B) = \{0\}$, weil für $v \in \text{Span} B \cap \text{Span}(B^* \setminus B)$ ist $v = \sum_{b \in E} \lambda_b b = \sum_{b \in E^*} \lambda_b b$ für endliche Teilmengen $E \subset B$ und $E^* \subset B^* \setminus B$ und gewisse $\lambda_b \in K$; aus $\sum_{b \in E} \lambda_b b - \sum_{b \in E^*} \lambda_b b = 0$ ergibt sich dann, dass alle λ_b Null sind, also auch $v = 0$.

Für Teil (4) betrachten wir für B und B^* wie zuvor jetzt $B' := \{b+U \mid b \in B^* \setminus B\} \subset V/U$. Wir zeigen zunächst, dass B' ein Erzeugendensystem von V/U ist. Für $v+U \in V/U$ mit $v \in V$ nutzen wir dazu die B^* -Basisdarstellung $v = \sum_{b \in F^*} \lambda_b b$ mit endlichem $F^* \subset B^*$ und gewissen $\lambda_b \in K$. Es folgt $v+U = \sum_{b \in F^*} \lambda_b (b+U) = \sum_{b \in F^* \setminus B} \lambda_b (b+U) \in \text{Span}(B^* \setminus B)$ in V/U , weil $b+U = 0+U = 0$ in V/U für $b \in B \subset U$ gilt. Also ist B' ein Erzeugendensystem von V/U . Weiter zeigen wir, dass B' in V/U linear unabhängig ist. Es sei dazu $\sum_{b \in E^*} \lambda_b (b+U) = 0$ in V/U für endliches $E^* \subset B^* \setminus B$ und gewisse $\lambda_b \in K$. Mit anderen Worten bedeutet dies $\sum_{b \in E^*} \lambda_b b \in U$ und $\sum_{b \in E^*} \lambda_b b = \sum_{b \in E} \lambda_b b$ für endliches $E \subset B$ (und weitere $\lambda_b \in K$). Mit der linearen Unabhängigkeit von $E \sqcup E^* \subset B^*$ folgt $\lambda_b = 0$ für alle $b \in E \sqcup E^*$,

womit insbesondere gezeigt ist, dass alle $b + U$ mit $b \in B^* \setminus B$ in V/U verschieden sind und B' in V/U linear unabhängig ist. Damit ist B' eine Basis von V/U , und wir erhalten insgesamt

$$\dim_K(V/U) + \dim U = |B'| + |B| = |B^* \setminus B| + |B| = |B^*| = \dim_K V.$$

Bezüglich Teil (5) behandeln wir erst den Fall $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, in dem wir $U_1 \oplus U_2$ schreiben dürfen. Es sei B_1 eine Basis von U_1 und B_2 eine Basis von U_2 . Mit ähnlichen Argumenten wie beim Nachweis von (3) folgt dann, dass $B_1 \sqcup B_2$ eine Basis von $U_1 \oplus U_2$ ist, und wir erhalten

$$\dim_K(U_1 \oplus U_2) = |B_1 \sqcup B_2| = |B_1| + |B_2| = \dim_K U_1 + \dim_K U_2.$$

Für den allgemeinen Fall von Teil (5) benutzen wir, dass es gemäß (3) einen zu $U_1 \cap U_2$ in U_2 komplementären Unterraum \tilde{U}_2 mit $U_2 = (U_1 \cap U_2) \oplus \tilde{U}_2$ gibt. Es folgt dann leicht $U_1 + U_2 = U_1 \oplus \tilde{U}_2$, so dass wir durch zweimalige Anwendung des schon behandelten Spezialfalls

$$\dim_K(U_1 + U_2) + \dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K \tilde{U}_2 + \dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K U_1 + \dim_K U_2$$

erhalten. □

Im Folgenden reißen wir affine Analoga der betrachteten Begriffe lineare Unabhängigkeit, Erzeugendensystem, Basis, Dimension und Dimensionsformel zumindest an.

Definition VI.2.20. Es sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

Wir sagen für $\ell \in \mathbb{N}_0$, dass sich $(\ell+1)$ Vektoren $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell \in V$ in *allgemeiner Lage* befinden, wenn die ℓ Vektoren $x_1 - x_0, x_2 - x_0, x_3 - x_0, \dots, x_\ell - x_0$ über K linear unabhängig sind.

Am besten versteht man dieses Konzept anhand der Spezialfälle $\ell = 0, 1, 2, 3$ in $V = \mathbb{R}^n$.

- $\ell = 0$: Ein Punkt x_0 ist immer in allgemeiner Lage.
- $\ell = 1$: Zwei Punkte x_0, x_1 sind in allgemeiner Lage, wenn $x_1 \neq x_0$ ist.
- $\ell = 2$: Drei Punkte x_0, x_1, x_2 sind in allgemeiner Lage, wenn es keine Gerade durch alle drei Punkte gibt.
- $\ell = 3$: Vier Punkte x_0, x_1, x_2, x_3 sind in allgemeiner Lage, wenn es keine Ebene durch alle vier Punkte gibt.

Es sieht in der Definition so aus, als spiele der zuerst genannte Vektor x_0 beim Konzept der allgemeinen Lage eine andere Rolle als die anderen Vektoren. An den Spezialfällen wird aber klar, dass dem wohl nicht so ist. Tatsächlich kann man dies auch formal einsehen, indem man sich mit der Definition der linearen Unabhängigkeit überlegt, dass lineare Unabhängigkeit von $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_\ell - x_0$ äquivalent zu linearer Unabhängigkeit von etwa $x_0 - x_1, x_2 - x_1, \dots, x_\ell - x_1$ ist.

Definition VI.2.21. Die *Dimension eines affinen Unterraums* A von V erklärt man unter Rückgriff auf die Darstellung

$$A = x + U_A$$

mit $x \in A$ und eindeutigem Untervektorraum U_A von V als

$$\dim_K A := \dim_K U_A \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

In $V = \mathbb{R}^n$ entspricht ein affiner Unterraum

- der Dimension 0 einem einzelnen Punkt,
- der Dimension 1 einer Gerade,
- der Dimension 2 einer Ebene,
- der Dimension 3 einem Raum wie dem uns umgebenden

und muss dabei anders als ein Untervektorraum *nicht* durch den Ursprung 0 gehen.

Ist A affiner Unterraum endlicher Dimension $n := \dim A \in \mathbb{N}_0$ von V , so gibt es $(n+1)$ Punkte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ in allgemeiner Lage mit $\text{Af}(\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}) = A$ in V , wobei $\text{Af}(A)$ den von einer nicht-leeren Menge $A \subset V$ aufgespannten affinen Unterraum von V bezeichnet. Vergleiche dazu Bemerkung (VI.1.14) zu affinen Unterräumen in Abschnitt VI.1. Man kann und sollte sich solche Punkte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ als eine affine Basis von A vorstellen, die nun bei Dimension n aber aus $n + 1$ Punkten besteht. Die Analogie zur Dimension bei Untervektorräumen wird auch dadurch fortgeführt, dass in einem

affinen Unterraum der Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ höchstens $n + 1$ Punkte in allgemeiner Lage sind und eine diesen affinen Unterraum aufspannende Menge aus mindestens $n + 1$ Punkten besteht.

Da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ für affine Unterräume A_1 und A_2 von V möglich und \emptyset nach unserer Definition *kein* affiner Unterraum ist, erhalten wir die Dimensionsformel für affine Unterräume A_1 und A_2 in der Form

$$\begin{aligned} \dim_K(\text{Af}(A_1 \cup A_2)) + \dim(A_1 \cap A_2) &= \dim_K A_1 + \dim_K A_2, & \text{falls } A_1 \cap A_2 \neq \emptyset, \\ \dim_K(\text{Af}(A_1 \cup A_2)) + \dim(U_{A_1} \cap U_{A_2}) &= \dim A_1 + \dim A_2 + 1, & \text{falls } A_1 \cap A_2 = \emptyset. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\text{Af}(A_1 \cup A_2)$ der von $A_1 \cup A_2$ aufgespannte affine Unterraum.

Sind etwa A_1 und A_2 zwei Geraden in $V = \mathbb{R}^n$, so sind hier folgende Fälle möglich: Die obere Formel greift, falls die Geraden übereinstimmen und die immer noch gleiche Gerade aufspannen oder die Geraden sich in einem Punkt schneiden und eine Ebene aufspannen. Die untere Formel greift, falls die Geraden parallel sind und eine Ebene aufspannen. In dem Fall ist $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ oder die Geraden sind windschief und spannen einen Raum auf mit $3 + 0 = 1 + 1 + 1$.

Die Beweise der Behauptungen erfolgen durch Zurückführung auf den Fall von Untervektorräumen. Wir gehen diesbezüglich nicht in Details, erwähnen aber noch kurz, dass die zusätzliche 1 auf der rechten Seite der Dimensionsformel im Fall $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ im Wesentlichen daher kommt, dass man in diesem Fall einen zusätzlichen Richtungsvektor und damit eine zusätzliche Dimension benötigt, um überhaupt von A_1 zu A_2 zu kommen.

VI.3. Matrizen und lineare Abbildungen

Wie für Gruppen, Ringe und Körper führen wir wir jetzt auch für Vektorräume zugehörige struktur-erhaltende Abbildungen, genannt Homomorphismen, ein. Wie wir etwas später in diesem Abschnitt sehen werden, kann man sich im endlich-dimensionalen Fall einen besonders guten Überblick über solche Abbildungen verschaffen und ein schematisches Rechnen mit ihnen einführen.

Definition VI.3.1. Es sei K ein Körper und V, W zwei K -Vektorräume.

- (1) Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt ein *Homomorphismus* von K -Vektorräumen oder eine *K -lineare Abbildung*, wenn gilt:
 - *Verträglichkeit mit Vektoraddition*: $f(v + \tilde{v}) = f(v) + f(\tilde{v})$ für alle $v, \tilde{v} \in V$,
 - *Verträglichkeit mit Skalarmultiplikation*: $f(sv) = sf(v)$ für alle $s \in K, v \in V$.
- (2) Ein Homomorphismus heißt *Monomorphismus*, *Epimorphismus* bzw. *Isomorphismus*, wenn er injektiv, surjektiv bzw. bijektiv ist. Gibt es zwischen V und W einen Isomorphismus, so heißen V und W zueinander *isomorph*. Ein Homomorphismus $V \rightarrow V$ mit gleichem Definitionsbereich und Ziel heißt *Endomorphismus*, einen bijektiven Endomorphismus nennen wir *Automorphismus*. Die Mengen aller Homo- und aller Isomorphismen $V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit $\text{Hom}_K(V, W)$ und $\text{Iso}_K(V, W)$, für Endo- und Automorphismen vereinbaren wir $\text{End}_K(V) := \text{Hom}_K(V, V)$ und $\text{Aut}_K(V) := \text{Iso}_K(V, V)$, wobei auf den Index K später auch manchmal verzichtet wird.

Beispiele VI.3.2.

- Ist $V = W$, so ist die identische Abbildung K -linear.
- Ist $V = W = \mathbb{R}$, dann ist id_V die Abbildung, die $x \in \mathbb{R}$ auf x abbildet. Dagegen sind die Abbildungen $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}, n > 1$ *nicht* linear! Genausowenig sind $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ oder $x \mapsto e^x$ linear.
- Sind V und W beliebige K -Vektorräume, so ist die Nullabbildung K -linear: Da $f(v) = 0_W$ für alle v gilt, ist auch $f(\lambda v + \mu v') = 0_W$ und das ist gleich $\lambda 0_W + \mu 0_W = \lambda f(v) + \mu f(v')$.
- Es sei $\lambda \in K$ und $V = W$. Dann ist die Streckung um λ eine K -lineare Abbildung: Wir haben $f: V \rightarrow V, f(v) = \lambda v$. Dann folgt mit den Vektorraumaxiomen

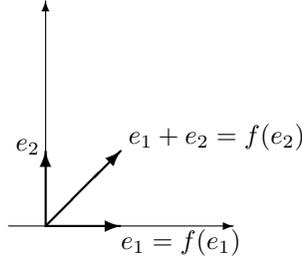
$$f(\mu v + \nu v') = \lambda(\mu v + \nu v') = \lambda \mu v + \lambda \nu v' = \mu \lambda v + \nu \lambda v' = \mu f(v) + \nu f(v')$$

für alle $\mu, \nu \in K, v, v' \in V$.

- Eine einfache aber wichtige \mathbb{R} -lineare Abbildung des \mathbb{R}^2 ist eine *Scherungsabbildung*: Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie bitte nach, dass die Scherungsabbildung \mathbb{R} -linear ist. Sie bildet die Standardbasisvektoren wie folgt ab: $f(e_1) = e_1$ und $f(e_2) = e_1 + e_2$.



Bemerkungen VI.3.3. Es sei K ein Körper und V, W, X drei K -Vektorräume.

- Eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist insbesondere ein Gruppenhomomorphismus von $(V, +)$ nach $(W, +)$ und erfüllt als solcher automatisch $f(0_V) = 0_W$ sowie $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$
- Für K -lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ und $g: W \rightarrow X$ bleibt auch ihre Komposition $g \circ f: V \rightarrow X$ stets K -linear. Dies folgt sofort aus der Definition.

Für eine bijektive K -lineare Abbildung, die wir Isomorphismus nennen, $f: V \rightarrow W$ ist die Umkehrabbildung $f^{-1}: W \rightarrow V$ ebenfalls K -linear. Der Nachweis erfolgt ebenfalls mit der Definition und ist Thema der Übungen.

- Die Mengen $\text{Hom}_K(V, W)$ und $\text{End}_K(V)$ der Homo- und Endomorphismen zwischen festen Vektorräumen sind selbst K -Vektorräume, genauer sind sie K -Untervektorräume von $\text{Abb}(V, W)$ bzw. $\text{Abb}(V)$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation.

Die Endomorphismen $\text{End}_K(V)$ bilden mit der punktweisen Addition und der Komposition zudem einen Ring $(\text{End}_K(V), +, \circ)$, den *Endomorphismenring* von V .

Die Automorphismen $\text{Aut}_K(V)$ werden mit der Komposition zu einer Gruppe $(\text{Aut}_K(V), \circ)$, der *Automorphismengruppe* von V .

Als zweites zentrales Konzept dieses Abschnitts führen wir jetzt Matrizen ein.

Definition VI.3.4. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$.

- (1) Eine Familie $(a_{ij})_{(i,j) \in \{1,2,\dots,m\} \times \{1,2,\dots,n\}}$ über K mit Indexmenge $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ notieren wir als Tabelle mit m Zeilen und n Spalten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und bezeichnen sie als $(m \times n)$ -Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$, deren Einträge $a_{ij} \in K$ in der Tabelle gemäß dem zuerst genannten Zeilenindex i und dem danach genannten Spaltenindex j eingeordnet sind. Naheliegenderweise identifizieren wir $(m \times 1)$ -Matrizen mit Spaltenvektoren aus K^m und schreiben $M(m \times n, K)$ für die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen über K , speziell also $M(m \times 1, K) = K^m$. Wir

notieren eine $(m \times n)$ -Matrix $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ gelegentlich als

$$(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n) \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

mit ihren *Spaltenvektoren* $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in M(m \times 1, K) = K^m$ für $j = 1, 2, \dots, n$ und ihren m

Zeilenvektoren $w_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \in M(1 \times n, K)$ für $i = 1, 2, \dots, m$.

- (2) Die *Summe* von $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ ist definiert als $A + B := (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$. Das Produkt von $s \in K$ und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ ist $sA := (sa_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$.

Somit ergeben sich eine koordinatenweise *Addition*

$$+ : M(m \times n, K) \times M(m \times n, K) \rightarrow M(m \times n, K)$$

und eine koordinatenweise *Skalarmultiplikation*

$$(VI.3.1) \quad \cdot : K \times M(m \times n, K) \rightarrow M(m \times n, K)$$

- (3) Das *Produkt* einer $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ und einer $(n \times p)$ -Matrix $B = (b_{jk})_{\substack{j=1,2,\dots,n \\ k=1,2,\dots,p}} \in M(n \times p, K)$ ist die $(m \times p)$ -Matrix

$$AB := \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ k=1,2,\dots,p}} \in M(m \times p, K),$$

deren (i, k) -Eintrag $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$ sich aus der i -ten Zeile $(a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ von A und der k -ten

Spalte $\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$ von B berechnet.

Damit ergibt sich die *Matrizenmultiplikation* $\cdot : M(m \times n, K) \times M(n \times p, K) \rightarrow M(m \times p, K)$ und als Spezialfall $p = 1$ die *Matrix-Vektor-Multiplikation* $\cdot : M(m \times n, K) \times K^n \rightarrow K^m$.

Beispiele VI.3.5. Ein Beispiel für die Matrix-Vektor-Multiplikation einer Matrix aus $M(2 \times 4, \mathbb{R})$ mit einem Vektor aus \mathbb{R}^4 ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+0+0+0 \\ 2+0+0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ein Beispiel für die Matrizenmultiplikation einer Matrix aus $M(2 \times 4, \mathbb{R})$ und einer Matrix aus $M(4 \times 3, \mathbb{R})$ ist

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1+0 & -6+0+0+0 & 0+8+0+0 \\ 0+0+0+0 & 2+0+0+5 & 0+0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3, \mathbb{R}).$$

Bemerkungen VI.3.6. Es sei K ein Körper und $m, n, p, q \in \mathbb{N}$.

- Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, erfüllt Distributivgesetze und ist mit Negation verträglich, das heißt für $A, A' \in M(m \times n, K)$, $B, B' \in M(n \times p, K)$, $C \in M(p \times q, K)$ gelten die Regeln

$$(AB)C = A(BC), \quad (A + A')B = AB + A'B,$$

$$A(B + B') = AB + AB', \quad A(-B) = (-A)B = -(AB).$$

Die Nachweise sind mit den Definitionen problemlos. Für den darunter noch schwierigsten Nachweis der Assoziativität ist nur die Übereinstimmung der (i, ℓ) -Einträge von $(AB)C$ und $A(BC)$ gemäß $\sum_{k=1}^p (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}) c_{k\ell} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{k\ell})$ zu prüfen, wobei $a_{ij}, b_{jk}, c_{k\ell}$ natürlich für die Einträge von A, B, C stehen.

- Die $(n \times p)$ -Nullmatrix $0_{n \times p}$, bei der alle np Einträge Null sind, erfüllt $A0_{n \times p} = 0_{m \times p}$ für alle $A \in M(m \times n, K)$ und $0_{n \times p}C = 0_{n \times q}$ für alle $C \in M(p \times q, K)$.
- Möglichkeiten zur Angabe der $(n \times n)$ -Einheitsmatrix E_n sind

$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n) = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K)$$

mit der Standardbasis e_1, e_2, \dots, e_n von K^n und dem *Kronecker-Symbol* oder *Kronecker-Delta*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}.$$

Es gelten $AE_n = A$ für alle $A \in M(m \times n, K)$ und $E_n B = B$ für alle $B \in M(n \times p, K)$, insbesondere $E_n x = x$ für alle $x \in K^n$.

- Die Menge $M(m \times n, K)$ ist mit der oben in (VI.3.1) definierten Addition und Skalarmultiplikation ein K -Vektorraum. Man spricht vom *Raum der $(m \times n)$ -Matrizen* über K .
- Die Menge $M(n \times n, K)$ bildet nur im Fall quadratischer Matrizen mit der Addition aus (VI.3.1) und der Matrizenmultiplikation aus (3) einen Ring mit der Nullmatrix $0_{n \times n}$ als neutralem Element der Addition und der Einheitsmatrix E_n als neutralem Element der Multiplikation. Man nennt $(M(n \times n, K), +, \cdot)$ den $(n \times n)$ -*Matrizenring*.

Dass wie bei Homomorphismen eine Vektorraumstruktur und wie bei Endomorphismen eine Ringstruktur vorliegt, kann man als ersten, vagen Hinweis auf eine Verwandtschaft von Matrizen und linearen Abbildungen sehen.

- Nach den vorausgehenden Bemerkungen ist klar, dass wir mit Matrizen sehr weitgehend mit den üblichen Regeln rechnen können. Etwas Vorsicht ist aber geboten, denn die Matrizenmultiplikation ist *nicht* kommutativ. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sind im Matrizenring $M(n \times n, K)$ alle allgemein für Ringe eingeführten Begriffe sinnvoll. Wir halten dies speziell bei Invertierbarkeit noch explizit fest.

Definition VI.3.7. Sei K ein Körper. Eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt *invertierbar* mit *inverser Matrix* $A^{-1} \in M(n \times n, K)$, wenn A im Ring $M(n \times n, K)$ invertierbar mit inversem Element A^{-1} ist, also gilt $AA^{-1} = E_n = A^{-1}A$.

Bemerkung VI.3.8. Es sei K ein Körper. Sind $A, B \in M(n \times n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$ invertierbar, so ist auch AB invertierbar mit inverser Matrix

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dies rechnet man direkt nach und es wurde auch in der Mathematik 1 im Abschnitt über Gruppen schon bemerkt.

Eine manchmal nützliche Operation bei Matrizen ist das Vertauschen von Zeilen und Spalten:

Definition VI.3.9. Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$.

- (1) Die zur $(m \times n)$ -Matrix A *transponierte Matrix* oder *Transponierte* der $(m \times n)$ -Matrix A ist die $(n \times m)$ -Matrix $A^t := (a_{ji})_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,m}} \in M(n \times m, K)$.
- (2) Im Fall $m = n$ heißt die quadratische Matrix A *symmetrisch*, wenn $A^t = A$ oder mit anderen Worten $a_{ji} = a_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt, und *schiefsymmetrisch*, wenn $A^t = -A$ oder mit anderen Worten $a_{ji} = -a_{ij}$ für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt.

Die wahre Bedeutung dieser Definition erkennt man am besten an Beispielen:

Beispiele VI.3.10. Ein Beispiel für das Transponieren einer Matrix in $M(2 \times 3, \mathbb{R})$ ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ \frac{1}{2} & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2, \mathbb{R}).$$

Je ein Beispiel für eine symmetrische und eine schiefsymmetrische (3×3) -Matrix sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei hier wie generell für schiefsymmetrisches $(a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$ die Diagonaleinträge a_{ii} Null sind.

Bemerkung VI.3.11. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Generell gilt für $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times p, K)$ dann

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Für invertierbares $A \in M(n \times n, K)$ folgt hieraus Invertierbarkeit von A^t mit inverser Matrix

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

Die vielleicht grundlegendste Beobachtung der gesamten linearen Algebra ist der enge Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen, die bei richtiger Betrachtungsweise sogar 1-zu-1 identifiziert werden können. Einführend bemerken wir dazu zunächst, dass man aus jeder Matrix $A \in M(m \times n, K)$ über einem Körper K eine K -lineare Abbildung

$$L(A): K^n \rightarrow K^m, v \mapsto Av$$

mit dem Matrix-Vektor-Produkt von A und v auf der rechten Seite erhält. Die für die K -Linearität benötigten Eigenschaften $A(v+\tilde{v}) = Av+A\tilde{v}$ und $A(sv) = s(Av)$ für $v, \tilde{v} \in K^n$, $s \in K$ sind dabei Spezialfälle schon bemerkter Regeln für das Rechnen mit Matrizen. Als charakteristische Eigenschaft der Abbildung $L(A)$, die wir verallgemeinern werden, halten wir fest, dass die kanonischen Basisvektoren $e_j \in K^n$ mit $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ durch $L(A)$ auf

$$L(A)(e_j) = Ae_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^m$$

abgebildet werden. Den Zusammenhang zwischen A und $L(A)$ werden wir nun verallgemeinern und im folgenden Resultat sehen, dass zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen jede lineare Abbildung auf ähnliche Weise erhalten werden kann. Vorbereitend halten wir aber zunächst noch fest, dass sich bei linearen Abbildungen alles auf den Vektoren einer Basis entscheidet.

Satz VI.3.12. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und B eine K -Basis von V . Dann gibt es für jede Abbildung $\eta: B \rightarrow W$ genau eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $f(b) = \eta(b)$ für alle $b \in B$.

Der Satz macht tatsächlich eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für die K -lineare Fortsetzung f von η . Die Eindeutigkeit kann dabei auch so ausgedrückt werden, dass eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ durch die Werte $f(b)$ auf Basisvektoren $b \in B$ (die ja genau η entsprechen) eindeutig bestimmt ist.

BEWEIS. Wir verwenden die entscheidende Basiseigenschaft, dass jeder Vektor $v \in V$ eine Basisdarstellung $v = \sum_{b \in E} \lambda_b b$ mit endlichem $E \subset B$ und durch v eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_b \in K$ besitzt.

Zum einen können wir damit $f(v) := \sum_{b \in E} \lambda_b \eta(b)$ definieren und erhalten $f: V \rightarrow W$. Um Verträglichkeit von f mit Addition nachzuweisen, betrachten wir neben v einen Vektor $\tilde{v} = \sum_{b \in \tilde{E}} \tilde{\lambda}_b b \in V$ mit endlichem $\tilde{E} \subset B$ und $\tilde{\lambda}_b \in K$. Wir erhalten $v + \tilde{v} = \sum_{b \in E \cup \tilde{E}} (\lambda_b + \tilde{\lambda}_b) b$, wobei wir $\lambda_b = 0$ für $b \in B \setminus E$ und $\tilde{\lambda}_b = 0$ für $b \in B \setminus \tilde{E}$ verstehen. Somit ist $f(v + \tilde{v}) = \sum_{b \in E \cup \tilde{E}} (\lambda_b + \tilde{\lambda}_b) \eta(b) = \sum_{b \in E} \lambda_b \eta(b) + \sum_{b \in \tilde{E}} \tilde{\lambda}_b \eta(b) = f(v) + f(\tilde{v})$. Analog sieht man die Verträglichkeit von f mit Skalarmultiplikation, also insgesamt die K -Linearität von f und die behauptete Existenzaussage.

Zum anderen erhalten wir auch die Eindeutigkeit von f , denn für jede K -lineare Abbildung mit $f(b) = \eta(b)$ für $b \in E$ ist

$$f(v) = f\left(\sum_{b \in E} \lambda_b b\right) = \sum_{b \in E} \lambda_b f(b) = \sum_{b \in E} \lambda_b \eta(b)$$

für beliebiges $v \in V$ durch η und (die Basisdarstellung von) v eindeutig bestimmt. \square

Theorem VI.3.13 (Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen). *Es seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim_K V \in \mathbb{N}$ und K -Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V sowie $m := \dim_K W \in \mathbb{N}$ und K -Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ von W . Dann gibt es zu jeder Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ eine eindeutige K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ und umgekehrt zu jeder K -linearen Abbildung $f: V \rightarrow W$ eine eindeutige Matrix $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ mit*

$$(*) \quad f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \text{ oder äquivalent } f(v_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}_{\mathcal{C}} \text{ für alle } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

BEWEIS. Ist die Matrix A gegeben, so definieren wir f auf den Basisvektoren v_j durch $(*)$ (was der Abbildung η im vorigen Satz entspricht) und setzen f dann mit dem vorigen Satz auf ganz V fort. Die Eindeutigkeit von f folgt ebenfalls aus dem vorigen Satz.

Ist die Abbildung f gegeben, so liefert die \mathcal{C} -Basisdarstellung von $f(v_j) \in W$ eindeutige Koeffizienten $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in K$ mit $(*)$. Diese Koeffizienten stellen wir in A zusammen. \square

Bemerkung VI.3.14. Die Bedingung $(*)$ des Theorems ist äquivalent zu

$$f(x_{\mathcal{B}}) = [Ax]_{\mathcal{C}} \text{ für alle } x \in K^n,$$

wobei wir die aus den Koeffizientenvektoren $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in K^n$ bzw. $Ax = \sum_{i=1}^m (Ax)_i e_i \in K^m$ erhaltenen Vektoren in \mathcal{B} - bzw. \mathcal{C} -Basisdarstellung wie in Abschnitt VI.2 als $x_{\mathcal{B}} = \sum_{j=1}^n x_j v_j \in V$ und $[Ax]_{\mathcal{C}} = \sum_{i=1}^m (Ax)_i w_i \in W$ schreiben.

Zur Begründung: Gilt $(*)$, so folgt mit der K -Linearität von f auch

$$f(x_{\mathcal{B}}) = f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j w_i = \sum_{i=1}^m (Ax)_i w_i = [Ax]_{\mathcal{C}}$$

für alle $x \in K^n$. Umgekehrt ergibt Einsetzen von $(e_j)_{\mathcal{B}} = v_j$ in dieser Bedingung wieder $(*)$.

Definition VI.3.15. Hängen A und f wie im Hauptsatz über $(*)$ zusammen, so nennen wir $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) := A$ die *darstellende Matrix* von f zu den Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} und $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) := f$ heißt die durch A *dargestellte lineare Abbildung*. Sind \mathcal{B} und \mathcal{C} die kanonischen Basen von $V = K^n$ und $W = K^m$, so verzichten wir bei dieser Notation auf die Indizes $\mathcal{C}\mathcal{B}$, was mit der eingangs verwendeten Notation $L(A)$ konsistent ist.

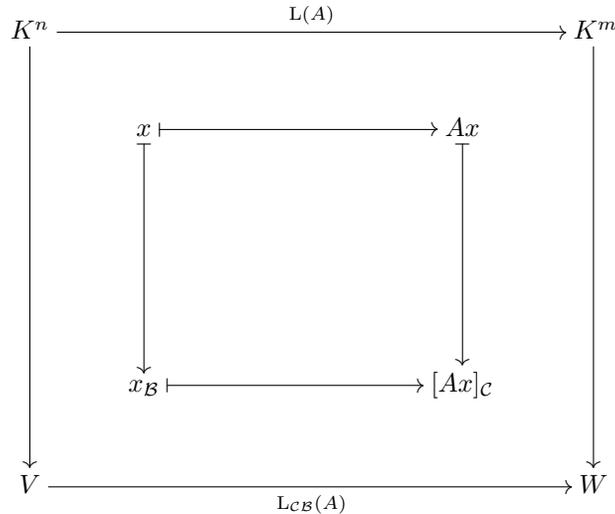
Den entscheidenden Zusammenhang $(*)$ bei der Darstellung sollte man sich dabei so merken:

In den Spalten der Matrix A stehen die Bilder der Basisvektoren unter f .

Für die Standardbasis \mathcal{C} des K^m gilt das direkt und in Form ihrer \mathcal{C} -Koeffizienten im Fall einer allgemeinen Basis \mathcal{C} von W .

Bemerkungen VI.3.16. Es seien V, W, Z endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit $n := \dim_K V \in \mathbb{N}$, $m := \dim_K W \in \mathbb{N}$, $\ell := \dim_K Z \in \mathbb{N}$ und mit K -Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V , $\mathcal{C} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ von W , $\mathcal{D} = (z_1, z_2, \dots, z_\ell)$ von Z .

- Die Umformulierung von (*) aus der letzten Bemerkung bedeutet, dass die durch $A \in M(m \times n, K)$ dargestellte lineare Abbildung $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A)$ genau $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A)(x_{\mathcal{B}}) = [Ax]_{\mathcal{C}}$ für alle $x \in K^n$ erfüllt. Mit anderen Worten entspricht dies der Kommutativität des folgenden Diagramms, in dem die waagerechten Pfeile der Matrix-Vektor-Multiplikation $L(A)$ bzw. $x \mapsto Ax$ und der von A dargestellten Abbildung $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A)$ entsprechen und die senkrechten Pfeile den Übergängen $x \mapsto x_{\mathcal{B}}$ und $y \mapsto y_{\mathcal{C}}$ von Koeffizienten zu Vektoren in \mathcal{B} - und \mathcal{C} -Basisdarstellung. Letztere sind auch selbst lineare Abbildungen und werden als *Basiswechsel* in der Mathematik 3 noch häufiger vorkommen.



- Matrizenmultiplikation und Komposition linearer Abbildungen entsprechen einander durch

$$\begin{aligned}
 L_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(BA) &= L_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(B) \circ L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) & \text{für } A \in M(m \times n, K), B \in M(\ell \times m, K), \\
 M_{\mathcal{D}\mathcal{C}}(g)M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) &= M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}(g \circ f) & \text{für } f \in \text{Hom}_K(V, W), g \in \text{Hom}_K(W, X).
 \end{aligned}$$

- Insbesondere überträgt sich Invertierbarkeit einer linearen Abbildung zwischen gleich-dimensionalen³ Vektorräumen auf die darstellende Matrix und umgekehrt Invertierbarkeit einer Matrix auf die dargestellte lineare Abbildung. Für $A \in M(m \times n, K)$ und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ mit $m = \dim_K W = \dim_K V = n$ gilt also

$$\begin{aligned}
 A \text{ ist invertierbare Matrix} &\iff L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) \text{ ist Isomorphismus,} \\
 f \text{ ist Isomorphismus} &\iff M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(f) \text{ ist invertierbare Matrix.}
 \end{aligned}$$

- Die Korrespondenzen

$$L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}: M(m \times n, K) \rightarrow \text{Hom}_K(V, W) \text{ und } M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow M(m \times n, K)$$

sind selbst K -lineare Abbildungen und zueinander invers, ergeben also einen Isomorphismus von K -Vektorräumen

$$\text{Hom}_K(V, W) \cong M(m \times n, K),$$

wobei $n = \dim_K V$, $m = \dim_K W$. Im Fall $W = V$ ist dieser auch ein Ringisomorphismus.

Die Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen hat wichtige Folgerungen für die Isomorphie von Vektorräumen:

³Mit der etwa später in diesem Abschnitt folgenden Dimensionsformel wird klar, dass eine lineare Abbildung überhaupt nur dann invertierbar sein kann, wenn ihr Definitionsbereich und Ziel gleiche Dimension haben.

Korollar VI.3.17. *Es sei K ein Körper. Für endlich-dimensionale K -Vektorräume V und W gilt*

$$V \cong W \text{ als } K\text{-Vektorräume} \iff \dim_K V = \dim_K W.$$

Insbesondere ist jeder K -Vektorraum V mit $\dim_K V = n \in \mathbb{N}$ isomorph zu K^n .

Mit anderen Worten bilden alle K -Vektorräume gleicher endlicher Dimension eine Isomorphieklasse, sie weisen alle die gleiche Struktur und die gleichen Eigenschaften auf. Schaut man nur auf die Struktur und nicht auf die genauen Elemente, so könnte man die Unterscheidung zwischen isomorphen Vektorräumen sogar aufgeben und damit den Standpunkt beziehen, dass es nur einen K -Vektorraum jeder festen Dimension $n \in \mathbb{N}_0$ gibt. In dieser Vorlesung gehen wir so weit aber nicht und unterscheiden verschiedene, isomorphe Vektorräume. Dennoch bedeutet die Isomorphie-Klassifikation, dass wir bei einem n -dimensionalen K -Vektorraum eigentlich immer an unser n -dimensionales Standardbeispiel K^n mit $n \in \mathbb{N}$ denken können (und für $n = 0$ natürlich an den Nullvektorraum $\{0\}$). Praktisch alles, was in K^n funktioniert, kann dann per Isomorphie auf einen allgemeinen n -dimensionalen K -Vektorraum übertragen werden.

BEWEIS DES KOROLLARS. Wir zeigen die beiden Implikationen der Äquivalenz separat.

Es sei $V \cong W$, es gebe also einen Isomorphismus $f: V \rightarrow W$ von K -Vektorräumen. Es sei weiter (v_1, v_2, \dots, v_n) mit $n := \dim_K V \in \mathbb{N}_0$ eine K -Basis von V . Dann lässt sich nachrechnen, dass $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n))$ eine K -Basis von W ist. Also ist $\dim_K W = n = \dim_K V$.

Es sei $n := \dim_K V = \dim_K W \in \mathbb{N}_0$. Es sei (v_1, v_2, \dots, v_n) eine K -Basis von V und (w_1, w_2, \dots, w_n) eine K -Basis von W . Nach dem Satz über die Bestimmtheit linearer Abbildungen auf Basisvektoren gibt es eindeutige K -lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$ und $g: W \rightarrow V$ mit $g(w_i) = v_i$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Aus $(g \circ f)(v_i) = v_i = \text{id}_V(v_i)$ für $i = 1, 2, \dots, n$ folgt mit demselben Satz $g \circ f = \text{id}_V$, und analog ergibt sich $f \circ g = \text{id}_W$. Also sind f und g Isomorphismen von K -Vektorräumen, und es ist $V \cong W$. \square

Mit anderen Worten ergeben sich die Abbildungen im zweiten Teil des vorigen Beweises übrigens als $f = L_{\mathcal{CB}}(E_n)$ und $g = L_{\mathcal{BC}}(E_n)$, und sie sind dann nach der vorausgehenden Bemerkung (VI.3.16) Isomorphismen.

Nun beschäftigen wir uns kurz mit dem speziellen Fall K -wertiger K -linearer Abbildungen.

Definition VI.3.18. Es sei K ein Körper. Der *Dualraum* eines K -Vektorraums V ist der K -Vektorraum $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$. Die Elemente von V^* , also die K -linearen Abbildungen von V in der Grundkörper K , nennt man *K -Linearformen* oder *Funktionale* auf V .

Ist $n := \dim_K V \in \mathbb{N}$, so sind die darstellenden Matrizen der Linearformen in V^* Matrizen in $M(1 \times n, K)$, haben also nur eine Zeile und n Spalten. Solche Matrizen hatten wir schon einmal als Zeilenvektoren bezeichnet. Konkret stellt ein Zeilenvektor $w = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in M(1 \times n, K)$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ von V und der 1-elementigen Standard-Basis 1 von K tatsächlich die Linearform $\varphi = L_{1\mathcal{B}}(w)$ mit $\varphi(x_{\mathcal{B}}) = wx = \sum_{j=1}^n w_j x_j$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ dar. Darüber hinaus halten wir für den Dualraum hier nur noch fest:

Korollar VI.3.19. *Es sei K ein Körper. Für jeden endlich-dimensionalen K -Vektorraum V gilt die Isomorphie $V^* \cong V$ von K -Vektorräumen.*

BEWEIS. Ist $\dim_K V = 0$, so ist die Isomorphie der Nullvektorräume V^* und V klar. Wir können also $n := \dim_K V \in \mathbb{N}$ annehmen. Die gerade besprochene Korrespondenz zwischen Linearformen und Zeilenvektoren bedeutet dann $V^* \cong M(1 \times n, K)$ als K -Vektorräume. Da Transponieren der kanonischen Basis von K^n eine Basis von $M(1 \times n, K)$ gibt, folgt $\dim_K(V^*) = \dim_K(M(1 \times n, K)) = n$. Dies bedeutet $\dim_K(V^*) = \dim_K V$, und mit dem vorigen Korollar folgt die behauptete Isomorphie $V^* \cong V$ von K -Vektorräumen. \square

Als Nächstes führen wir einige aus anderen Kontexten teils schon bekannte Konzepte für Matrizen und lineare Abbildungen ein:

Definition VI.3.20. Es sei K ein Körper, $A \in M(m \times n, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ eine $(m \times n)$ -Matrix über K und $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W über K .

(1) Der *Kern* der Matrix A und der *Kern* der linearen Abbildung f werden definiert als

$$\text{Kern } A := \{x \in K^n \mid Ax = 0\} = \left\{ x \in K^n \mid \sum_{j=1}^n x_j Ae_j = 0 \right\} \subset K^n,$$

$$\text{Kern } f := f^{-1}(\{0_W\}) = \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subset V.$$

(2) Das *Bild* der Matrix A und das *Bild* der linearen Abbildung f werden definiert als

$$\text{Bild } A := \{Ax \mid x \in K^n\} = \text{Span}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\} \subset K^m,$$

$$\text{Bild } f := f(V) = \{f(v) \mid v \in V\} \subset W.$$

(3) Der *Spaltenrang* der Matrix A und der *Rang* der linearen Abbildung f werden definiert als

$$\text{Rang } A := \dim_K(\text{Bild } A) \in \{0, 1, 2, \dots, m\},$$

$$\text{Rang } f := \dim_K(\text{Bild } f) \in \mathbb{N}_0 \sqcup \{\infty\}.$$

Bemerkungen VI.3.21. Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$ und V, W Vektorräume über K .

- Der Kern von $A \in M(m \times n, K)$ bzw. $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ ist stets ein K -Untervektorraum von K^n bzw. V . Das Bild von $A \in M(m \times n, K)$ bzw. $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ ist stets ein K -Untervektorraum von K^m bzw. W , womit die Definition des Rangs als Dimension des Bilds überhaupt erst sinnvoll wird. Der Nachweis der Untervektorraum-Eigenschaften anhand der Definitionen ist dabei problemlos.
- Kern, Bild und Rang einer Matrix A hängen auf naheliegende Weise mit Kern, Bild und Rang einer durch A dargestellten linearen Abbildung zusammen. Genauer gelten für $A \in M(m \times n, K)$, eine K -Basis \mathcal{B} von V mit $\dim V = n$ und eine K -Basis \mathcal{C} von W mit $\dim W = m$ die Zusammenhänge, die man aus der Definition und $L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A)(x_{\mathcal{B}}) = [Ax]_{\mathcal{C}}$ abliest,

$$\text{Kern } L(A) = \text{Kern } A,$$

$$\text{Bild } L(A) = \text{Bild } A,$$

$$\text{Rang } L(A) = \text{Rang } A,$$

$$\text{Kern } L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) = \{x_{\mathcal{B}} \mid x \in \text{Kern } A\},$$

$$\text{Bild } L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) = \{y_{\mathcal{C}} \mid y \in \text{Bild } A\},$$

$$\text{Rang } L_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(A) = \text{Rang } A.$$

- Die Bedeutung des Kerns liegt zu einem großen Teil in folgendem, in ähnlicher Form schon aus der Mathematik 1 bekannten *Injektivitäts-Kriterium*: Für $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ gilt

$$f \text{ ist injektiv} \iff \text{Kern } f = \{0_V\}.$$

- Dass wir bei einer Matrix A auch vom *Spaltenrang* sprechen, erklärt sich daraus, dass $\text{Bild } A$ von den Spalten $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \in K^m$ von A aufgespannt wird und daher $\text{Rang } A$ die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A angibt. Da $A \in M(m \times n, K)$ aus n Spaltenvektoren $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \in K^m$ besteht, ergibt sich hieraus als generelle Regel

$$\text{Rang } A \leq \min\{m, n\} \text{ für } A \in M(m \times n, K).$$

Neben dem *Spaltenrang* lässt sich der *Zeilenrang* von $A \in M(m \times n, K)$ als der Spaltenrang von A^t einführen und gibt die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen von A an. Bis auf Weiteres werden wir immer mit dem Spaltenrang arbeiten. Später werden wir dann tatsächlich zeigen, dass Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix stets übereinstimmen und daher die Behandlung nur des Spaltenrangs keine Einschränkung ist.

Beispiel VI.3.22. Für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

erhalten wir (mit den spitzen Klammern als Notation für den aufgespannten \mathbb{R} -Untervektorraum)

$$\text{Kern } A = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle, \quad \text{Bild } A = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle, \quad \text{Rang } A = 2.$$

Die Bestimmung des Kerns erfolgt dabei durch Lösen des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Das Bild ergibt sich in der ersten Form als *Span* der 3 Spaltenvektoren von A und kann dann, da diese 3 Vektoren

nicht linear unabhängig sind, als Span von 2 linear unabhängigen Vektoren umgeschrieben werden. Damit ist $\text{Rang} A = \dim(\text{Bild} A) = 2$ klar.

Ein Zusammenhang zwischen den Dimensionen von Kern und Bild leiten wir nun mit Hilfe des aus der Mathematik 1 bekannten Konzepts der Faktorisierung auf elegante Weise her. Wir halten dazu zunächst fest, dass der Faktorisierungssatz auch für lineare Abbildungen wie folgt gilt.

Satz VI.3.23. *Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und U ein K -Untervektorraum von V . Für jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ mit $U \subset \text{Kern } f$ gibt es genau eine K -lineare Abbildung $f_*: V/U \rightarrow W$, die $f_* \circ \pi = f$ mit der Quotientenabbildung $\pi: V \rightarrow V/U$ erfüllt, also das folgende Diagramm kommutativ macht.*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \pi \downarrow & \nearrow f_* & \\ V/U & & \end{array}$$

Wie bei den früheren Versionen des Satzes erfüllt f_* mit anderen Worten einfach $f_*(x + U) = f(x)$ für $x \in V$, der Satz ist stets mit $U = \text{Kern } f$ anwendbar, und genau in diesem Fall ist f_* injektiv. Außerdem gilt stets $\text{Bild} f_* = \text{Bild} f$, und f_* ist genau dann surjektiv, wenn f dies ist.

BEWEIS. Die Existenz und Eindeutigkeit von f_* als additiver Gruppenhomomorphismus folgen aus dem entsprechenden Sachverhalt für Gruppen. Dass f_* sogar K -linear ist, folgt dann aus der Rechnung $f_*(s(x + U)) = f_*(sx + U) = f(sx) = sf(x) = sf_*(x + U)$ für $s \in K$ und $x \in V$. \square

Hier geht es uns aber vor allem um die Anwendung des Faktorisierungssatzes zum Beweis des schon angekündigten Zusammenhangs zwischen Kern und Bild:

Satz VI.3.24 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen). *Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K . Für jede K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ gilt*

$$\dim_K V = \dim_K(\text{Kern } f) + \text{Rang} f.$$

Bemerkung VI.3.25. Insbesondere gilt auch für eine $(m \times n)$ -Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ über einem Körper K stets

$$n = \dim(\text{Kern } A) + \text{Rang} A.$$

Die Dimensionsformel für die Matrix $A \in M(m \times n, K)$ kann man durch Anwendung auf $L(A): K^n \rightarrow K^m$ erhalten.

BEWEIS DER DIMENSIONSFORMEL. Die Formel des Abschnitts VI.2 für die Dimension des Quotientenvektorraums liefert

$$\dim_K V = \dim_K(\text{Kern } f) + \dim_K(V/\text{Kern } f).$$

Durch Faktorisierung nach Kern f erhalten wir aus f nun ein injektives f_* , das in seinen Bildbereich $\text{Bild} f_* = \text{Bild} f$ auch surjektiv ist und daher als Isomorphismus $f_*: V/\text{Kern } f \rightarrow \text{Bild} f$ aufgefasst werden kann. Insbesondere ist $\dim_K(V/\text{Kern } f) = \dim_K(\text{Bild} f) = \text{Rang} f$, und wir erhalten mit

$$\dim_K V = \dim_K(\text{Kern } f) + \text{Rang} f$$

die Dimensionsformel für die lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$. \square

Als erste Folgerung aus der Dimensionsformel halten wir fest:

Korollar VI.3.26. *Für $n \in \mathbb{N}$, einen Körper K und eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ gilt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn gilt $\text{Kern } A = \{0\}$ und das ist äquivalent zu $\text{Bild} A = K^n$ bzw. dass Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n eine Basis des K^n ist.*

Da Invertierbarkeit von A und A^t äquivalent sind, ist neben der Basiseigenschaft der Spalten Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n von A übrigens genauso die Basiseigenschaft der (transponierten) Zeilen $A^t e_1, A^t e_2, \dots, A^t e_n$ von A notwendig und hinreichend für Invertierbarkeit von A .

BEWEIS DES KOROLLARS. Die Invertierbarkeit von A ist äquivalent zu Invertierbarkeit und damit zur Injektivität und Surjektivität von $L(A): K^n \rightarrow K^n$. Die Injektivität kann dabei äquivalent durch $\text{Kern } L(A) = \{0\}$ oder durch $\text{Kern } A = \{0\}$ oder durch $\forall x \in K^n: (Ax = 0 \implies x = 0)$ oder durch lineare Unabhängigkeit der Spalten Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n ausgedrückt werden. Letzteres gilt, weil $Ax = \sum_{j=1}^n x_j Ae_j$. Die Surjektivität kann äquivalent durch $\text{Bild } L(A) = K^n$ oder durch $\text{Bild } A = K^n$ oder durch $\text{Span}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\} = K^n$ oder dadurch, dass die Spalten Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n Erzeugendensystem von K^n sind, ausgedrückt werden. Aus diesen Äquivalenzen entnehmen wir insgesamt

$$A \text{ invertierbar} \iff \text{Kern } A = \{0\}, \text{Bild } A = K^n \iff Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n \text{ Basis von } K^n.$$

Wegen der Dimensionsformel $n = \dim(\text{Kern } A) + \dim(\text{Bild } A)$, die wir tatsächlich nur für diesen letzten Schluss benötigen, sind hierbei die beiden Bedingungen $\text{Kern } A = \{0\}$ und $\text{Bild } A = K^n$ sowieso gleichbedeutend, weshalb auch jede der beiden einzeln als Kriterium ausreicht. \square

Die Beobachtungen des gerade geführten Beweises erklären übrigens auch, warum es sinnvoll war, Invertierbarkeit von vorne herein nur für *quadratische* Matrizen $A \in M(n \times n, K)$ zu definieren: Tatsächlich könnte man ja zunächst hoffen, dass auch für $A \in M(m \times n, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ eine allgemeinere Inverse $B \in M(n \times m, K)$ über die Bedingungen $AB = E_m$ und $BA = E_n$ definiert werden kann. Damit diese Bedingungen gelten können, muss aber weiterhin $L(A)$ injektiv und surjektiv sein, es muss also $\text{Kern } A = \{0\}$ und $\text{Bild } A = K^m$ gelten und dann folgt nach Dimensionsformel eben $n = \dim_K \text{Kern } A + \dim_K(\text{Bild } A) = 0 + m = m$. Auch mit der allgemeineren Definition kann Invertierbarkeit also letztlich doch nur für quadratische Matrizen vorliegen.

VI.4. Determinanten

Definition VI.4.1. Es seien K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die *Determinante* einer quadratischen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K)$ erklären wir über die sogenannte *Leibniz-Formel* als

$$\det A := \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \in K,$$

wobei Σ_n die in der Mathematik 1 behandelte symmetrische Gruppe vom Grad n , also die Menge aller $n!$ Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$, bezeichnet. Gelegentlich notieren wir die Determinante auch mit senkrechten Strichen in der Form

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Für $n = 1$ sollte man diese Notation allerdings vermeiden, um Verwechslungen mit dem Betrag zu verhindern.

Bemerkungen VI.4.2. Es sei K ein Körper.

- Für (1×1) -Matrizen gilt trivial $\det(s) = s$ mit $s \in K$.
- Für (2×2) -Matrizen besagt die Leibniz-Formel

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \text{ mit } a, b, c, d \in K,$$

wobei in $\Sigma_2 = \{\text{id}, \tau\}$ die Identität id den Term ad , die Transposition τ den Term $-bc$ gibt).

- Im Spezialfall von (3×3) -Matrizen ist die Leibniz-Formel als *Regel von Sarrus* bekannt und besagt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

für $(a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in K^{3 \times 3}$, wobei in $\Sigma_3 = \{\text{id}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2\}$ die Identität id und die 3-Zykel σ_1, σ_2 die drei blauen Terme sowie die Transpositionen τ_2, τ_3, τ_1 die drei roten Terme geben. Schreiben

Sie die Matrix hin und zusätzlich wiederholen Sie die ersten beiden Spalten:

$$\begin{array}{cccccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32}
 \end{array}$$

Sie summieren die Terme mit der durchgezogenen Linie mit dem Faktor (+1) und die mit der gestrichelten Linie mit (-1) auf. Aber Vorsicht! Diese Formel gilt nur für $n = 3$. Für allgemeines n hat die Determinante $n!$ Summanden.

- Für obere *Dreiecksmatrizen* beliebiger Zeilen- und Spaltenzahl $n \in \mathbb{N}$ (mit beliebigen, nicht unbedingt gleichen Einträgen aus K an den mit * markierten Stellen) erhält man die Determinante

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_1 & * & * & \cdots & * & * & * \\
 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * & * & * \\
 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & * & * & * \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & * & * \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & * \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n
 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n$$

als Produkt der Diagonaleinträge $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ von der linken, oberen Ecke zur rechten, unteren Ecke. Der Grund für diese Regel ist, dass für eine Matrix $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n}$ dieser Struktur und $\pi \in \Sigma_n$ nur dann $\prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} \neq 0$ sein kann, wenn $\pi(i) \geq i$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ eintritt, was wiederum $\pi = \text{id}$ erzwingt und die Leibniz-Formel auf einen einzigen Summanden reduziert. Eine analoge Regel gilt für *untere* Dreiecksmatrizen (und ergibt sich mit derselben Begründung oder gemäß Teil (VI.4.1) des nächsten Satzes). Insbesondere gilt im Spezialfall von *Diagonalmatrizen*

$$\begin{vmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n
 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n.$$

Da Dreiecks- und Diagonalmatrizen häufig auftreten, sind diese Regeln zur sehr einfachen Berechnung der Determinante tatsächlich extrem nützlich.

- Analog gilt für obere *Block-Dreiecksmatrizen* die Regel

$$\begin{vmatrix}
 A_1 & & & & & & \\
 & A_2 & & & & & \\
 & & A_3 & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & A_{\ell-2} & & \\
 & & & & & A_{\ell-1} & \\
 & & & & & & A_{\ell}
 \end{vmatrix} = (\det A_1)(\det A_2) \cdots (\det A_{\ell-1})(\det A_{\ell}),$$

wobei die quadratischen Blöcke $A_1 \in M(n_1 \times n_1, K)$, $A_2 \in M(n_2 \times n_2, K)$, \dots , $A_{\ell} \in M(n_{\ell} \times n_{\ell}, K)$ mit $\ell, n_1, n_2, \dots, n_{\ell} \in \mathbb{N}$ ihre Zentren auf der Hauptdiagonale haben, sich oberhalb der Blöcke beliebige Einträge und unterhalb der Blöcke nur Nullen befinden und die gesamte Blockmatrix $n = n_1 + n_2 + \dots + n_{\ell}$ Zeilen und Spalten hat. Zur Herleitung dieser Regel gehen wir nicht ins Detail. Im Wesentlichen ergibt sie sich aus der Überlegung, dass $\prod_{i=1}^n a_{i,\pi(i)} \neq 0$ bei dieser Struktur nur dann möglich ist, wenn durch π nur zum selben Block gehörige Indizes untereinander permutiert

Beispiel VI.4.4. Ein Beispiel für die Entwicklung einer (4×4) -Matrix nach ihrer dritten Zeile und anschließende Berechnung der (3×3) -Determinanten mit der Regel von Sarrus ist

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 0 - 4 \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\ = -1(20+0+8+10+48-0) - 4(24-60+0-0+30-0) = -62.$$

Wir kommen nun zum Beweis der im Satz behaupteten Regeln.

BEWEIS VON TEIL (VI.4.1) DES LETZTEN SATZES. Wir machen die (teils unten erläuterte) Rechnung

$$\det(A^t) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} a_{\pi(2),2} \cdots a_{\pi(n),n} \stackrel{(1)}{=} \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi^{-1}) a_{1,\pi^{-1}(1)} a_{2,\pi^{-1}(2)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ \stackrel{(2)}{=} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} = \det A.$$

Dabei basiert der Schritt (1) auf $\text{sign}(\pi) = \text{sign}(\pi^{-1})$ und Umsortieren der Faktoren mit Indizes $(\pi(j), j) = (i, \pi^{-1}(i))$ in die durch den vorderen Index $i = \pi(j)$ gegebene Reihenfolge. Im Schritt (2) erfolgt mittels der Bijektion $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_n, \pi \mapsto \pi^{-1}$ ein Übergang zum Index $\sigma = \pi^{-1}$. \square

BEWEIS VON TEIL (2) DES LETZTEN SATZES. Wir spalten zunächst die Summe in der Leibniz-Formel nach dem zum festen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ gehörigen Wert $\pi(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$ auf und erhalten so

$$\det A = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{\pi \in \Sigma_n \\ \pi(i)=j}} \text{sign}(\pi) \prod_{k=1}^n a_{k,\pi(k)} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \sum_{\substack{\pi \in \Sigma_n \\ \pi(i)=j}} \text{sign}(\pi) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k,\pi(k)}.$$

Für (erst einmal) festes $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ sei nun $(\bar{a}_{\ell,m})_{\ell,m=1,2,\dots,n-1} \in M((n-1) \times (n-1), K)$ die Streichmatrix, in der die i -te Zeile und j -te Spalte von A weggefallen sind. Für die Einträge bedeutet dies $\bar{a}_{\ell,m} = a_{\sigma_i(\ell), \sigma_j(m)}$, wobei $\sigma_i \in \Sigma_n$ den $(n-i+1)$ -Zykel mit $\sigma_i(\ell) = \ell$ für $\ell < i$, mit $\sigma_i(\ell) = \ell+1$ für $i \leq \ell < n$ und folglich mit $\sigma_i(n) = i$ bezeichnet und $\sigma_j \in \Sigma_n$ analog definiert ist. Mit dieser Notation können wir das obige Produkt gemäß

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k,\pi(k)} = \prod_{\ell=1}^{n-1} a_{\sigma_i(\ell), \pi(\sigma_i(\ell))} = \prod_{\ell=1}^{n-1} \bar{a}_{\ell, \sigma_j^{-1}(\pi(\sigma_i(\ell)))}$$

umschreiben. Nun ist $\pi \mapsto \sigma_j^{-1} \circ \pi \circ \sigma_i$ bijektiv von $\{\pi \in \Sigma_n \mid \pi(i) = j\}$ auf $\{\gamma \in \Sigma_n \mid \gamma(n) = n\}$ und ändert das Vorzeichen gerade um $(-1)^{i+j}$ (denn für $\gamma = \sigma_j^{-1} \circ \pi \circ \sigma_i$ übersetzt sich mit $\sigma_i(n) = i, \sigma_j(n) = j$ einerseits $\pi(i) = j$ in $\gamma(n) = n$, und mit σ_i als $(n-i+1)$ -Zykel, σ_j als $(n-j+1)$ -Zykel erhalten wir andererseits $\text{sign}(\gamma) = (-1)^{n-j+1} \text{sign}(\pi) (-1)^{n-i+1} = (-1)^{i+j} \text{sign}(\pi)$). Damit bekommen wir insgesamt

$$\sum_{\substack{\pi \in \Sigma_n \\ \pi(i)=j}} \text{sign}(\pi) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{k,\pi(k)} = (-1)^{i+j} \sum_{\substack{\gamma \in \Sigma_n \\ \gamma(n)=n}} \text{sign}(\gamma) \prod_{\ell=1}^{n-1} \bar{a}_{\ell, \gamma(\ell)} = (-1)^{i+j} \sum_{\bar{\gamma} \in \Sigma_{n-1}} \text{sign}(\bar{\gamma}) \prod_{\ell=1}^{n-1} \bar{a}_{\ell, \bar{\gamma}(\ell)} \\ = (-1)^{i+j} \det(\bar{a}_{\ell,m})_{\ell,m=1,2,\dots,n-1} = \hat{A}_{ij},$$

wobei wir $\gamma \in \Sigma_n$ mit $\gamma(n) = n$ und $\bar{\gamma} \in \Sigma_{n-1}$ auf naheliegende Weise identifiziert und zuletzt die Definition $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\bar{a}_{\ell,m})_{\ell,m=1,2,\dots,n-1}$ des Kofaktors \hat{A}_{ij} benutzt haben. Nun erinnern wir uns, dass $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ beliebig war. Einsetzen der letzten vorausgehenden in die erste Formel des Beweises ergibt dann mit

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \hat{A}_{ij}$$

die Behauptung. \square

Unser nächstes Ziel ist die vielleicht nützlichste Anwendung der Determinante bei der Untersuchung der Invertierbarkeit von Matrizen. Um zugleich auch eine Formel für die Inverse angeben zu können, benötigen wir aber vorweg noch eine Definition.

Definition VI.4.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die *Adjunkte* einer $(n \times n)$ -Matrix $A \in M(n \times n, K)$ ist die $(n \times n)$ -Matrix

$$\text{adj } A := (\widehat{A}_{ji})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K),$$

wobei $\widehat{A}_{ji} \in K$ den im Entwicklungssatz eingeführten Kofaktor bezeichnet, also gleich $(-1)^{i+j}$ mal der Determinante der Streichmatrix ist, in der die j -te Zeile und i -te Spalte von A wegfallen. Man beachte dabei die Reihenfolge der Indizes bei \widehat{A}_{ji} , die einem Transponieren entspricht: Der Eintrag in der i -ten Zeile und j -ten Spalte von $\text{adj } A$ ergibt sich aus einer Determinante, bei der die j -te Zeile und i -te Spalte von A wegfallen.

Satz VI.4.6. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$ eine quadratische Matrix. Dann gelten

$$A \text{ ist invertierbar} \iff \det A \neq 0$$

und

$$A(\text{adj } A) = (\det A)E_n = (\text{adj } A)A.$$

Für invertierbares A ergibt sich hieraus die Formel für die Inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A.$$

Außerdem hatten wir als notwendige und hinreichende Kriterien für Invertierbarkeit von $A \in M(n \times n, K)$ ja schon $\text{Kern } A = \{0\}$ sowie $\text{Bild } A = K^n$ identifiziert. Diese Kriterien, an die hier noch einmal erinnert sei, sind also äquivalent zu $\det A \neq 0$. Für die rechnerische Überprüfung ist das Determinanten-Kriterium aber tatsächlich oft am günstigsten.

BEWEIS. Wir zeigen zuerst die Implikation „ \implies “ der behaupteten Äquivalenz, greifen dafür aber auf die Produktformel $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ für $A, B \in M(n \times n, K)$ vor, die erst im nächsten Abschnitt bewiesen wird. Ist $A \in M(n \times n, K)$ invertierbar, so erhalten wir mit dieser Formel

$$1 = \det E_n = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det(A^{-1})).$$

Also ist $\det A$ invers zu $\det(A^{-1})$ im Grundkörper K und insbesondere ungleich Null.

Weiter zeigen wir die Hilfsaussage⁵, dass $\det A = 0$ gilt, sobald es für $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K)$ Zeilenindizes $i \neq k$ in $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $a_{i,j} = a_{k,j}$ für alle $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gibt, sobald also mit anderen Worten zwei Zeilen von A übereinstimmen. Zur Herleitung der Hilfsaussage zerlegen wir Σ_n in die Mengen der geraden und ungeraden Permutationen, wobei jede ungerade Permutation $\sigma \in \Sigma_n$ als $\sigma = \pi \circ \tau_{ik}$ mit der geraden Permutation $\pi := \sigma \circ \tau_{ik}^{-1} \in \Sigma_n$ und der festen Transposition $\tau_{ik} \in \Sigma_n$, die i und k vertauscht, geschrieben werden kann. Aus der Leibniz-Formel erhalten wir dann, dass gilt

$$\det A = \sum_{\substack{\pi \in \Sigma_n \\ \pi \text{ gerade}}} \left(\underbrace{a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} - a_{1,\pi \circ \tau_{ik}(1)} a_{2,\pi \circ \tau_{ik}(2)} \cdots a_{n,\pi \circ \tau_{ik}(n)}}_{=: P_\pi} \right).$$

Dabei stimmen im vorderen und hinteren Summand von P_π alle Faktoren außer dem i -ten und dem k -ten überein (denn für $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i, k\}$ ist $\tau_{ik}(j) = j$), und auch für das Produkt des i -ten und k -ten Faktors erhalten wir mit $a_{i,\pi \circ \tau_{ik}(i)} a_{k,\pi \circ \tau_{ik}(k)} = a_{i,\pi(k)} a_{k,\pi(i)} = a_{k,\pi(k)} a_{i,\pi(i)}$ Übereinstimmung (wobei im letzten Schritt einging, dass die i -te und k -te Zeile gleich sind). Also ist $P_\pi = 0$ für alle geraden $\pi \in \Sigma_n$ und damit wie behauptet $\det A = 0$.

⁵Tatsächlich steht im Hintergrund der Hilfsaussage die sogenannte Multilinearität der Determinante, die in Mathematik 3 besprochen wird.

Wir kommen nun zum Beweis der Formel $A(\text{adj } A) = (\det A)E_n$ für $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K)$. Hierfür berechnen wir für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ den (i, i) -Eintrag $(A(\text{adj } A))_{ii}$ von $A(\text{adj } A)$ (auf der Hauptdiagonale von $A(\text{adj } A)$) als

$$(A(\text{adj } A))_{ii} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \widehat{A}_{ij} = \det A,$$

wobei die erste Gleichheit aus den Definitionen der Adjunkten und der Matrizenmultiplikation folgt und sich die zweite durch Entwicklung nach der i -ten Zeile ergibt. Ähnlich bestimmen wir für $i \neq k$ in $\{1, 2, \dots, k\}$ nun den (i, k) -Eintrag $(A(\text{adj } A))_{ik}$. Wir schreiben dazu $A_{k \leftarrow i}$ für die $(n \times n)$ -Matrix, die aus A hervorgeht, wenn die k -te Zeile durch eine Kopie der i -ten Zeile ersetzt wird, und die somit in beiden diese Zeilen die gleichen Einträge $a_{i,j}$ enthält. Wir erhalten dann

$$(A(\text{adj } A))_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \widehat{A}_{kj} = \det A_{k \leftarrow i} = 0,$$

wobei die zweite Gleichheit auf Entwicklung von $\det A_{k \leftarrow i}$ nach der k -ten Zeile und die dritte Gleichheit auf der Hilfsaussage beruhen. Damit sind die Einträge von $A(\text{adj } A)$ insgesamt als $(A(\text{adj } A))_{ik} = (\det A)\delta_{ik}$ mit $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ bestimmt, mit anderen Worten gilt also $A(\text{adj } A) = (\det A)E_n$.

Die Formel $(\text{adj } A)A = (\det A)E_n$ mit Multiplikation in der umgekehrten Reihenfolge kann man analog herleiten oder auf das Vorige zurückführen. Letzteres gelingt mit der Rechnung $(\text{adj } A)A = (A^t(\text{adj } A)^t)^t = (A^t \text{adj}(A^t))^t = (\det(A^t)E_n)^t = (\det(A^t))E_n = (\det A)E_n$, bei der unter anderem $(\text{adj } A)^t = \text{adj}(A^t)$ (direkte Folgerung aus der Definition), das zuvor Gezeigte für A^t anstelle von A und $\det(A^t) = \det A$ (Aussage des vorigen Satzes) eingehen.

Insgesamt ist somit $(\text{adj } A)A = (\det A)E_n = A(\text{adj } A)$ für alle $A \in M(n \times n, K)$ gezeigt. Ist nun $\det A \neq 0$, so kann diese Formel durch den Skalar $\det A$ geteilt werden und zeigt, dass $\frac{1}{\det A} \text{adj } A$ invers zu A ist. Damit sind auch die Implikation „ \Leftarrow “ der Äquivalenz und die Formel für die Inverse verifiziert, und der Beweis ist komplett. \square

Als letztes Thema, das wir zumindest rechnerisch auch über die Determinante angehen werden, beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit speziellen Vektoren, die bei Multiplikation mit einer gegebenen Matrix lediglich vervielfacht werden. Solche Vektoren lassen sich für viele Matrizen, aber nicht unbedingt immer, finden.

Definition VI.4.7. Es sei K ein Körper, $A \in M(n \times n, K)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine $(n \times n)$ -Matrix über K und $f \in \text{End}_K(V)$ eine K -lineare Selbstabbildung eines K -Vektorraums V in sich.

- (1) Wir nennen $x \in K^n \setminus \{0\}$ bzw. $v \in V \setminus \{0\}$ einen *Eigenvektor* von A bzw. f zu $\lambda \in K$, wenn

$$Ax = \lambda x \text{ bzw. } f(v) = \lambda v$$

gilt. Gibt es einen Eigenvektor, der nach Definition $\neq 0$ sein muss, von A bzw. f zu $\lambda \in K$, so nennen wir weiterhin λ einen *Eigenwert* von A bzw. f .

- (2) Der *Eigenraum* von A bzw. f zu $\lambda \in K$ ist der Untervektorraum

$$E_\lambda(A) := \text{Kern}(A - \lambda E_n) \subset K^n \text{ bzw. } E_\lambda(f) := \text{Kern}(f - \lambda \text{id}_V) \subset V,$$

der genau die Eigenvektoren von A bzw. f zu λ und den Nullvektor enthält. Als die *geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts* λ von A bzw. f bezeichnet man die Zahl $\dim_K E_\lambda(A) \in \{1, 2, \dots, n\}$ bzw. $\dim E_\lambda(f) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$.

Bemerkungen VI.4.8. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und V ein K -Vektorraum.

- (1) Dass $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $A \in M(n \times n, K)$ bzw. $f \in \text{End}_K(V)$ ist, bedeutet nichts anderes als $E_\lambda(A) \neq \{0\}$ bzw. $E_\lambda(f) \neq \{0\}$.
- (2) Eigenwerte, -vektoren und -räume einer Matrix hängen direkt mit den Eigenwerten, -vektoren und -räumen eines durch A dargestellten Endomorphismus zusammen, sofern man in Definitionsbereich

V und Ziel V die gleiche Basis verwendet und V endlich-dimensional ist. Genauer bedeutet dies für $A \in M(n \times n, K)$, eine K -Basis \mathcal{B} von V mit $\dim V = n$ und $\lambda \in K$, $x \in K^n$:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } L_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(A) &\iff \lambda \text{ ist Eigenwert von } A, \\ x_{\mathcal{B}} \text{ ist Eigenvektor von } L_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(A) \text{ zu } \lambda &\iff x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zu } \lambda, \\ E_{\lambda}(L_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(A)) &= \{x_{\mathcal{B}} \mid x \in E_{\lambda}(A)\}. \end{aligned}$$

Bemerkungen VI.4.9. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Die Eigenwerte $\lambda \in K$ von $A = (a_{i,j})_{i,j=1,2,\dots,n} \in M(n \times n, K)$ sind genau die Nullstellen $\lambda \in K$ des *charakteristischen Polynoms*

$$P_A := \det(XE_n - A) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) \prod_{i=1}^n (\delta_{i,\pi(i)}X - a_{i,\pi(i)}) \in K[X]$$

von A in der Unbestimmten X . Da P_A den Grad n hat, gibt es höchstens n Nullstellen von P_A und damit höchstens n Eigenwerte von A :

Aus den Definitionen und den verschiedenen Kriterien für Invertierbarkeit von Matrizen entnehmen wir für $A \in M(n \times n, K)$ und $\lambda \in K$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A &\iff E_{\lambda}(A) \neq \{0\} \iff \text{Kern}(\lambda E_n - A) \neq \{0\} \iff \lambda E_n - A \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\iff \det(\lambda E_n - A) = 0 \iff \lambda \text{ ist Nullstelle von } P_A, \end{aligned}$$

und erhalten also die Behauptung.

- (2) Gemäß (1) kann man die Eigenwerte einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$ schematisch als Nullstellen von P_A berechnen. Die Eigenvektoren beziehungsweise den Eigenraum von A zu den gefundenen Eigenwerten $\lambda \in K$ erhält man im Anschluss durch Lösen des linearen Gleichungssystems $(\lambda E_n - A)v = 0$ in $v \in K^n$.

Beispiel VI.4.10. Wir behandeln das Beispiel der (2×2) -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

als deren charakteristisches Polynom wir

$$P_A = \det(XE_2 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 1 \\ 0 & X+3 \end{vmatrix} = (X-1)(X+3)$$

erhalten.

Da sich hier das charakteristische Polynom als Produkt von Linearfaktoren ergibt, können wir als dessen Nullstellen die Eigenwerte 1 und -3 von A direkt ablesen. Die Eigenvektoren beziehungsweise Eigenräume von A zu $\lambda = 1$ und $\lambda = -3$ bestimmen wir aus dem Gleichungssystem $(\lambda E_n - A)v = 0$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 &\implies v_2 = 0 &\implies E_1(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \\ \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 &\implies v_2 = 4v_1 &\implies E_{-3}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Man kann natürlich auch mit $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ die Probe machen, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Tat Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 und -3 sind.

Da beide Eigenräume 1-dimensional sind, haben in diesem Beispiel beide Eigenwerte die geometrische Vielfachheit 1.

Beispiele für die Eigenwert/-vektor-Berechnung bei (etwas) größeren Matrizen, für Eigenwerte höherer Vielfachheiten und für $(n \times n)$ -Matrizen mit weniger als n Eigenwerten werden in den Übungen behandelt und auch in der Mathematik 3 noch genauer diskutiert.

Bemerkungen VI.4.11. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

- Notwendig und hinreichend für Lösbarkeit von $Ax = b$ ist das *Rangkriterium*

$$\text{Rang}(A | b) = \text{Rang}A$$

mit der *erweiterten Koeffizientenmatrix* $(A | b) \in M(m \times (n + 1), K)$, die durch Hinzufügen des Vektors $b \in K^m = K^{m \times 1}$ zur Matrix $A \in M(m \times n, K)$ in Form einer zusätzlichen Spalte entsteht:

Die Lösbarkeit von $Ax = b$ bedeutet, dass es $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in K^n$ mit $Ax = b$ oder äquivalent $\sum_{j=1}^n x_j Ae_j = b$ gibt. Mit anderen Worten heißt dies $b \in \text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$, äquivalent $\text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n, b\} = \text{Span}\{Ae_1, \dots, Ae_n\}$ oder, noch anders formuliert gilt

$$\text{Bild}(A | b) = \text{Bild}A.$$

Schließlich ist auch $\text{Rang}(A | b) = \text{Rang}A$ äquivalent, denn nach Abschnitt VI.2 tritt für die Vektorräume $\text{Bild}A \subset \text{Bild}(A | b)$ genau dann Gleichheit ein, wenn $\dim(\text{Bild}A)$ mit $\dim(\text{Bild}(A | b))$ übereinstimmt.

- Speziell für $m = n$ und eine invertierbare Koeffizientenmatrix $A \in M(n \times n, K)$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jede Inhomogenität $b \in K^n$ die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1}b \in K^n.$$

Wegen der Formel für die inverse Matrix bedeutet dies nichts anderes als $x = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)b$. Diese allgemeine Lösungsformel kann man als die sogenannte *Cramersche Regel*

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} \dots a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} \dots a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} \dots a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} \dots a_{n,n} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

schreiben, wobei man durch Entwicklung nach der j -ten Spalte einsieht, dass die Determinante im Zähler mit $\sum_{i=1}^n \hat{A}_{ij} b_i = ((\text{adj } A)b)_j$ übereinstimmt und die Cramersche Regel eine Umschreibung der zuvor bemerkten Formel ist.

Nun kommen wir zu den bereits angekündigten Elementaroperationen und werden sehen, dass durch diese jedes lineare Gleichungssystem auf eine besonders günstige Form gebracht werden kann, an der sich die Lösung gut ablesen lässt.

Definition VI.5.3. Es sei K ein Körper, $m, n \in \mathbb{N}$, und es sei ein lineares Gleichungssystem der Form (*) mit $a_{ij}, b_i \in K$ gegeben. Genau die folgenden drei Typen von Operationen bezeichnen wir als *elementare Zeilenoperationen* mit dem Gleichungssystem (*), wobei stets $\lambda \in K$ und $i, k \in \{1, 2, \dots, m\}$ seien:

- (1) Ersetzung einer Gleichung G_i durch ihr Vielfaches λG_i mit $\lambda \neq 0$,
- (2) Ersetzung einer Gleichung G_i durch $G_i + \lambda G_k$ mit $k \neq i$,
- (3) Vertauschung einer Gleichung G_i mit einer Gleichung G_k .

Bei (1) werden hier *beide* Seiten der Gleichung G_i mit λ multipliziert. Bei (2) werden die beiden linken Seiten von G_i und λG_k zur neuen linken Seite, die beiden rechten Seiten zur neuen rechten Seite addiert. Die Operation (3) schließlich betrifft nur die Reihenfolge, in der die Gleichungen aufgelistet werden.

Satz VI.5.4. *Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Jedes lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$, das ausgeschrieben die Form (*) hat, kann durch endlich viele elementare Zeilenoperationen in ein lineares Gleichungssystem $\tilde{A}x = \tilde{b}$ mit $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}} \in M(m \times n, K)$ und $\tilde{b} \in K^m$ überführt werden, wobei:*

- $\tilde{A}x = \tilde{b}$ die gleiche Lösungsmenge wie $Ax = b$ hat und $\text{Kern } \tilde{A} = \text{Kern } A$ gilt,

- \tilde{A} die nebenstehend angedeutete Zeilenstufenform hat, die präzise Formulierung: Es gibt ein $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ und $\ell_1 < \ell_2 < \dots < \ell_k$ in $\{1, 2, \dots, n\}$, so dass für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt: $\tilde{a}_{i\ell_i} \neq 0$ für $i \leq k$ sowie $\tilde{a}_{ij} = 0$ für $i \leq k$, $j < \ell_i$ und auch $\tilde{a}_{ij} = 0$ für $i > k$.

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\neq 0} & & & \\ & \boxed{\neq 0} & & * \\ & & \boxed{\neq 0} & \\ & 0 & & \boxed{\neq 0} \end{array} \right)$$

Tatsächlich kann auch eine speziellere Form erreicht werden, bei der $\tilde{a}_{i\ell_i} = 1$ für $i \leq k$ (und ansonsten alles wie zuvor) ist. Speziell für $m = n$ und invertierbares $A \in M(n \times n, K)$ lässt sich sogar $\tilde{A} = E_n$ (und ansonsten alles wie zuvor) erreichen.

Der Beweis des Satzes basiert auf dem wichtigen *Gauß-Verfahren/Gauß-Algorithmus*. Wir geben dazu im Folgenden eine Erläuterung, die sich zwischen einer Beschreibung des Algorithmus, einer Begründung des Vorgehens und einem formalen mathematischen Beweis bewegt:

BEWEISSKIZZE. Beim Gauß-Verfahren führt man nacheinander für die Variablen/Spalten zum Spaltenindex j_0 und jeweils einen zugehörigen Zeilenindex $i_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$ (beginnend mit $i_0 = 1$) elementare Zeilenoperationen mit dem linearen Gleichungssystem (*) durch. Behandelt und verändert werden dabei in jedem Schritt (und allen danach folgenden) nur noch die Gleichungen $G_{i_0}, G_{i_0+1}, \dots, G_m$ ab dem aktuellen i_0 . Wir beschreiben nun das Vorgehen in den Einzelschritten und bezeichnen dabei die jeweils *aktuellen* Gleichungen und Koeffizienten mit G_i und a_{ij} :

- Im trivialen Fall $a_{ij_0} = 0$ für alle $i \in \{i_0, i_0+1, \dots, m\}$ tritt die Variable x_{j_0} in den Gleichungen $G_{i_0}, G_{i_0+1}, \dots, G_m$ nicht (mehr) auf, und es sind im aktuellen Schritt keine Umformungen erforderlich. Man geht zur nächsten Variable/Spalte (nächsthöheres j_0) und bleibt dabei in der gleichen Zeile (unverändertes i_0).
- Im Fall $a_{ij_0} \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{i_0, i_0+1, \dots, m\}$ möchte man $a_{i_0j_0} \neq 0$ haben, was oft direkt erfüllt ist und ansonsten durch Vertauschung von G_{i_0} mit einer späteren Gleichungen G_i gemäß Operation (3) erreicht werden kann. Ist $a_{i_0j_0} \neq 0$ erreicht, so ersetzt man mit Anwendungen der Operation (2) für jedes $i \in \{i_0+1, i_0+2, \dots, m\}$ die Gleichung G_i durch $G_i - \frac{a_{ij_0}}{a_{i_0j_0}} G_{i_0}$. Dies ist der entscheidende Schritt des ganzen Verfahrens, denn die Vorfaktoren sind gerade so gewählt, dass die Variable x_{j_0} in den ersetzenden Gleichungen ab der Zeile i_0+1 eliminiert wird.

Man geht nun zur nächsten Variable/Spalte (nächsthöheres j_0) und zugleich zur nächsten Zeile (nächsthöheres i_0) über — außer das nächsthöhere i_0 ist bereits m , so dass nur noch eine Gleichung verbleibt, keine weiteren Operationen nötig sind und das Verfahren an dieser Stelle endet.

Falls nicht vorher mit $i_0 = m$ die Gleichungen ausgehen, endet das Gauß-Verfahren spätestens nach der Behandlung der Variable/Spalte zu $j_0 = n$. Unabhängig vom Kriterium für den Abbruch, erreicht man bei Abbruch die gewünschte Zeilenstufenform.

Wir erläutern noch kurz die ergänzenden Behauptungen des Satzes:

Die speziellere Form mit $\tilde{a}_{i\ell_i} = 1$ erhält man aus der Zeilenstufenform einfach durch Multiplikation der Zeilen mittels Operation (1).

Für $m = n$ und invertierbares A gilt man notwendig $k = n$ (siehe die nach diesem Beweis folgende Bemerkung), und man erhält als Zeilenstufenform eine obere Dreiecksmatrix mit lauter Einträgen 1 auf der Hauptdiagonale. Alle Einträge oberhalb der Hauptdiagonale können nun durch weitere elementare Zeilenoperationen gemäß einer naheliegenden Variante des Gauß-Verfahrens eliminiert werden, um so auf die Einheitsmatrix E_n zu kommen.

Schließlich bleibt noch zu begründen, dass das neue, durch elementare Zeilenoperationen erreichte Gleichungssystem (in allen Fällen) die gleiche Lösungsmenge und den gleichen Kern der Koeffizientenmatrix hat wie das ursprüngliche Gleichungssystem. Dies folgt aber tatsächlich, dass elementare Zeilenoperationen Äquivalenzumformungen des Gleichungssystems und auch des zugehörigen homogenen Gleichungssystems sind und daher Lösungsmenge bzw. Kern nicht ändern. (Man beachte dabei insbesondere, dass die Operationen (1), (2), (3) jeweils durch eine Operation desselben Typs rückgängig gemacht werden können.)

□

Bemerkungen VI.5.5. Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$.

mit den (i, k) - und (k, i) -Einträgen 1 für $k \neq i$ sowie mit Ausnahme der (i, i) - und (k, k) -Einträge 0 mit lauter Einträgen 1 auf der Hauptdiagonale. Die letzte Matrix ist dabei nichts anderes als die Permutationsmatrix E_τ zur Transposition $\tau \in \Sigma_m$ von i und k .

Die elementare Zeilenoperationen des Typs (3) können auch aus den anderen beiden Operationen zusammengesetzt werden. Man könnte somit bei der Definition elementarer Zeilenoperationen auf den Typ (3) verzichten. Da dies nicht ganz offensichtlich ist, nimmt man den Typ (3) aber üblicherweise wie oben in die Definition hinein.

- (4) Speziell für $m = n$ und eine invertierbare Matrix $A \in M(n \times n, K)$ kann die letzte Aussage des letzten Satzes nach der vorigen Bemerkung (3) so formuliert werden, dass es ein $s \in \mathbb{N}_0$ und Elementarmatrizen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s \in M(n \times n, K)$ mit $\eta_1 \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_s A = E_n$ gibt. Dies bedeutet auch $A^{-1} = \eta_1 \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_s = \eta_1 \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_s E_n$ und gibt daher ein *Verfahren zur Berechnung der inversen Matrix* an die Hand: Wird nämlich A durch eine Abfolge elementarer Zeilenoperationen (die $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ entsprechen) in E_n überführt, so überführt dieselbe Abfolge von Operationen auch E_n in A^{-1} . Man kann also zwei analoge Rechnungen nebeneinander durchführen. Wenn man dabei einerseits mit dem Gauß-Verfahren von A aus zu E_n gelangt ist, hat man andererseits von E_n aus A^{-1} erreicht.

Die vorige Aussage kann auch so formuliert werden, dass es für invertierbares $A \in M(n \times n, K)$ ein $s \in \mathbb{N}_0$ und Elementarmatrizen $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \dots, \tilde{\eta}_s \in M(n \times n, K)$ mit $A = \tilde{\eta}_s \cdot \dots \cdot \tilde{\eta}_2 \tilde{\eta}_1$ gibt.

In der zuvor verwendeten Notation ist einfach $\tilde{\eta}_\ell = \eta_\ell^{-1}$ für $\ell \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Wir beschließen dieses Kapitel und die Vorlesung Mathematik 2 jetzt mit drei weiteren Sätzen, die jeweils eine schon in Abschnitt VI.3 aufgestellte, aber bisher noch nicht bewiesene Behauptung abhandeln.

Satz VI.5.6 (Produktformel für Determinanten). *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für quadratische Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ gilt stets*

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

BEWEIS. Ist A nicht invertierbar, so gilt $\det A = 0$ nach⁶ einem Satz des Abschnitts VI.3. Zudem ist dann auch $\det(AB) = 0$ (zum Beispiel, weil $\text{Bild} A \subsetneq K^n$ und wegen $\text{Bild}(AB) \subset \text{Bild} A$ dann auch $\text{Bild}(AB) \subsetneq K^n$ gelten). Somit ist $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ in diesem Fall erfüllt.

Um invertierbare A zu behandeln, betrachten wir zunächst den Fall einer Elementarmatrix A und eines beliebigen $B = (b_{j,\ell})_{j,\ell=1,2,\dots,n}$. Ist die Elementarmatrix A vom ersten Typ mit $\det A = \lambda$, so erhalten wir mit der Leibniz-Formel

$$\det(AB) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) \lambda b_{i,\pi(i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{j,\pi(j)} = \lambda(\det B) = (\det A)(\det B).$$

Ist die Elementarmatrix A vom zweiten Typ mit $\det A = 1$, so erhalten wir

$$\det(AB) = \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) (b_{i,\pi(i)} + \lambda b_{k,\pi(i)}) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{j,\pi(j)} = \det B + \lambda \det B_{i \leftarrow k} = (\det A)(\det B),$$

wobei $B_{i \leftarrow k}$ die beim Beweis des Invertierbarkeitssatzes in Abschnitt VI.3 schon betrachtete Matrix mit zwei gleichen Zeilen bezeichnet und, wie dort gezeigt, $\det B_{i \leftarrow k} = 0$ gilt. Ist schließlich $A = E_\tau$ mit Transposition $\tau \in \Sigma_n$ eine Elementarmatrix vom dritten Typ mit $\det A = -1$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi) b_{k,\pi(i)} b_{i,\pi(k)} \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j \neq k}}^n b_{j,\pi(j)} \\ &= - \sum_{\pi \in \Sigma_n} \text{sign}(\pi \circ \tau) \prod_{j=1}^n b_{j,\pi \circ \tau(j)} = - \det B = (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

⁶Für eine Implikation des früheren Satzes hatten wir tatsächlich die hier noch zu beweisende Produktformel bereits verwendet. Dennoch kommt kein unzulässiger Zirkelschluss zustande, denn wir benutzen hier nur die *andere* Implikation des früheren Satzes, deren Beweis nicht an der Produktformel hing.

Nachdem die Behauptung somit für eine beliebige einzelne Elementarmatrix A gezeigt ist, erhalten wir sie durch vollständige Induktion nach s auch für jede Matrix A , die ein Produkt von $s \in \mathbb{N}_0$ Elementarmatrizen ist. Gemäß der vorausgehenden Bemerkung (4) werden hierdurch alle invertierbaren Matrizen A erfasst, und der Beweis ist komplett. \square

Satz VI.5.7 (Zeilenrang gleich Spaltenrang). *Es sei K ein Körper und $m, n \in \mathbb{N}$. Für $A \in M(m \times n, K)$ gilt stets*

$$\text{Rang}(A^t) = \text{Rang}A.$$

BEWEIS. Wie schon bemerkt, verändert sich $\text{Kern}A = \{x \in K^n \mid Ax = 0\}$ durch Anwendung von elementaren Zeilenoperationen auf $A \in M(m \times n, K)$ nicht. Analog zu Zeilenoperationen werden elementare Spaltenoperationen mit $A \in M(m \times n, K)$ erklärt, und diese lassen tatsächlich

$$\text{Bild}A = \text{Span}\{Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n\}$$

unverändert. Insgesamt können wir somit festhalten, dass $\text{Rang}A = \dim_K(\text{Bild}A) = n - \dim_K(\text{Kern}A)$ weder durch elementare Zeilenoperationen noch durch elementare Spaltenoperationen mit A verändert wird. Wir können die gegebene Matrix $A \in M(m \times n, K)$ nun mit dem letzten Satz durch endlich viele elementare Zeilenoperationen auf Zeilenstufenform mit $k := \text{Rang}A$ nicht-trivialen Zeilen bringen, und mit einer Variante des Gauß-Algorithmus können wir von der Zeilenstufenform dann durch endlich viele elementare Spaltenoperationen zur speziellen Form

$$E_{k,m \times n} := \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in M(m \times n, K)$$

(mit der $(k \times k)$ -Einheitsmatrix E_k und drei Null-Blöcken der Formate $k \times (n - k)$, $(m - k) \times k$ und $(m - k) \times (n - k)$) übergehen. Da elementare Zeilenoperationen Links-Multiplikationen mit Elementarmatrizen und elementare Spaltenoperationen Rechts-Multiplikationen mit Elementarmatrizen (genau gleiche Typen erlaubt) entsprechen, bedeutet dies mit anderen Worten

$$ZAS = E_{k,m \times n},$$

wobei $Z \in M(m \times m, K)$ und $S \in M(n \times n, K)$ jeweils Produkte endlich vieler Elementarmatrizen sind. Durch Transponieren folgt

$$S^t A^t Z^t = E_{k,m \times n}^t = E_{k,n \times m},$$

wobei auch $S^t \in M(n \times n, K)$ und $Z^t \in M(m \times m, K)$ Produkte endlich vieler Elementarmatrizen sind. Da die zugehörigen Operationen den Rang nicht verändern, lesen wir ab, dass $\text{Rang}(A^t)$ mit $\text{Rang}E_{k,n \times m} = k = \text{Rang}A$ übereinstimmt. \square

Satz VI.5.8. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Für eine quadratische Matrix $A \in M(n \times n, K)$ und einen Eigenwert $\lambda \in K$ von A ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ , das heißt, ist $(X - \lambda)^\ell$ der Teiler von P_A mit maximalem $\ell \in \mathbb{N}$, also $P_A = (X - \lambda)^\ell p$ für ein $p \in K[X]$, das λ nicht mehr als Nullstelle hat, so gilt*

$$\dim_K E_\lambda(A) \leq \ell.$$

BEWEIS. Es sei $k := \dim_K E_\lambda(A) = \dim_K(\text{Kern}(\lambda E_n - A))$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ . Dann ist nach der Dimensionsformel $\text{Rang}(\lambda E_n - A) = n - k$. Durch elementare Zeilenoperation beziehungsweise Linksmultiplikation mit Elementarmatrizen kann $\lambda E_n - A$ auf Zeilenstufenform mit $n - k$ nicht-trivialen Zeilen gebracht werden. Insbesondere können wir

$$Z(\lambda E_n - A) = \left(\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right) \in M(n \times n, K)$$

mit einem Produkt $Z \in M(n \times n, K)$ endlich vieler Elementarmatrizen, einem beliebigen $(n - k)$ -zeiligen Block $B \in M((n - k) \times n, K)$ und k Nullzeilen erreichen. Hieraus bekommen wir

$$XE_n - A = Z^{-1}[Z(X - \lambda) + Z(\lambda E_n - A)] = Z^{-1} \left[(X - \lambda)Z + \left(\begin{array}{c} B \\ 0 \end{array} \right) \right] = Z^{-1} \left(\frac{(X - \lambda)Z' + B}{(X - \lambda)Z''} \right)$$

mit der Zerlegung $Z = \begin{pmatrix} Z' \\ Z'' \end{pmatrix}$ von Z in die ersten $n - k$ Zeilen Z' und die letzten k Zeilen Z'' . Mit der Produktformel für die Determinante folgt

$$P_A = \det(XE_n - A) = \det(Z^{-1}) \det \begin{pmatrix} (X - \lambda)Z' + B \\ (X - \lambda)Z'' \end{pmatrix}$$

mit $\det(Z^{-1}) \neq 0$. Entscheidend ist nun, dass in der Leibniz-Formel für die letzte Determinante jeder Summand mindestens den Faktor $(X - \lambda)^k$ beinhaltet, weil für jeden Summand der Leibniz-Formel Einträge aus allen Zeilen multipliziert werden und alle Einträge der letzten k Zeilen $(X - \lambda)Z''$ einen Faktor $X - \lambda$ beinhalten.

Was in den ersten $n - k$ Zeilen steht, ist für dieses Argument gleichgültig. Insgesamt kann also $(X - \lambda)^k$ aus $P_A \in K[X]$ ausgeklammert werden, und die algebraische Vielfachheit ℓ von λ erfüllt zwingend $\ell \geq k = \dim_K E_\lambda(A)$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] S. Bosch, *Lineare Algebra*. Springer, 2014.
- [2] T. Bröcker, *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Birkhäuser, 2004.
- [3] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Lamotke, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Prestel, R. Remmert, *Zahlen*. Springer, 1992.
- [4] G. Fischer, *Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie*. Springer, 2019.
- [5] G. Fischer, B. Springborn, *Lineare Algebra*. Springer, 2020.
- [6] O. Forster, *Analysis 1*. Springer, 2015.
- [7] G. Greefrath, R. Oldenburg, H.-S. Siller, V. Ulm, H.-G. Weigand, *Didaktik der Analysis*. Springer, 2016.
- [8] H.-W. Henn, A. Filler, *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Springer, 2015.
- [9] H. Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 1*. Vieweg+Teubner, 2009.
- [10] S. Hildebrandt, *Analysis 1*. Springer, 2006.
- [11] K. Jänich, *Lineare Algebra*. Springer, 2008.
- [12] K. Königsberger, *Analysis 1*. Springer, 2004.
- [13] W. Walter, *Analysis 1*. Springer, 2009.