Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 9

Abgabetermin: Mittwoch, 18. Dezember 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 9.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) In $A \cdot \tau(i,j)$ ist die i-te Zeile von A mit der j-ten Zeile von A vertauscht.

(ii) Das Inverse der Matrix $\Delta^i(\lambda)$ für $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, ist $\Delta^i(\lambda^{-1})$.

(iii) Das Inverse der Matrix $\Delta^i(\lambda)$ für $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, ist $\Delta^i(-\lambda)$.

(iv) Es sei $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$. Ist b eine der Spalten von A, so ist das LGS $Ax = b$ nicht lösbar.

(v) Es sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 13 & -1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Jede Lösung (x_1, x_2, x_3) der Gleichung $Ax = 0$ ist auch eine Lösung der Gleichung $x_1 + 15x_2 + 4x_3 = 0$.

(vi) Es sei $M(f) = A \in M(n \times n, K)$ und $b \in K^n$. Dann ist das LGS $Ax = b$ eindeutig lösbar, wenn $\dim_K(\ker(f)) = 0$

Aufgabe 9.2 [2+1+1 Punkte]

Es sei $\mathbb{Q}_3[X]$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Polynome mit Grad kleiner oder gleich 3. Betrachten Sie die formale Ableitung von Polynomen, d.h. die Abbildung $D\colon \mathbb{Q}_3[X] \to \mathbb{Q}_3[X]$, die ein Polynom $a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ auf $a_1 + 2a_2X + 3a_3X^2$ abbildet.

a) Betrachten Sie die geordnete Basis $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ von $\mathbb{Q}_3[X]$ und stellen Sie die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}(D)$ der linearen Abbildung D bezüglich dieser Basis auf.

b) Gibt es eine Matrix M_1, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(D) \cdot M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist?

c) Gibt es eine Matrix M_2, so dass $M_{\mathcal{B}}(D) \cdot M_2 = E_4$ ist?

Aufgabe 9.3 [2 Punkte]

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $n > 0$ und V sei ein K-Vektorraum der Dimension n. Beweisen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ mit $\ker(f) = \mathrm{Bild}(f)$ gibt, wenn n gerade ist. (Hier ist wirklich Gleichheit gemeint und nicht Isomorphie!)

Aufgabe 9.4 [3+2+2 Punkte]

a) Betrachten Sie das LGS

$$\begin{aligned}(e-1)x_1 + ex_2 + ex_3 &= 0\\ fx_1 + (f-1)x_2 + fx_3 &= 0\\ gx_1 + gx_2 + (g-1)x_3 &= 0\end{aligned}$$

über den reellen Zahlen mit Parametern e, f und g. Welche Bedingungen müssen die Parameter e, f, g erfüllen, damit das LGS mehr als eine reelle Lösung (x_1, x_2, x_3) hat?

b) Es sei $A \in M(n \times n, K)$ eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie: Ist $x^{(j)} := \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$ die Lösung des LGS $Ax^{(j)} = e_j$, so ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

c) Invertieren Sie mit dieser Methode die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{F}_3).$$

Aufgabe 9.5 [3 Punkte]

Es sei

α_1	α_2	α_3
α_4	α_5	α_6
α_7	α_8	α_9

ein magisches Quadrat, das heißt, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_9$ natürliche Zahlen sind, und summiert man jeweils die Zeilen, die Spalten oder die Diagonalen, so ergibt dieser Wert jeweils eine feste Zahl $N \in \mathbb{N}$. Stellen Sie die zugehörigen Gleichungen auf und beweisen Sie, dass $\alpha_7 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_8$, $\alpha_7 + \alpha_8 = \alpha_3 + \alpha_6$, sowie $2\alpha_7 = \alpha_2 + \alpha_6$ gilt.