Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 11. Dezember 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 8.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(i) Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$.

(ii) Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und $f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

(iii) Ist $A \in M(121 \times 121, \mathbb{R})$ mit $A^6 = E_{121}$ und $A^{10} = E_{121}$, dann gilt immer $A^2 = E_{121}$.

(iv) Ist $A = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = E_2$.

(v) Ist $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $B^2 = 0$, so ist auch schon $B = 0$.

(vi) Ist $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $B^2 = E_2$, so ist $B = \pm E_2$.

Aufgabe 8.2 [2+2+2 Punkte]

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Nehmen Sie an, dass B die darstellende Matrix $B = M(f)$ einer $\mathbb{R}$-linearen Abbildung f ist. Für welche n, m ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und welchen Rang hat f?

c) Berechnen Sie C^m für $m \in \mathbb{N}_0$, wobei $C = (c_{ij}) \in M(n \times n, K)$ mit $n \geqslant 2$ und

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ 0, & j \neq i+1. \end{cases}$$

(Hinweis: Überlegen Sie sich die Fälle $n = 2, 3$ zuerst und beweisen Sie dann den allgemeinen Fall.)

Aufgabe 8.3 [2+2 Punkte]

a) Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, die Dimension von V über K sei n und f sei bijektiv. Gibt es dann geordnete Basen $\mathcal{B}_1 = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B}_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ von V, so dass $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f) = E_n$ gilt?

b) Es sei $R_\theta\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung des $\mathbb{R}^2$ um einen Winkel θ. Stellen Sie R_θ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ und $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ dar.

Aufgabe 8.4 [3 Punkte]

Für ein $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ sei ϱ_v die in Aufgabe 7.2 definierte Abbildung. Begründen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ gibt, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ von der Form

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

ist, wobei die Nullen für eine Spalte beziehungsweise Zeile der Länge 2 stehen.

Aufgabe 8.5 [3 Punkte]

Beweisen Sie, dass die folgende Menge von Matrizen eine zur symmetrischen Gruppe Σ_3 isomorphe Untergruppe der $GL_2(\mathbb{Q})$ bildet:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$