Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 7

Abgabetermin: Mittwoch, 4. Dezember 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 7.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Im Folgenden seien U_1 und U_2 endlich-dimensionale Untervektorräume eines K-Vektorraums V, $\mathcal{B}_1$ sei eine Basis von U_1 und $\mathcal{B}_2$ sei eine Basis von U_2.

(i) Die Menge $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ist immer ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$.

(ii) Es gilt immer, dass $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| \leqslant \dim_K(U_1 + U_2)$.

(iii) Die Menge $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ist immer eine Basis von $U_1 + U_2$.

(iv) Für jedes $\lambda \in K$ ist die Abbildung $f_\lambda \colon K^2 \to K^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \lambda \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$, K-linear.

(v) Die komplexe Konjugation ist eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$.

(vi) Die komplexe Konjugation ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung auf $\mathbb{C}$.

Aufgabe 7.2 [1+1+1+1+2 Punkte]

Es sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ ein festgewählter Vektor. Betrachten Sie die Abbildung, die einem $w \in \mathbb{R}^n$ den Wert

$$\varrho_v(w) = w - 2\frac{\langle w, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

zuordnet.

a) Ist eine solche Abbildung ϱ_v $\mathbb{R}$-linear?

b) Was ist $\varrho_v \circ \varrho_v$?

c) Berechnen Sie $\varrho_v(\lambda v)$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

d) Vergleichen Sie ϱ_v und $\varrho_{\lambda v}$ für $\lambda \neq 0$.

e) Betrachten Sie für $n = 3$ den Basisvektor e_1 und beschreiben Sie die Abbildung ϱ_{e_1} geometrisch. Fertigen Sie eine Skizze an. Für welche $w \in \mathbb{R}^3$ ist $\varrho_{e_1}(w) = w$?

Aufgabe 7.3 [2+2 Punkte]

Es sei K ein Körper und H sei ein Untervektorraum des K^n. Beweisen Sie:

a) H ist genau dann eine Hyperebene (d.h. $\dim_K H = n-1$), wenn es eine lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K$, $\varphi \neq 0$ gibt, so dass $\ker(\varphi) = H$.

b) H ist genau dann eine Hyperebene, wenn es $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ gibt, so dass nicht alle λ_i null sind und so dass $H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n, \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \right\}$ gilt.

Aufgabe 7.4 [4 Punkte]

Es sei V ein K-Vektorraum und $U_1, \ldots, U_n$ seien endlich-dimensionale Untervektorräume von V. Bestimmen Sie die Dimension von $U_1 + \ldots + U_n$ über K mit vollständiger Induktion über n. Überlegen Sie sich dazu, dass $(U_1 + \ldots + U_{n-1}) + U_n = U_1 + \ldots + U_n$ gilt.

Aufgabe 7.5 [2 Punkte]

Kann es eine abzählbare Basis von $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum geben? Sie dürfen benutzen, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.