Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 27. November 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 6.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.

(ii) Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ hat genau 2 verschiedene Unterräume der Dimension 1.

(iii) Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$ hat genau 7 verschiedene Unterräume der Dimension 2.

(iv) Im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3)$ sind die Elemente $x \mapsto x^{4711} - \bar{2}$, $x \mapsto x^3 - \bar{1}$ und $x \mapsto x - \bar{1}$ linear unabhängig.

(v) In $\mathbb{F}_3[X]$ sind die Elemente $X^{4711} - \bar{2}$, $X^3 - \bar{1}$ und $X - \bar{1}$ linear unabhängig.

(vi) Für jeden Vektorraum V ist die Menge $Y = V$ ein Erzeugendensystem.

Aufgabe 6.2 [1+1+1+1+1 Punkte]

Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind.

(a) $U_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 5x_2 + x_3 = 0\}$

(b) $U_2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 5x_2 + x_3 = 5\}$

(c) $U_3 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \text{ oder } x_1 + 5x_2 = 0\}$

(d) $U_4 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0\}$

Geben Sie für die obigen Teilmengen, die Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$ sind, jeweils eine Basis an.

Aufgabe 6.3 [1+1 Punkte]

Überprüfen Sie, ob folgende Familien (f_1, f_2, f_3) von Vektoren im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

(a) $f_1(x) = \sin^2(x),\ f_2(x) = \cos^2(x),\ f_3(x) = 1$

(b) $f_1(x) = \sin^2(x),\ f_2(x) = \cos^2(x),\ f_3(x) = \cos(2x)$

Aufgabe 6.4 [2+2 Punkte]

Wir betrachten den Polynomring $K[X]$ (siehe Aufgabe 5.4) in einer Variablen über einem Körper K. Zeigen Sie:

(i) Mit der Skalarmultiplikation $\lambda \cdot (a_0, a_1, \ldots) \coloneqq (\lambda \cdot a_0, \lambda \cdot a_1, \ldots)$ und der bekannten punktweisen Addition wird $K[X]$ zu einem K-Vektorraum. Was ist $\lambda \cdot f$ für $f = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$?

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ betrachten wir die Teilmenge $K[X]_n = \{f \in K[X] \mid \mathrm{Grad}(f) \leqslant n\}$. Hier ist der Grad des Nullpolynoms als $-\infty$ definiert. Zeigen Sie, dass $K[X]_n$ ein Untervektorraum von $K[X]$ ist und bestimmen Sie seine Dimension, indem Sie eine Basis angeben. Geben Sie auch eine Basis von $K[X]$ an.

Problem 6.5 [1+2+2 Punkte]

Beweisen Sie:

(i) Sei $f\colon K \to R$ ein Ringhomomorphismus von einem Körper K in einen Ring mit Eins R mit $1 \neq 0$. Dann ist f injektiv.

(ii) Sei nun K ein endlicher Körper und p seine Charakteristik. Dann kann $\mathbb{F}_p \subseteq K$ als Unterkörper aufgefasst werden, der sogenannte *Primkörper*.

(iii) Die Anzahl der Elemente von K ist von der Form p^n für ein $n \geqslant 1$. (Hinweis: Betrachten Sie K als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.)