Universität Hamburg
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG

Prof. Dr. Birgit Richter,
Dr. Christian Wimmer
Algebra und Zahlentheorie
Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
Wintersemester 19/20

Blatt 5

Abgabetermin: Mittwoch, 20. November 2019, 8:00-8:10h in H1

Aufgabe 5.1 [6 Punkte]

Begründen Sie kurz, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Die Abbildung $x \mapsto x^2$ ist surjektiv als Selbstabbildung von $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(ii) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen der reellen Zahlen auf sich. Die Menge aller $f \in V$ mit $f(x) \geqslant 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist ein Untervektorraum von V.

(iii) Der Ring $\mathbb{Z}/57\mathbb{Z}$ ist ein Körper.

(iv) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ ist $z^{-1} = \bar{z}$.

(v) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Re}(z - \bar{z}) = |z|$.

(vi) Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{Im}(z + \bar{z}) = 0$.

Aufgabe 5.2 [1+1+2 Punkte]

(i) Bestimmen Sie jeweils das Argument und den Betrag von $\sqrt{3}, -i, 1 + i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$.

(ii) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $z = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Fertigen Sie eine Skizze für $n = 3, 4, 6$ an.

(iii) Berechnen Sie z^m für alle $m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 5.3 [1+2 Punkte]
Seien V ein K-Vektorraum und $u, v, w \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Falls die Paare $(u, v), (u, w), (v, w)$ jeweils linear unabhängig sind, dann ist auch die Familie (u, v, w) linear unabhängig.

(ii) Falls (u, v, w) linear unabhängig ist, dann ist auch die Familie $(u+v+w, v+w, w)$ linear unabhängig.

Aufgabe 5.4 [2+1+2 Punkte]
Sei $R \neq \{0\}$ ein kommutativer Ring mit Eins. In dieser Aufgabe konstruieren wir den Polynomring $R[X]$ aller Polynome in einer Unbestimmten X mit Koeffizienten in R. Dazu betrachten wir die Menge

$$R[X] = \{(a_0, a_1, \ldots) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, R), a_i = 0 \text{ für fast alle } i \in \mathbb{N}_0\}$$

aller Funktionen (oder Folgen) mit endlichem Träger zusammen mit der punktweisen Addition

$$(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$$

und der durch

$$(a \cdot b)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$$

definierten Multiplikation. Wir setzen $X = (0, 1, 0, \ldots)$. (Bemerkung: Der Buchstabe X hat hier keine intrinsische Bedeutung. Die unbestimmte Variable kann und wird auch anders bezeichnet werden.) Zeigen Sie:

(i) Der Polynomring $R[X]$ ist tatsächlich ein kommutativer Ring mit Eins.

(ii) Jedes Element $f \in R[X]$ lässt sich in der Form $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ schreiben für ein $n \geqslant 0$ und $a_0, \ldots, a_n \in R$. Diese Darstellung ist eindeutig für $f \neq 0$ unter der zusätzlichen Bedingung $a_n \neq 0$. In diesem Fall heißt n der *Grad* von f.

(iii) Sei $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in R[X]$. Für $x \in R$ setzen wir $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R$ und definieren so einen Ringhomomorphismus

$$R[X] \to \mathrm{Abb}(R, R), \quad f \mapsto (x \mapsto f(x))$$

in die Selbstabbildungen von R mit der punktweisen Ringstruktur (muss nicht gezeigt werden). Die Elemente im Bild sind also die *Polynomfunktionen*. Geben Sie für jede Primzahl p ein Polynom $0 \neq f \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ an, so dass die zugehörige Funktion konstant 0 ist.

Problem 5.5 [2+2 Punkte]

Sei R ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit Eins.

(i) Wir betrachten die Menge der natürlichen Zahlen $m \in \mathbb{N}$, so dass die m-fache Summe $m \cdot 1_R = \underbrace{1_R + \cdots + 1_R}_{m}$ des Einselementes von R verschwindet. Zeigen Sie: Falls diese Menge nicht leer ist, so ist das kleinste Element eine Primzahl, auch die *Charakteristik* von R genannt. Zeigen Sie, dass dieser Fall insbesondere für endliche Ringe R eintritt.

(ii) Sei $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit 4 Elementen. Wir setzen hier die Existenz voraus. Was ist die Charakteristik? Bestimmen Sie die Gruppentafel für die Addition und Multiplikation. Gibt es einen Isomorphismus der unterliegenden additiven Gruppe $(\mathbb{F}_4, +) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?